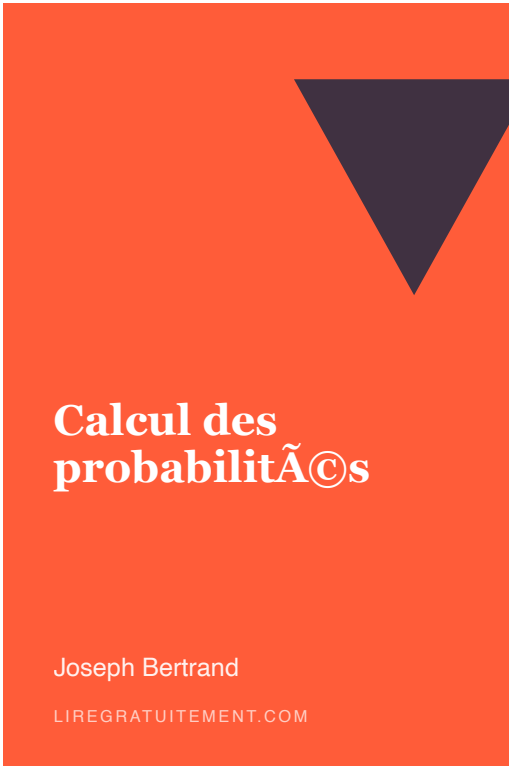

Calcul des probabilitÃ©s

Joseph Bertrand

LU AVEC LIREGRATUITEMENT.COM

Livre libre de droits, lisible gratuitement en ligne et en quinze minutes par jour.

Calcul des probabilitÃ©s

DU BIREAL UES LONGITUDES, DE l'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, Quai des Grands-Auyustiiis, 55.

^lA (\

Tous droits de reproduction el do Iraduclioii réservés pour lous pays.)

PllÉFACE.

Le Calcul des probabilités est une des branches les plus attrayantes des Sciences mathématiques et cependant l'une des plus négligées. Le beau Livre de Laplace en est peut-être une des causes. Deux opinions, en effet, se sont formées, sans rencontrer presque de contradicteurs : on ne peut bien connaître le Calcul des probabilités sans avoir lu le livre de Laplace ; on ne peut lire le livre de Laplace sans s'j préparer par les études mathématiques les plus profondes.

La seconde de ces propositions est incontestable, et le Traité analytique du Calcul des probabilités commence par deux cents pages, au moins, dans lesquelles l'exposition des théories mathématiques qui doivent servir au calcul des chances est complètement indépendante de toute application ultérieure. Laplace, après avoir trouvé des méthodes nouvelles, devait leur donner la préférence : les problèmes sont choisis et les solutions proposées de manière à mettre en évidence Futilité des fonctions génératrices.

J'ai cherché dans ce Livre, résumé de Leçons faites au Collège de France, à faire reposer les résultats les plus utiles et les plus célèbres du Calcul des probabilités sur les démonstrations les plus simples. Bien peu de pages, je crois, pourront embarrasser un lecteur familier avec les éléments de la Science mathématique. Si le signe f s'introduit quelquefois; il suffît presque toujours d'en connaître la définition.

Je me suis efforcé, à l'occasion de chaque question, de marqueiavec précision le degré de certitude des résultats et les limites nécessaiies de la Science. La plupart des réflexions suggérées par l'étude

approfondie des questions souvent controversées ont été proposées dans un Travail dégagé de toute intervention des signes algébriques, imprimé déjà depuis plusieurs années. Il servira d'Introduction à l'exposé complet des théories.

LES LOIS DU HASARD

Comment oser parler des lois du hasard? Le hasard n'estil pas ra%:i thèse de toute loi? En repoussant cette définition, je n'en proposerai aucune autre. Sur un sujet vaguement défini on peut raisonner sans équivoque. Faut-il distraire le chimiste de ses fourneaux pour le presser sur l'essence de la matière ? Gommence-t-on l'étude du transport de la force par définir l'électricité?

Le mot hasard, intelligible de soi, éveille dans l'esprit une idée parfaitement claire. Quand un joueur de tric-trac jette les dés, s'ils ne sont pas pipés, s'il ne sait ni ne veut amener aucun point plutôt qu'aucun autre, le coup est l'œuvre du hasard. Les grands noms de Pascal, de Fermât, de Huygens décorent le berceau du Calcul des hasards. On est injuste en oubliant Galilée. Un amateur du jeu, qui observait les coups et discutait les chances, lui proposa, comme cinquante ans plus tard le chevalier de Méré à Pascal, une contradiction et un doute. Au jeu de passe-dix ^ on jette trois dés et l'on gagne si la somme des points surpasse lo. Les

chances sont ég^ales ; les combinaisons qui passent lo forment la moitié du nombre total. L'ami de Galilée, très familier avec les dés, s'étonnait de gagner par le point r i plus souvent que par le point 12 et de voir sortir 10 plus souvent (jue 9. Ces quatre points arrivent cependant chacun de six manières, et pas davantage. Pourquoi 11 est-il plus rare que 1 1 ? Fautil nier l'expérience ou douter du calcul? Il faut les accorder en faisant mieux le compte. Les cas que l'on dénombre ne sont pas pareils; /j, 4, 4? par exemple, qui donne 12, n'est pas comparable à 4, 5, 2, qui donne i 1 ; la première de ces combinaisons est unique, chacun des trois dés doit amener 4 ; 4, 5, 2, au contraire, représentent six combinaisons, par la même raison qu'avec trois lettres distinctes on peut écrire six mots différents. Attentif à tout circonstancier, Galilée, au heu de six chances, en montre distinctement vingt-sept pour le point 1 1, vingt-cinq seulement pour le point 12. Le calcul, le compte, pour parler mieux, s'accorde, comme toujours, avec l'expérience des joueurs. (Jialiléc n'en faisait aucun doute.

Quoique ce grand géomètre .hic(pies liernoulli, pour avoir établi la loi sur des preuves, ait pris un rang élevé entre les plus illustres, la conviction universelle des joueurs a précédé ses profonds travaux. Quand un dé lui montrait trop souvent la même face, Panurgc, qui s'y connaissait, pour y voir bilï'e et piperie, n'invoquait rien (jue l'évidence. Ainsi faisait l'ami de Galilée : en com[]tant ro8o fois le point 1 1 contre looo fois le point 12, il devinait une cause et voulait la connaître.

Un jour, à Xaples, un homme de la Basilicate, en présence de l'abbé Galiani, agita trois dés dans un cornet et paria d'amener rafle de 6 ; il Tamena sur-le-champ. Cette chance est possible, dit-on ; l'homme réussit une seconde fois, el l'on répéta la même chose ; il remit les dés dans le cornet

trois, quatre, cinq fois, et toujours rafle de 6. « San^ue di Bacco! s' ècvidi l'abbé, les dés sont pipés! » et ils l'étaient. Pourquoi l'abbé jurait-il? Toute combinaison n'est-elle pas possible? Elles le sont toutes, mais inégalement. Galilée nous en avertit. Commençons, pour aller pas à pas, par jeter deux dés ensemble ou deux fois un seul dé, — les deux cas n'en font qu'un. Si deux joueurs parient, l'un pour deux 6, l'autre 6 et 5, les chances, pour eux, sont inégales. Sonnez représente l'une des trente-six combinaisons possibles ; le 6 et 5 en réunit deux. Si l'un arrive deux fois plus que l'autre, faudra-t-il accuser le hasard de partialité? attribuer au point 6 une antipathie occulte pour son semblable? (^ette interprétation n'est pas à craindre.

Si, prenant soixante dés, on compare la réunion des soixante (>, équivalente à trente sonnez de suite, avec la combinaison qui contient chacun des six points précisément dix: fois, les nombres par leur immensité se dérobent à l'imagination, et l'esprit troublé

par une telle abondance cherche les causes d'un mystère qui n'existe pas.

Avec soixante dés, pour amener soixante fois 6, une seule combinaison est possible : chaque dé doit montrer le point G. Dix (3, au contraire, et dix fois chacun des autres points, peuvent se distribuer et s'arranger avec tant de variété que, si chacun des arrangements possibles était préparé dans une boite d'un décimètre carré sans que, dans aucune boîte, les mêmes dés présentassent les mêmes faces, la cent-millionième partie de celles que la combinaison désignée enveloppe sous un même nom pourrait couvrir un million de fois la surface de la terre sans y laisser aucun vide. Jeter les soixante dés à la fois, c'est charger le hasard de désigner une des boîtes, et si, dans cette abondance, les combinaisons peu nombreuses ne se montrent jamais, est-ce

lui qui les exclut? La boîte qui contient les soixante 6, toutes celles môme qui en contiendraient plus de cinquante, sont introuvables dans la masse comme des gouttes d'eau désignées dans l'Océan.

Sur le Pont-\euf, pendant une journée ou pendant une beure, on peut prédire résolument que les passants de taille inférieure à deux mètres l'emporteront par le nombre. Le pont écarte-t-il les géants? Quand, au jeu de dés, on annonce quelles combinaisons prévaudront, c'est, comme pour les passants du Pont-Neuf, une question d'aritbmétique ; les combinaisons qu'on ose exclure forment, dans le nombre total, si les épreuves sont nombreuses, une proportion beaucoup moindre que, parmi les Parisiens, les bommes de six pieds (le baut.

Bufl'on, qui, ce jour-là, manqua de patience, fit jeter une pièce de monnaie en Fair '|oV> fois ; il obtint 204S fois face au lieu de 2020. Ln tel écart n'a rien d'inallendu. Le jeu étudié par BulTon était moins simple que pile ou face. Quelques millions d'épreuves ne []ourraient ni en révéler ni en infirmer la loi. La pièce jelée en l'air est jetée de nouveau et de nouveau encore, s'il le faut, jusqu'à l'arrivée de face. Butïbn, ayant amené face 20 ^(S fois, a joué U0/4S parties.

Un paradoxe singulier rend ce jeu, — ce pj'oblèinc de Saint-Pélcj'sbourg , c'est le nom qu'on lui donne, — mémorable et célèbre. Pierre joue avec Paul; voici les conditions : Pierre jettera une pièce de monnaie autant de fois qu'il sera nécessaire pour qu'elle montre le coté face. Si cela arrive au premier coup, Paul lui donnera un écu ; si ce n'est qu'au second, deux écus ; s'il faut attendre un troisième coup, il en donnera quatre, buit au quatrième, toujours en doublant. Tels sont les engagements de Paul. Quels doivent être ceux de Pierre? La Science, consultée par Daniel BernouUi, donne

pour réponse : Une somme infinie. I^e parti de Pierre, c'est le mot consacré, est au-dessus de toute mesure.

Les géomètres ont interprété de plusieurs façons et désavoué, comme excessive, la réponse irréprochable de la théorie du jeu. D'Alembert écrivait en 1768 : «Je connais jusqu'à présent cinq ou six solutions au moins de ce problème dont aucune ne s'accorde avec les autres et dont aucune ne meparaît satisfaisante. » Il en ajoute une sixième ou septième, la moins acceptable de toutes. L'esprit de d'Alembcrt, habituellement juste et fin, déraisonnait complètement sur le Calcul des probabilités.

Bufibn, pour expliquer le paradoxe de Saint-Pétersbourg, allègue que posséder ne sert de rien si l'on ne peut jouir. « Un mathématicien, dans ses calculs, — ce sont les propres paroles de Bufion, — n'estime l'argent ([ue par sa quantité, c'est-à-dire par la valeur numérique; mais l'homme moral doit l'estimer par les avantages et les plaisirs qu'il peut procurer. » On promet à Pierre de doubler son gain à chaque coup qui retarde l'arrivée de face, on ne peut doubler que ses écus. Pierre ne demande rien de plus, Bulfon peut en être certain. « L'accroist de chevance, avait dit avant lui Montaigne, n'est pas l'accroist d'appétit au boire, manger et dormir... »; chacun peut allonger la liste. Daniel Bernoulli, réduisant cette distinction en formule, oppose à la richesse mathématique une richesse morale que l'or accroît, mais si lentement, que toutes les unités, jusqu'à la dernière, procurent un égal contentement.

Cette théorie condamne tous les jeux de hasard. Le conseil de ne jouer jamais, si excellent qu'il soit, ne peut être proposé pour une théorie du jeu. Supposons en présence deux disciples de Bernoulli. «Si je gagne, dirait Pierre, qui est pauvre, en proposant à Paul une partie d'écarté, votre enjeu

de y^' payera mon dîner. — Repas pour repas, répondrait Paul, vous me devrez 20'*" en cas de perte, car tel sera le prix démon souper. — Si je perdais 20", s'écrierait Pierre ellVayé, je ne dînerais pas demain ; vous pouvez, sans en venir là,])erdre loooo'*", déposez-les contre mes 20"; l'avantage, Daniel Bernoulli raffîrme, restera de votre côté. » — Ils ne s'entendront pas.

Ceux qui suivent Condorcet et Poisson, sans contester la bonne foi de Paul, tiennent ses engagements pour nuls. Si le hasard amenait pile soixante quatre fois, Paul devrait payer autant d'écus que le sultan des Indes ne put donner de grains de blés à l'inventeur du jeu d'échecs Une telle promesse est téméraire ; si riche qu'on le suppose, Paul, ruiné dès le trentième coup, ne pourra plus payer double. Ne comptant plus sur ses promesses, Pierre ne doit pas lespayer^ et le calcul règle le droit de Paul à i5 écus.

On propose à 50 personnes possédant chacune 20 millions et pas davantage d'organiser une loterie à 20 millions le billet. Le gagnant deviendra l'homme le plus riche du monde, les 49 autres seront ruinés. Les 50 vigésimillionnaires acceptent. Ils sont peu sensés, mais équitables. La justice et la raison sont choses distinctes. Au jeu de Saint-Pétersbourg, tout aussi bien qu'à cette loterie, les espérances doivent être payées ; il ne s'agit plus d'un seul, mais d'un nombre illimité de milliards. Le problème imaginé par Daniel Bernoulli dissimule ingénieusement cette énorme mise. 1^'Algèbre, en la dégageant, met la chance à son juste prix.

Les conditions d'un jeu peuvent être équitables et dangereuses ; iniques dans d'autres cas, mais acceptables. Est-il déraisonnable, malgré le 0, le double 0 et le refait, de risquer D^*' à la roulette ou au trente-et-quarante ?

Quant au problème de Saint-Pétersbourg, il faut approuver

absolument et simplement la réponse réputée absurde. Pierre possède, je suppose, un million d'écus et les donne à Paul en échange des promesses convenues. Il est fou ! dira-t-on. Le placement est aventureux, mais excellent ; l'avantage infini est réali-

sable. Qu'il joue obstinément, il perdra i partie, looo, looo millions, i million de milliards peut-être; qu'il ne se rebute pas, qu'il recommence un nombre de fois que la plume s'userait à écrire, qu'il diffère surtout le règlement des comptes, la victoire, pour lui, est certaine, la ruine de Paul inévitable. Quel jour? quel siècle? On l'ignore ; avant la fin des temps certainement, le gain de Pierre sera colossal.

Une fourmi transporte un grain de poussière de la cime du mont Blanc dans la plaine, retourne sur la hauteur, descend une nouvelle charge et recommence toujours. Après combien de voyages aura- t-elle comblé les vallées et nivelé la chaîne des Alpes? Le premier écolier, sans consulter l'arénaire d'Archimède, fera le calcul sans erreur. Le dessein de la fourmi dépasse ses forces, s'écrieront des gens sages ; elle mourra à la peine. Gondorcet et Poisson ne sont pas moins sages. Pierre est un imprudent ; il entreprend, au delà de son crédit, une opération beaucoup trop longue ; il est aussi certain pourtant de ruiner Paul que la fourmi de niveler la Suisse.

Dans un problème plus célèbre et plus grave, la vie humaine servait d'enjeu. L'inoculation, avant la vaccine, était, contre la variole, le meilleur parti qu'on pût prendre ; mais I inoculé sur 200 mourait des suites de l'opération. Quelques-uns hésitaient ; Daniel Bernoulli, géomètre impassible, calculait doctement la vie moyenne, la trouvait accrue de trois ans et déclarait par syllogisme l'inoculation bienfaisante. D'Alembert, toujours hostile à la théorie du jeu, qu'il n'a jamais comprise, repoussait, avec grande raison cette

fois, l'application qu'on en voulait faire : « Je suppose, dit-il, que la vie moyenne d'un homme de trente ans soit trente autres années et qu^il puisse raisonnablement espérer de vivre encore trente ans en s'abandonnant à la nature et en ne se faisant pas inoculer. Je suppose ensuite qu'en se soumettant à cette opération la vie moyenne soit de trente-quatre ans. Ne seuible-t-il pas que, pour a[)précier l'avantage de rinoculation, il ne suffit pas de comi)arer la vie moyenne de trente-quatre ans à la vie moyenne de trente, mais le risque de I sur 200, auquel on s'expose, de mourir dans un mois, par rinoculation, à l'avantage éloigné de vivre quatre ans de plus au bout de soixante ans? »

On argumente mal pour vider de telles questions : supposons que Ton puisse, par une opération, accroitie la vie moyenne, non plus de quatre, mais de quarante ans, à la condilion qu une mort immédiate menacera le ([uart des opérés : un quart des vies sacrilié pour doui)lcr les liois autres, le bénéfice est grand. Qui voudra le recueillir? Quel médecin fera l'opération? Qui se chargera, en y invitant 4000 habitants robustes et bien portants d'une même commune, de commander pour le lendemain 1000 cercueils? Quel directeur de collège oserait annoncer à 30 mères, qu'empressé à accroître la vie moyenne de ses 200 élèves, il a joué pour eux ce jeu avantageux et que leurs iils sont les perdants? Les parents les plus sages acceptaient i chance sur 200; aucun, sur la foi d'aucun calcul, ne s'exposerait à i chance sur 4-

Un jeu, sans blesser la justice, peut causer de grands dommages; il peut être périlleux d'y échanger les chances de perte et de gain, les règles que doivent suivre ceux qui veulent commettre cette imprudence n'en reçoivent aucun changement.

Un ingénieur calcule la charge capable d'abaisser de o'°,50

le tablier d'un pont. L'épreuve est inutile, imprudente, dangereuse : le poids calculé est-il moins juste? Il est mauvais de trop charger un pont, mauvais aussi de jouer trop gros jeu. Cela ne change ni la théorie du jeu ni celle de Télasticité.

Revenons au théorème de Bcrnoulli.

S'il pleut un jour entier sur la place du Carrousel, tous les pavés seront également mouillés. Sous une forme simplifiée, , mais sans rien retrancher, c'est là le théorème de Bernoulli. Il pourrait se faire assurément, lorsque tout alentour la pluie tombe à torrents, qu'un certain pavé restât sec. Aucune goutte n'a pour lui de destination précise, le hasard les disperse, il peut les porter toutes sur les pavés voisins ; personne ne le supposera sérieusement.

Telle est la puissance des grands nombres. Le hasard a des caprices, jamais on ne lui vit d'habitudes. Si looo gouttes tombent sur looo pavés, chaque pavé n'aura pas la sienne ; s'il en tombe looo millions, chaque pavé recevra son milhon ou bien peu s'en faudra. Si l'on jette deux dés 36 millions de fois, le double-six, au lieu de i million de fois, pourrait ne se présenter que looooo, et peut-être n'arriver jamais. Une telle exclusion soumise au calcul, d'après notre façon de parler, est déclarée impossible.

L'analogie va à l'identité. Considérons en eïïet, sur la place, pendant la pluie, un carré de o"^,6 de côté. Partageons la base, aussi bien que la hauteur, en 6 parties, portant chacune un numéro d'ordre ; découpons le carré, par des parallèles aux côtés, en 36 cases égales désignées chacune par les deux numéros pla-

cés en tête des bandes auxquelles elle appartient; une case répondra à 6,6; une autre à 5,6 ; une troisième à 6,5 ; elles auront mêmes noms que les coups possibles avec deux dés. Chaque goutte de pluie tombant sur le carré représente un coup de dés. Le hasard, dans les deux

épreuves, décide entre les mêmes points. A la fin de la journée, la pluie a également mouillé les 36 cases, les dés ont amené les 36 points également : où est la différence ?

Rien ne manque au rapprochement et le même tempérament est nécessaire aux deux assertions trop précises. Il serait fort étrange que les pavés, quoique mouillés également, n'eussent pas reçu dans le cours d'une journée quelques centaines de gouttes en plus ou en moins ; de même, sur quelques millions de coups de dés, quelques points se montrent sans doute un peu plus, d'autres un peu moins souvent.

Les rapports sont certains, non les différences, et c'est malheureusement la différence qui ruine. On joue [oo parties à un jeu de hasard, l'enjeu est so*^'"; il est peu probable, mais possible, que l'on perde 65 parties. La perte de 3o louis représente 3o pour roo du nombre des parties jouées.

Au lieu de loo parties, on en joue loooo; une perte de 3o pour loo, c'est-à-dire de 6.5oo parties, doit être tenue pour impossible. 5i5() parties perdues sup[]oseront, d'après le calcul, une fortune aussi adverse que 65 sur une série unique de loo parties; la perte correspondante, 3oo louis, représente 3 pour loo du nombre des parties jouées.

Sur I million de parties, une perte de 3 pour loo supposerait, contre les lois du hasard, un dérèglement qui jamais ne s'est vu ; 3 pour looo représente une chance défavorable équivalente à celle des deux hypothèses précédentes. Trois parties sur looo, pour i million de parties, feraient une perte de 3ooo louis; un jeu égal devient à la longue dangereux. Non seulement les lois du hasard permettent la ruine du joueur, elles la prédisent. Tout joueur se ruinera si le temps ne lui manque pas. Lagrange, Laplace et Ampère l'ont démontré ; leurs raisonnements n'ont corrigé personne, ils intéressent tout le monde.

PREFACE

Si deux joueurs jouent sans cesse jusquV\ la ruine de l'un d'eux, le moins riche sera probablement vaincu. Le rapport du nombre des parties gaj^nécs ou perdues différera de moins en moins de l'unité, mais la différence augmentera, comme nous l'avons dit ; tantôt l'un sera en perte, tantôt l'autre. La différence, petite d'abord, deviendra grande. La perte, dans ses oscillations, frappera chacun des deux joueurs alternativement ; quand elle dépassera la fortune du perdant, la ruine pour lui sera consommée. Le danger menace surtout, on le comprend, le moins riche des deux joueurs. L'homme qui joue sans limite et sans cesse accepte tous les adversaires, dont Tensemble, sans changer son sort, peut recevoir un nom collectif : le public, qui n'est jamais ruiné, ruine les imprudents qui l'attaquent.

Tout change quand les conditions du jeu sont inégales. Le moindre avantage fait pencher la balance. Pour le joueur que les

conditions favorisent, le gain augmente sans Umite. Au trente-et-quarante, par exemple, l'avantage du banquier est un peu plus de 0,6 pour 100. Si l'on joue 100 parties, en évaluant à i ooo*'" la somme des enjeux pour chacune d'elles, l'avantage réservé au banquier par les règles du jeu représente 600"^ Les accidents du hasard produiront un écart dont la valeur moyenne, indiquée par le calcul, est 8000*". Le banquier, sur une série de 100 parties, a donc chances égales, à très peu près, de perdre ou de gagner. La perte moyenne, c'est tout son avantage, est un peu moindre que le gain moyen.

Sur 10 000 parties, en supposant toujours l'enjeu de looo*", l'avantage ménagé au banquier par les règles du jeu représente 60000"^ L'écart moyen, dix fois plus grand seulement pour un nombre centuple de parties, est 80000'■^ La perte du banquier sur 10 000 parties sera donc un événement

très ordinaire; mais, en ce cas, la valeur moyenne de la somme perdue sera 20000^^'", tandis que, dans l'hypothèse plus vraisemblable du gain, la valeur moyenne est t40000*".

Sur I million de parties, le bénéfice régulier, équivalent à l'avantage réservé au banquier, serait 6 millions ; l'écart moyen en plus ou en moins, 800000'^" seulement ; s'il gagne moins de 5 millions, le banquier a eu du malheur ; un gain inférieur à 4 millions serait invraisemblable, et il y a plus de loooo à parier contre i que son gain ne s'abaissera pas au-dessous de 1 millions.

La loi de Bernoulli, quand elle est mise en défaut, révèle une cause perturbatrice du hasard.

Tels se montrent souvent les résultats du suffrage universel. Supposons 10 miUions d'électeurs. Attribuons 6 millions de votes à un parti, celui de la majorité. 4 millions seulement à la minorité. On forme 1000 collèges de loooo électeurs chacun : tout candidat qui réunira plus de 5ooo suffrages sera élu. L'opinion approuvée par les quatre dixièmes des votants serait représentée proportionnellement par 4oo députés sur 1000. Les lois du hasard ne lui accordent rien. Sur 1000 représentants, pas un seul pour elle. Le calcul réduit à zéro, pour ainsi dire, la vraisemblance de toute autre hypothèse. Supposons, pour donner une idée des chiffres, que, saisissant l'occasion pour tenter la chance, un joueur s'engage, dans les conditions électorales supposées, à payer autant de millions qu'il se trouvera de députés de la minorité vainqueurs dans la lutte. On ne pourrait pas, en échange de ses promesses, c'est la réponse rigoureuse, sinon acceptable, du calcul, lui offrir équitablement plus d'un centime.

Ce centime pourrait lui coûter cher. Les minorités, même beaucoup moindres, obtiennent quelques représentants. Les électeurs n'étant pas associés par le sort, les influences

locales triomphent des lois du hasard. C'est avec grande défiance qu'il faut, sur les traces de Condorcet, éclairer les Sciences morales et politiques par le flambeau de V Algèbre.

Les étoiles, sur la voûte céleste, semblent semées sans ordre et sans loi ; 3ooo environ, pour qui a la vue bonne, brillent au-dessus du notre horizon. Ptolémée, dans son Catalogue, n'en inscri-

vait que 1020. Un astronome dont le nom est resté obscur sans injustice, l'archevêque Mitchell, a fait d'une idée ingénieuse et juste une application trop hardie. Si le hasard distribuait sur la voûte du ciel 3 000 points brillants, quelle serait la distance moyenne de chacun d'eux, à son voisin le plus proche? Le problème est intéressant ; Mitchell ne le résout pas ; mais, remarquant dans la constellation du Dragon deux étoiles situées à 3' l'une de lautre, il trouve que contre un tel rapprochement on pourrait, aprioriy parier <So contre 1 ; dirigeant ensuite ses calculs sur le groupe des Pléiades, Mitchell conclut à 500000 chances contre i pour qu'une cause, en dehors du hasard, ait rapproché les six étoiles.

En proposant la mesure précise d'assertions aussi vagues, on peut compromettre la Science. Si Mitchell, soupçonnant entre les étoiles un lien mécanique, avait tiré avantage de leur rapprochement singulier, s'il avait déclaré vraisemblable, très vraisemblable, presque certain, qu'une cause particulière a troublé pour elles les lois générales, il serait sans reproche, mais la précision du chiffre jj^t^mTô ^^^ peut trouver d'approbateurs. Les appréciations sans chiffres n'engagent à rien, un chiffre engage la Science, et c'est sans aucun droit.

L'application du calcul aux questions de ce genre est une illusion et un abus.

((Les motifs de croire que, sur 10 millions de boules

blanches mêlées à i noire, ce ne sera pas la noire que je tirerai du premier coup est de même nature, a écrit Condorcet, que le motif de croire que le Soleil ne manquera pas de se lever demain.

» 1^'assimilation n'est pas permise : Tune des prohahililés est objective, l'autre subjective. La probabilité de tirer la boule noire du })remier coup est 75175^,7^, ni plus ni moins. Quiconque l'évalue autrement se trompe. La probabilité pour que le Soleil se lève varie d'un esprit à l'autre. Un philosophe peut, sans être fou, annoncer sur la foi d'une science que le Soleil va bientôt s'éteindre ; il est dans son droit comme Condorcet dans le sien ; tous deux l'excéderaient en accusant d'erreur ceux qui pensent autrement. L'assimilation à une urne est le procédé de démonstration. Une urne contient des boules blanches, peut-être aussi des noires ; on y fait 1 million de tira<^es, tous donnent des boules blanches; quelle est la probabilité pour qu'un nouveau tirage amène une noire? Le calcul répond : T^nnlTnrô- " ^^^ a vu, conclut Condorcet, i million de fois le Soleil se lever du côté de l'orient, quelle est la probabilité pour qu'il manque demain? La quesLion n'est-elle pas la même?)) Elle est difierente. L'urne, dans le premier cas, est invariable ; qui peut, dans le second, savoir le train des choses ?

Paul, sur la foi de Condorcet, veut parier que le Soleil se lèvera demain. La théorie fixera les enjeux. Paul recevra r'" si le Soleil se lève et donnera i million s'il fait défaut. Pierre accepte le pari. Au lever de chaque aurore, il perd i'"*" et le paye. La chance pour lui diminue chaque jour, puisque le Soleil couq)te un lever de plus. Paul consciencieusement augmente son enjeu ; consciencieusement aussi, Pierre continue à lui payer i*'". Les conventions demeurent équitables. Les parieurs voyagent, on parcourt vingt contrées, de l'occident à lorient, Pierre perd toujours; il poursuit sa chance

cependant, conduit Paul vers le nord ; ou franchit le cercle polaire ; le Soleil reste un mois au-dessous de l'horizon ; Paul perd 3o millions, croit Tordre de nature perverti et soupçonne que l'urne est changée.

Tarquin l'ancien, rebelle aux prétentions de l'auguie Accius Nœvius, osa, dit-on, le mettre au défi. Ce que je pense est-il possible ? demanda le roi. L'augure accepta l'épreuve. «Tu peux donc couper [cette pierre? » Nccvius prit un rasoir et coupa le caillou. Avec une très louable impartiahté. Condorcet a cherché la chance de vérité. Le point de départ de son calcul est le nombre des cailloux que, depuis l'invention des rasoirs, on n'a pas réussi à couper, et, sans répondre du détail des chiffres, il évalue à ^,^ J^^^ la probabilité de l'anecdote. Il est un peu naïf. Un caillou que l'on coupe comme un radis est un caillou miraculeux ou un faux caillou. La saine philosophie dont il se vante repousse tout miracle ; l'accord fait sous main entre Naevius et le roi sauverait la vraisemblance. Pour résoudre le problème, au lieu de compter des cailloux, il faut comparer, si on le connaît, le nombre des princes capables d'imposture à celui des augures complaisants et des historiens sans critique.

Le hasard, à tout jeu, corrige ses caprices. Les irrégularités mêmes ont leur loi.

Supposons qu'à un jeu de pur hasard une série de parties ait été jouée. Précisons, pour plus de clarté : le jeu est pile ou face ; la série de loo parties. Pour chacune, on marque la différence entre ie nombre des gains et le nombre normal 5o. , Si l'on a gagné 44 ou 56 fois, on marque (5 dans les deux cas. Chaque série, de cette manière, se trouve caractérisée par un nombre que nous appellerons V écart ; supposons obtenus I million d'écarts. Le ha-

sard décide leur grandeur, comme si l'on puisait i million de fois dans un sac contenant des

boules de loto. La dilTérence est grande cependant : tandis que toutes les boules sortiront également ou peu s'en faut, les petits écarts seront les plus nombreux. Chacun se présentera, à la longue, un nombre de fois proportionnel à la probabilité que Ton peut calculer ; la régularité des résultats peut recevoir une forme apparente et visible. Marquez sur une ligne droite, à distances égales et petites, les cbifTres 0, I, 2, 3, ... représentant les écarts possibles. Par chacun de ces points élevons une hauteur égale au nombre de fois que Técart s'est produit; les extrémités de ces lignes feront paraître une courbe, toujours de même forme; le sommet coj-respond au point 0 ; l'abaissement, à partir de ce point, très lent d'abord, s'accroît suivant une loi prévue par le calcul. Si quelques irrégularités déparent le dessin, doublez, décuplez le nombre des épretives, Texactitude des prédictions est à peine croyable.

Les grands nombres régularisent tout. La moyenne de tous les écarts peut être prédite avec confiance : elle sera 4 si la série est de i oo épreuves, /[O si elle est de loooo. La même certitude s'attache à la moyenne des carrés des écarts, à celle de leurs cubes, de leur quatrième puissance. Pour des séries de loo, par exemple, la moyenne des carrés est 25. Ces prédictions sont sûres. iN'est-ce pas, pour ainsi parler, miracle de voir un hasard aveugle dicter des résultats exactemeut prévus ?

Aidée de ces théorèmes singuliers, la dextérité des géomètres a su, chose merveilleuse, rencontrer sur ces voies détournées une

solution de la quadrature du cercle. Si, dans une série d'épreuves suffisamment nombreuses, on divise la moyenne des carrés des écarts par le carré de la moyenne, le quotient est, à très peu près, la moitié de la surface du cercle de rayon unité. Avec de la patience, le succès est certain.

XXII PRÉFACE

Beaucoup de joueurs, préoccupés de cette rég'ularité nécessaire dans les moyennes, cherchent, dans les coups qui précèdent celui qu'ils vont jouer, une indication et un conseil. Ce n'est pas bien entendre les principes. La Science, à ces chimères, ne reste pas sans réponse. La décision du bon sens suffit, elle est nette et claire : à quoi bon la traduire en Algèbre? Le préjugé est opiniâtre. Les géomètres perdraient à le combattre leur lemps et leurs formules.

L'illusion repose sur un so[)hisme : on allègue la loi de Bernoulli comme certaine ; elle n'est que probable. Sur 20 (.00 épreuves, dit-on, à la roulette, la noire ne peut pas sortir plus de 1 0300 fois, l'assertion de la Science est formelle. Si les 10000 parties ont donné 6000 noires, les loooo suivantes ont donc contracté une dette envers la rouge. On fait trop d'honneur à la roulette : elle n'a ni conscience ni mémoire. En supposant qu'à une rencontre inouïe succédera, pour la réparer, un nouvel écart de la règle, on n'eflace pas rinvraiseml)lance, on la redouble.

La certitude des lois de Bernoulli est celle d'un chasseur très adroit, (|ui, connaissant son arme, est certain d'abattre une bète féroce à dix pas. La bète se présente, il la manque ; en la voyant,

furieuse, se ruer et l'assaillir, doit-il rester impassible, confiant dans la certitude de l'avoir tuée?

Le hasard, sans choisir, régularise tout ; la raison en est que, si toutes les combinaisons, dont le nombre est immense, étaient présentes matériellement, les moins nombreuses deviendraient introuvables. Le hasard reste libre, mais la carte est forcée.

LES LOIS DU HASARD. XXIII

Appliquée aux dés, aux caries, au jeu de rouge et de noire, aux numéros pairs ou impairs, à pile ou face, la théorie des chances est indiscutable : rien n'y altère la rigueur des preuves; l'Algèbre exécute plus rapidement les dénombrements qu'avec de la patience et du temps on pourrait faire sur ses doigts. Tous les arrangements sont également possibles ; que les plus nombreux se présentent, il n'y a pas de sujet d'étonnement.

La Physi(jue, l'Astronomie, les phénomènes sociaux, semblent, dans plus d'un cas, régis par le hasard. Peut-on comparer la pluie ou le beau temps, rap[)arition ou l'absence des étoiles filantes, la santé ou la maladie, la vie ou la mort, le crime ou l'innocence à des boules blanches ou noires tirées d'une même urne? Le môme désordre apjiarait dans les détails, cache-t-il la même uniformité dans les moyennes ? Retrouvera-t-on dans les écarts les traits connus et la physionomie des cflets du hasard ?

Tout événement qui alterne avec son contraire est comparable aux boules blanches ou noires puisées dans un sac ; le sac est-il toujours le même? est-il ouvert? Une force intelligente, se proposant une fin, intervient-elle dans une mesure petite ou gi'ande pour corriger les caprices du sort? Le raisonnement ne [)eut devancer rexpérience ; les observations, soigneusement discutées,

condamnent, en même temps que les sce[]ti(]ues rebelles à tout rapprochement, les esprits absolus (pii prétendent tout soumettre au calcul.

L'empreinte du hasard est marquée, très curieusement quelquefois, dans les nombres déduits des lois les plus précises. Ijne Table de logarithmes en témoigne. Pour i oooo nombres successifs, dans les Tables à lo décimales de Véga, je prends la septième figure du logarithme : rien dans ce choix n'est laissé au hasard. L'Algèbre gouverne tout, une loi inflexible enchaîne tous les chiffres. Si l'on compte cepen-

dant les résultats, on aura, à très peu près, sur loooo, i ooo fois le chiffre o, i ooo fois le chiffre i et ainsi des autres ; la formule se conforme aux lois du hasard. Vérification faite, sur loooo logarithmes, le septième chiffre s'est trouvé 990 fois égal à o ; 997 fois à 1 ; 993 fois à 2 ; 1012 fois à 4- En partageant les 10 000 nombres en dix séries et prenant pour chacune les moyennes des écarts, j'entends la différence entre le nombre des apparitions de l'un des chiffres et le nombre normal 100, et les comparant à la moyenne du carré des écarts, le rapport des nombres, qui, d'après les lois du hasard, devrait être 1,570796, moitié du nombre que les géomètres désignent habituellement par la lettre t., se trouve égal à 1,56 1 ; le même calcul fait à l'aide du chiffre i donne 1,098, et la moyenne de ces deux résultats est 1,579. Les trois premiers chiffres sont exacts.

La marque du hasard semble visible. Pouvait-on cependant le mieux tenir à l'écart? Nos lois expriment une propriété commune aux combinaisons les plus nombreuses ; elles se vérifient quand on ne choisit pas, il ne suffit pas de choisir pour s'y soustrair-e.

Le partage des naissances entre les deux sexes a été étudié sur plus de 200 millions d'enfants. Depuis près de deux siècles le nombre des garçons a dépassé celui des filles ; aucun pays ne fait exception ni aucune époque. Le rapport varie peu : le nombre des garçons, pour 100 filles, est compris, pour un grand nombre de naissances, entre 104 et 108. 0-n s'est demandé si cette supériorité observée chez toutes les races, dans les villes comme à la campagne, au midi comme au nord, chez les plus pauvres comme chez les plus riches, est une loi de l'humanité ou un accident fortuit.

A notre époque et pour notre état social, l'évidence est complète ; ni les calculs ne sont nécessaires ni les raisonne-

ments. Ils le sont pour un second problème. Les variations observées d'une année à l'autre pour un môme pays, d'une province à l'autre pour une même année, sont-elles assimilables aux résultats capricieux du hasard? Peut-on voir dans la constance approchée du rapport un témoignage suffisant de la loyauté du jeu? Je précise la question : une urne, toujours la même, contient des boules noires et blanches ; on y puise une boule au moment de chaque naissance. Pourrait-on sans invraisemblance représenter par le nombre de boules de chaque couleur la proportion variable des naissances ? Le nombre des noires, bien entendu, l'emporte sur celui des blanches dans la proportion qui convient au succès.

Les écarts de la moyenne produits par le hasard sur I million d'épreuves, pour un événement dont la probabilité diffère peu de i, ont pour valeur moyenne 4°- D<" plus grands écarts sont possibles assurément, mais leur probabilité diminue rapidement.

On peut parier looo contre i pour un écart moindre que iGoo. La probabilité d'un écart supérieur à 2000 est fo^onouo- Telles sont les indications du calcul.

2000 naissances masculines en plus sur i million accroîtraient de moins d'un centième le rapport du nombre de garçons à celui des lilles. Les rapports extrêmes fournis par la Statistique, i,04 et 1,08, diffèrent trop l'un de l'autre pour permettre l'assimilation pure et simple aux effets du hasard. Les conditions ne peuvent donc être, en tout temps et en tout pays, identiquement les mêmes, mais la variation est petite. Pendant l'année iSày, le nombre des garçons nés à Paris est descendu à 10074 pour 10 000 filles. Dans les hasards d'un tirage au sort dont les conditions seraient invariables, sur un nombre d'épreuves égal à celui des naissances annuelles à Paris, on pourrait parier plus de i million contre i

qu'une telle anomalie ne se produira pas. Que s'est-il passé en jS^^ ? On doit s'attendre à l'ignorer toujours. Dans plusieurs départements, depuis le commencement du siècle, le nomijre des naissances annuelles des fdles a surpassé exceptionnellement celui des g-arcons. L'anomalie a moins d'importance que l'écart observé à Paris, elle se rapporte à des nombres cinq fois moindres.

La recherche des causes est délicate et obscure. Il est à regretter, dit M. Quetelet après de longues et patientes recherches, qu'on ait si peu de documents pour s'éclairer.

L'âge des parents joue sans doute un grand rôle. Cette explication semble la meilleure. Si on ne l'accepte qu'avec doute, c'est que, masquée parle hasard, l'influence reste mal connue ; l'âge moyen du père et celui de la mère varient peu dans un même

pays. La variation des âges peut cependant expliquer, en partie au moins, les anomalies observées.

Allons plus avant et cherchons dans les eflets troublés les traits généraux du hasard.

La quadrature du cercle déduite approximativement du nombre des naissances ne laisse guère subsister de doutes. En appliquant la formule des écarts aux Sf) départements pendant l'année 1878 Gi])rena.nldi\n?,VAn/iuaire dit Buj^eaii des Longitudes les écarts entre le nombre des naissances de garçons correspondant â 10000 filles pour chacun des départements et la moyenne pour la France en tière, et la comparant à la moyenne de leurs carrés, au lieu du quotient 1,07 prévu par la théorie, on obtient 1 ,73. La petitesse de l'erreur paraît digne d'attention.

La recherche des causes est le grand problème : on le transforme sans le résoudre. En enchaînant les inconnues aux inconnues, la Science s'agrandit et s'élève. Si chaque effet n'avait qu'une seule cause, les énoncés au moins seraient

faciles. La complication est plus grande. Dans le monde immense des faits, les parentés existent à tous les degrés. I^V'numération des observations révèle les liens quand les nombres sont grands. La discussion est délicate, le bon sens la dirige, le calcul prononce.

L'inventeur d'un système associe, je suppose, la chute de la pluie à un phénomène astronomique ; il a observé vingt fois, sans une seule exception, qu'une pluie plus ou moins forte suivait le phénomène indiqué ; ce rapprochement est digne d'attention.

>Lais c'est à Brest qu'on a observé; les jours sans pluie, à Brest, sont une rare exception, (^ue vaut alors la démonstration? Au Caire, elle serait décisive.

Il faut rapprocher, dans les cas semblables, le nombre des coïncidences observées de celui qui le remplacerait probablement, si tout était réglé par le hasard. Si deux phénomènes se présentent chacun () jours sur lo, les coïncidences, même très fréquentes, ne prouvent rien. Si chacun d'eux revient deux fois par an seulement, la coïncidence, plusieurs fois observée, sera diflicileinent attribuée au hasard. Difficilement : l'indication est vague ! elle doit l'être. Quand les eréomètres, dans les cas semblables, ont donné un chiffre précis, ils ne tenaient aucun compte de la probabilité a priori du rapprochement qu'on a voulu faire, ou ils l'évaluaient, ce qui revient au même, tout à fait au hasard. Une comète a précédé la mort de César. ()uel(pie nombreux et bien constatés que fussent les événements de ce genre, oserait-on croire, sur la foi du calcul, que telles âmes sont tant nobles et liéroïques que de leur délogement et trépas nous est certains jours devant donné signification des deux?

Un géomètre a trouvé une démonstration nouvelle du théorème de Bernoulli. J'en examine le principe, j'en parcours les calculs, j'en vérifie quelques-uns, et, n'apercevant aucune

objection et aucune méprise, je déclare avec confiance l'exactitude de la méthode.

Le même auteur propose une démonstration du célèbre théorème énoncé par Fermât. J'examine le principe, je parcours les calculs, j'en vérifie quelques-uns, et, n'apercevant aucune objection et aucune méprise, je continue à chercher la faute. Pourquoi

cette différence? Si les cas sont identiques, linégalité est-elle juste? Les cas sont différents. L'auteur qui démontre le théorème de Bernoulli enfonce une porte ouverte, il ne peut guère trébucher au passage. Celui qui démontre le théorème de Fermât suit un sentier sans issue connue ; les chances d'une chute, d'après l'expérience du passé, y surpassent loo contre i pour les plus habiles.

Toujours exact et précis dans l'énoncé des règles, Laplace n'a pas manqué d'introduire cette probabilité a priori comme point de départ et base nécessaire du calcul. Quelles que soient les conditions du problème, elle entre comme facteur, presque toujours inconnu, dans la formule qui la résout. L'illustre auteur de la Théorie analytique des probabilités a plus d'une fois cependant donné des chiffres précis qu'il faudrait changer avec l'hypothèse arbitrairement adoptée sur la probabilité a prioii. Quand il assigne i H26214 à parier contre i comme mesure de la probabilité pour que le Soleil se lève demain, l'affirmation, quelles que soient les atténuations qui la suivent, repose sur une pure illusion.

Le rapport du nombre des décès à la population n'a pas été moins soigneusement étudié que celui des naissances. Les Compagnies d'assurances ont intérêt à le connaître et à en grossir l'évaluation. La Statistique le montre à peu près constant. Les variations, quoique petites, sont supérieures à celles du rapport des naissances des deux sexes. L'assimilation à des boules tirées d'une urne de composition invariable n'est

donc pas acceptable. La vicissitude des événements règle sans cesse la composition de l'urne. Tantôt c'est le choléra qui passe et

y verse des boules noires. Ce sont les eaux plus pures et plus fraîches qui apportent des boules blanches. C'est la disette qui rend les maladies plus abondantes et plus graves, la guerre qui accroît les mauvaises chances dans Turne sans cesse renouvelée.

M. Dormoy, dans un livre savant et bien composé sur la théorie des assurances, a cherché curieusement dans les documents de la Statistique la confirmation de la loi des écarts. Il introduit, sous le nom de cocjfflcient de diver gcncc , le rapport de l'écart observé à l'écart moyen prévu par le calcul.

Un phénomène semble régulier, les chifTres qui le résument, sans être constants, varient peu d'une année à l'autre. On peut composer une urne qui, sous l'influence du hasard, représentera en moyenne, dans un grand nombre de tirages, par les boules noires amenées, la loi de l'arrivée de l'événement. On nomme écart, pour l'urne, la diûerence avec la moyenne annoncée par le calcul. L'écart, pour l'événement, est la difTérence entre le chifl're relatif à une année et la moyenne générale. Si le hasard règle le phénomène, le coefficient de divergence différera peu de l'unité. Un rapport plus grand révèle, s'il se maintient, l'influence d'une cause perturbatrice. Un coefficient de divergence plus petit que l'unité ferait deviner, au contraire, une action régulatrice qui, surveillant pour ainsi dire le hasard, amoindrit les inégalités et en efface le caractère. Tel est le cas d'un observateur trop avisé qui, dans les cas douteux, altère et corrige les observations pour en accroître la vraisemblance.

Pour les naissances des filles et des garçons, le coefficient de divergence à été 1,17 pour la France entière, de i832 à

1841, et r,38 de i85i à 1864. Il confirme pour ces périodes la supposition d'une probabilité constante.

Le rapport du nombre des naissance naturelles au nombre total des naissances est moins régulier. Le coefficient de divergence, de 181 7 à 1826, est égal à i5; pour le rapport du nombre des mariages à la population, le coefficient de divergence, de 1829 à 1848, s'est élevé à 2,5.

Le rapport du nombre des décès à la population a pour coefficient de divergence 86 ! Les anomalies sont continuelles. Le coefficient ne porte que sur des écarts, il faut le remarquer. Le nombre des décès pendant une année étant supposé pour la France entière égal à i million et au trente-sixième de la population, l'assimilation des Tables mortuaires annuelles aux tirages faits 36 millions de fois dans une urne contenant I boule noire et 35 boules blanches peut être tentée. Le nombre des boules noires, comme celui des décès, difterera peu de I million ; mais, tandis que l'écart moyen, pour le nombre des boules noires, sera égal à 800, celui des décès sera 86 fois plus grand ; 86 fois 800 font 68800, c'est moins de 2 pour 1000 de la population. Une épidémie produisant à Paris 4000 décès pour une année pourrait, pour le département de la Seine, expliquer le coefficient 86. Le choléra de 1849 ^ ^'^^^ périr 20000 Parisiens.

Les lois du hasard sont invariables, ce sont les conditions du jeu qui changent. Poisson, pour les plier à tous les accidents, a cru compléter Tœuvre de Bernoulli en énonçant sa loi des (J[rands nombres.

Pour que le hasard régularise l'arrivée d'un événement et que, sur un grand nombre d'épreuves, les rapports soient certains, aussi bien que la loi des écarts, il faut que la probabilité soit constante. Poisson supprime cette condition.

Un cas fictif très simple montrera la portée du nouveau

LES LOIS 1)1" HASARD. XXXI

[)rincipe. Une urne contient des boules numérotées, on y fait une série de tirages ; mais, en remettant chaque fois la houle (ju'on a tirée, on néglige d'agiter et de faire le mélan<,œ : les chances, peu à peu, deviennent inégales ; certaines boules sortent plus souvent que les autres, la théorie semble mise en défaut. Continuez, dit Poisson ; pour prolongé que soit le désordre, il est embrassé lui-même dans la loi des sfrands nombres ; certaines boules sont dessus, vous les verrez dessous un autre jour;rhommc peu soigneux à faire le mélange aura un successeur plus consciencieux ou dont la négligence, qu'il faut prévoir, profitera à des comlnnaisons nouvelles ; tout à la longue se conqoenscra. Citons ses propres paroles : « Les choses de toute nature sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la loi des grands nombres. Elle consiste en ce que, si l'on observe des nombres très considérables d'événements de même nature, dépendant de causes qui varient irrégulièrement, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, c'est-à-dire sans que leur variation soit progressive dans aucun sens déterminé, on trouvera entre ces nombres des rapports à très peu près constants ; pouichaque nature de choses, les rapports auront une valeur spéciale dont ils

s'écarteront de moins en moins à mesure (jue la série des événements observés augmentera davantage el qu'ils atteindraient, s'il était possible de prolonger cette série à l'infini. »

Tel est le résumé fait par Poisson lui-même d'une découverte qui se distingue bien peu des lois du hasard, et à laquelle il a, à peu près seul je crois, attaché une grande importance.

XXXII l'HKKACK.

Aucune mesure n'est certaine, mille opérations successives donnent mille résultats différents. Non que Tobserva- Icur, de mieux en mieux instruit, corrige ses défauts et s'avance vers la perfection. 11 n'en va pas ainsi. Les derniers résultats ne ressemblent en rien à une limite dont on s'approcherait par continuel progrés ; les évaluations, tantôt trop petites, tantôt trop grandes, se succèdent en confusion et sans ordre comme des boules blanches oii noires puisées dans une urne.

Bessel, après un siècle écoulé, comparait les observations de Bradley aux résultats connus d'une théorie devenue certaine. En classant les différences, dont le désordre est complet, il trouva, sur 4;^^ observations, 94 erreurs inférieures à 17, de seconde, 88 comprises entre -^ et -f^, puis, successivement, entre f^ et ^, entre -^^ et ^, ..., jusqu'à i", la plus grande des erreurs commises par Bradley, les nombres décroissants 78, 58, 5y, 36, 26, 1 4, 10 , 7 et 8. Si les phis petits sont les plus nombreux, l'honneur n'en revient ni à ce grand observateur Bradley, ni aux constructeurs des instruments de Greenvsich ; leur excellence fait la petitesse, non la loi des erreurs ; un instrument médiocre, un observateur moins soigneux, remplaceraient les dixièmes de seconde par des secondes, les secondes peut-être par des minutes ; à cela près

tout resterait pareil. La courbe des erreurs en s'élevant conserverait la même forme.

L'origine des erreurs est très diverse. Les unes sont fortuites, lenchaînement en est infmi ; c'est tantôt l'air agité par le vent, tantôt un ébranlement du sol, un nuage qui passe, un rayon de soleil qui trouble l'observateur, tantôt

une attention précipitée ou distraite ; le hasard décide, mille causes imprévues se réunissent, ajoutent quelquefois leurs efléts, quelquefois les retranchent, suspendent ou reprennent leur action : tout est incertain, tout change, sans inclination dans aucun sens.

Il n'en va pas ainsi des causes permanentes ; c'est une balance mal construite, les tîls d'une lunette mal placés, un mètre trop court, un chronomètre trop rapide. Les mesures prises sous de telles influences n'entourent plus la valeur exacte, mais une autre, souvent fort diflerente ; une nouvelle série de mesures, sous l'influence permanente des mêmes causes, se groupera autour de la même moyenne.

Tout observateur soigneux étudie les erreurs constantes et les corrige sans retrancher la cause ; rien ne trompe moins qu'une balance trompeuse. (Qu'importe que les bras soient inégaux, pourvu qu'on le sache? (^irun gramme ait 999 mdligrammes, un décimètre 99 millimètres, l'observation réduite conserve toute sa valeur. Toute mesure est comparable à un jeu: les erreurs possibles en plus ou en moins sont les chances de gain ou de perte; les erreurs constantes changent les règles du jeu, les erreurs fortuites laissent le jeu équitable.

La loi que doivent suivre, d'après une ingénieuse théorie, et que suivent à très peu près, quand elles sont nombreuses, les erreurs corrigées de toute inclination fixe, a été proposée par Gauss. L'histoire en est singulière. En proposant en US09 une hypothèse sur la théorie des erreurs, l'iUustre auteur ne prétendait nullement établir la vérité, mais la chercher. Laplace, par une voie différente, sans beaucoup de rigueur à son tour, avait obtenu la même formule qui, très voisine souvent de la vérité, pourrait s'en éloigner sans démentir la Science.

XXXIV PRÉFACE

Le principe de Gauss est fort simple : quand une grandeur a été mesurée plusieurs fois, les erreurs constantes étant écartées (la précaution est nécessaire), entre plusieurs résultats également dignes de confiance, la moyenne est, en l'absence de tout autre renseignement, la valeur la plus probable. Les conséquences de cet axiome sont belles et impré vues, mais incertaines; Gauss en convient volontiers. Le rapprochement des observations peut affaiblir la confiance en quelques-unes d'elles. Si quatre pesées successives ont donné 20'"«, puis 27'"^ 26'"« et 28'"^ on se décidera sans doute, quelles que soient les circonstances, à écarter la première mesure pour adopter la moyenne des suivantes. Quoi (ju'il en soit, Gauss, sur ce fondement, établit ingénieusement une formule que l'expérience confirme. Le hasard, quand les épreuves sont nombreuses, amenant cluHpie événement en raison de sa probabilité, il suffit, pour juger la formule, de faire mesurer un grand nombre de fois une grandeur que l'on connaît très exactement à l'avance.

La probabiUté des erreurs suit, d'après la formule, précisément la loi des écarts dans les épreuves répétées. La rencontre n'est pas fortuite, Laplace l'a expliquée. Les erreurs constantes étant écartées, les accidents fortuits troublent seuls chaque épreuve, ils sont analogues aux tirages faits dans une urne. Laplace développe ce rapprochement, le rend précis, transforme le problème, et retrouve la formule

de Gauss.

Cette admirable et très simple formule s'étend à toutes les grandeurs, s'applique à tous les instruments, régit toutes les observations et embrasse tous les procédés de mesure; les différences, d'un cas à l'autre, si grandes qu'elles puissent être, se résument dans un nombre caractéristique représentant la précision, V erreur probable, le poids de V observa-

tion; peu importe le nom, un seul nombre connu permet de calculer toutes les chances et de prédire, sur un grand nombre d'épreuves, la distribution certaine des écarts.

Si Ton caractérise une série de mesures par Verreur probable (pi'il y a chance d'atteindre ou de ne pas atteindre, en prenant cette erreur pour unité, la probabilité d'une erreur double ditîère peu de f^, celle d'une erreur quintuple s'abaisse à 7^; pour une erreur di\ fois plus f^rande que l'erreur probable, le nombre donné par la formule vaut une déclaration d'impossibilité.

L'instrument, il ne faut pas l'oublier, est, aussi bien que l'observateur, supposé sans défaut ; on n'accepte en lui que des dé-

faillances, des accidents fortuits qu'aucune cause constante n'incline dans aucun sens.

Les épreuves du tir, soit au canon, soit à la carabine, mettent en évidence les effets du hasard; les erreurs fortuites ont pour origine, outre le coup doMl plus ou moins juste et les distractions du pointeur, le poids variable du projectile, les inégalités de sa structure, le tassement irrégulier de la poudre, les courants, les vibrations, l'humidité des couches d'air traversées ; c'est pour cela que, sans changer en rien les conditions du tir, on voit les coups s'écarter les uns des autres, en se groupant autour d'un point central, autour du but lui-même, si les erreurs constantes sont écartées.

Un savant professeur, ^L Jauiïret, a défini, par une image fort nette, les lois de distribution des coups, identiques, d'après le théorème de Bernoulli, à celles des probabilités. Si, visant pendant un long temps un môme but placé sur le sol, on arrête chaque boulet au point même de sa chute, l'amas des projectiles présentera l'aspect d'une cloche dont la base circulaire aurait le but pour centre; un tireur plus

adroit rétrécirait la cloche et la rendrait plus haute ; une moindre précision donnerait naissance à un solide moins élevé, s'abaissant plus lentement vers le sol.

N'est-il pas merveilleux et presque incroyable qu'on puisse, par le raisonnement seul, prédire ainsi la disposition des boulets

sans connaître l'adresse du pointeur ni demander la précision de l'arme ?

Les formules, a dit Poinsot, ne donnent que ce qu'on y a mis. Aucun raisonnement ne fait davantage; le dernier anneau d'une chaîne de déductions est, pour qui sait Ty voir, tout entier dans les hypothèses. Nous avons expressément supposé, il ne faut pas l'oublier, qu'il n'existe dans l'arme ni dans la maladresse du pointeur aucune cause d'erreur constante ; il n'y a donc pas plus de chance, c'est l'hypothèse même, de tirer à droite plutôt qu'à gauche, trop près plutôt que trop loin. Faut-il s'étonner que le but se trouve au centre des divers points atteints dans une longue série d'épreuves? Si plus de la moitié se trouvait à droite, on en conclurait qu'une cause les y porte, et ce serait une erreur constante.

Un doute peut s'élever encore. Les erreurs constantes sont celles que l'on peut corriger, la maladresse est une cause fortuite, un tireur maladroit atteint bien rarement le but ; au lieu de le cacher sous le sommet d'un dôme de projectiles, ne le laisserait-il pas au centre d'un grand vide? Diogène pensait ainsi : « Un jour, voulant s'esbattre, il visita les archers qui tiroient à la butte ; entre iceux, un étoit tant fautier, impérit et maladroit, que lorsqu'il estoit en ranc de tirer, tout le peuple spectateur s'escartoit de peur d'être par lui féru. Diogènes l'avoit un coup vu si perversement tirer, que la flesche tomba plus d'un trabut loin de la butte ; au second coup, le peuple, loin de côté et d'autre, s'escar-

tant, il accourut et se tint en pied, jouxte le blanc, affirmant cetuy lieu être le plus sur et que rarchcr fériroit tout autre lieu, le blanc seul être en seureté de traict. » La plaisanterie fit rire. Il n'auiait pas fallu recommencer souvent; les gouttes d'eau, guidées par le hasard, n'épargnent à la longue aucun pavé. Pourquoi les projectiles, non moins nombreux, c'est l'hypothèse, éviteraient-ils le point vers lequel, adroitement ou non, on s'étudie à les diriger tous?

Dans la formule de probabilité des erreurs, la rigueur, nous l'avons avoué, n'a pas été mise ; l'axiome supposé est loin d'être évident; les conséquences sont comme lui discutables. Dans les concours de tir à la carabine, chaque tireur ayant droit à un certain nombre de balles, on décide du mérite de chacun par la distance moyenne de ses balles au but. La théorie consultée prescrirait une autre règle : la plus petite moyenne du carré des écarts caractérise mieux le plus adroit. La décision, je crois, a été prise pour l'armée belge. Le changement est de petite conséquence, et sur un grand nombre d'épreuves toutes les méthodes s'accorderaient ; toutes deux, la seconde surtout, traitent trop sévèrement le tireur, si adroit qu'il se soit montré, dont un coup s'est égaré des autres. Supposons, pour donner des chiffres simples, qu'un tireur ayant placé neuf balles à la distance moyenne i (lu but, la dixième s'en écarte à la distance lo. D'après la première règle, la moyenne générale étant 1,9, il sera préféré à celui dont toutes les balles seraient à la distance 2 ; cela parait juste. La seconde règle, celle qui s'appuie sur la loi de probabilité des écarts, placerait avant lui le tireur dont toutes les balles seraient à la distance 3. Peut-être vaudrait-il mieux, sans tant raffiner, s'en tenir à la

vieille méthode, qui réserve le prix à qui le plus souvent touche la mouche, sans rechercher l'écart des balles moins heureuses.

T.a formule de Gauss déclare, pour ainsi parler, certains cas impossibles. N'invite-t-elle pas par là, quand ils se présentent, à se défier un peu d'elle? Les cas exceptionnels échappent à toute règle. Le bon sens ne perd jamais ses droits : opposer à l'évidence une formule démontrée, c'est à peu près comme si, pour refuser à un homme le droit de vivre, on alléguait devant lui un acte de décès authentique.

La moyenne d'un grand nombre de mesures, quand on écarte les erreurs constantes, est une mesure plus précise <[ue celles qui l'ont fournie ; l'erreur probable est diminuée, et la précision augmente comme la racine carrée du nombre des épreuves.

Fourier connaissait ou soupçonnait cette règle : pour prendre la hauteur de la pyramide de Ghéops, il fit simplement mesurer par des soldats les ?.03 marches de ce gigantesque escalier. « Vos hommes manquent d'habitude, disaiton ; les surfaces sont irrégulières, les arêtes sont inclinées ; aucune précision n'est possible, et l'erreur commise sur chaque marche sera multipliée par 203. — l'allé le sera par i\ seulement, répondit-il résolument, car \f\ est la racine carrée de 203. » La comparaison avec une mesure plus exacte aurait pu le contredire ; on ne la lit |)as.

Entre les grandeurs inconnues enchaînées par les formules, la Science, dans chaque problème, choisit pour la déterminer directement la plus accessible aux mesures. Pour peser l'obélisque il n'existe pas de balance; une chaîne d'arpenteur donnerait très lentement et très mal la distance de Paiis à Rome. La théorie fournit des équations, on les accepte toutes, chacune est irrépro-

chable; l'Algèbre dégage les inconnues; les chifires malheureusement se contredisent toujours. Que doit-on faire? Entre des mesures discordantes on prend la moyenne; pour des équations, ce mot n'a pas

de sens; à chacune, cependant, il faut un rôle; la méthode des moindres carres enseigne et prescrit la meilleure com-

jjinaison.

Cette méthode, inventée par Gauss, proposée pour la première fois par Legendre, a procuré plus d'une déception.

La masse de Jupiter, déduite par Newton de l'étude des t«atellites, corrigée peu à peu par les progrès des observateurs, calculée de nouveau par Bouvard à l'aide des perturbations de Saturne, semblait fixée à 7^ de celle du Soleil. Les principes du calcul des chances penne tlaicnt de parier, suivant Laplace, 999 3o8 contre 1 que Terreur n'est pas la centième partie de la valeur trouvée. Quelle ostentation de consciencieux savoir! C'est 99() 3o8"-, ni plus ni moins, (pie Ton peut risquer contre i"". On aurait eu tort de riscjuer dix sous; on les aurait perdus; les perturbations de Junon Tout prouvé. Sans contester ce témoignage irréprochable de la petite planète. Poisson maintenait les principes. « Les calculs de Laplace, dit-il, ont donné, avec une])récision voisine de la certitude, une masse plus petite qu'elle n'est réellement. Cela ne provient d'aucune inexactitude dans les formules dont il a fait usage; il y a lieu de croire que la masse de Jupiter, un peu trop petite, résulte de quelques termes fautifs dans l'expression des perturbations. » Poinsot, son s[)irituel adversaire, pour transformer l'apologie en épigrainme, ne change rien

au trait que l'accent : « Après avoir calculé la probabihté d'une erreur, il faudrait calculer la probabilité d'une erreur dans le calcul. »

Peut-on, par des combinaisons habiles, s'assurer sur les résultats d'observations imparfaites, puisées à des sources douteuses? On le peut, répond la théorie, pourvu qu'on n'ait pas à craindre d'erreurs constantes. Le calcul échouera, répond le i)on sens. Les deux réponses sont d'accord.

XL PRÉFACE

Lorsqu'on 17G1, après soixante-dix années d'attente, les astronomes de tous les pays distribuèrent sur la portion du globe désignée par Halley plus de cent observateurs du passage de Vénus, — la crainte du mauvais temps et Témulation du zèle pour la Science en accrurent ainsi le nombre, — on croyait la méthode infaillible, et deux observateurs soigneux, Halley l'avait prouvé, pouvaient sans aucun associé donner la parallaxe exacte au centième de seconde. Go observations, au lieu de 2, faisaient espérer par leurs combinaisons 1770 déterminations identiques. La déception fut grande; les résultats variaient entre 7" et 11". En combinant i5 observations européennes avec celle du Cap de Bonne-Espérance, Short trouva une moyenne de 8", 47. L'observation de Tobolsk, combinée avec i5 autres, donnait 9% 56 ; en en supprimant 4, il restait 8 ",69. Ces 4 observations, 2 de Stockholm et 2 de Tornéa, comparées à celle de Tobolsk, auraient donné plus de 1 \". L'opération était à refaire. Rien ne fut épargné en i7(k), le succès fut pareil. En combinant les observations sans règle et

sans méthode, les calculateurs du xviii'^ siècle n'en purent montrer que l'incertitude. Encke, en 1822, voulut reprendre dans leur ensemble les résultats des deux expéditions, et, par un prodigieux travail, appliquant dans toutes ses prescriptions la méthode des moindres carrés, il obtint 8", 6776. L'erreur probable était 0",0370.

Cette expression à' erreur probable exige une explication : l'erreur probable est celle qu'il y a chance égale d'atteindre ou de ne pas atteindre; de celle-là, nous l'avons dit, on déduit toutes les autres. Contre une erreur huit fois plus grande il n'y a pas, dit la théorie, i chance sur i milhon. C'est justement celle-là qui s'est produite. La parallaxe, aujourd'hui bien connue, surpasse le résultat d' Encke de huit fois son erreur probable. Tous ces calculs devaient être

stériles, rien ne garantissait contre les causes constantes, et le nombre des observations douteuses n'était pas assez grand pour assurer une compensation.

Tout semblait débattu sur les universaux, et tout oublié. M. Quetelet, sans réveiller ce vieux problème, a cru sérieusement le résoudre, et, dans un livre riche de laits judicieusement recueillis, a voulu définir et préciser le mot homme indépendamment des hommes particuliers considérés comme accidents. Sans discussion ni subtilités, le patient auteur attribue à son type, par définition, la moyenne de chaque élément variable d'un homme à l'autre. En relevant, par exemple, les tailles de 20 000 soldats, on a trouvé pour moyenne i'°,7'); telle est la taille de l'homme moyen; autour d'elle, dans la série des mesures, se groupent les

tailles plus grandes ou plus petites, exacteuieut graduées suivant la loi des écarts. Rien ne distingue les tailles des conscrits des mesures qu'un observateur très maladroit aurait prises 20000 fois de suite sur un même homme de i"',75, avec des instruments bien grossiers, il faut le supposer, mais corrigés de toute erreur constante.

M. Quetelet, dans ce rapprochement, voit une identité; nos tailles inégales sont pour lui le résultat des mesures très mal prises par la nature sur un modèle immuable, qui, seul, révèle tout son savoir. i"',75 est la taille normale; pour avoir un peu plus, on n'en est pas moins homme, mais ce qui manque ou dépasse pour chacun est erreur de nature et monstruosité.

Abailard, si habile à raisonner des choses, aurait réduit

l'argument en forme, mais on ne remue plus de telles subtilités. M. Quetelet, sur ce vieux champ de bataille des écoles, n'a rencontré ni défenseurs ni adversaires,

La thèse a cependant plus d'un inconvénient. L'homme idéal, dit-on, représente en toute chose la moyenne de l'humanité. Cela paraît très simple et très clair, mais ces détails, définis par règle et par compas, comment s'ajustent-ils? La hauteur de la tête, par exemple, pourra, pour l'homme moyen, se calculer par deux méthodes : on peut prendre la moyenne des longueurs, ou, pour chaque individu, le rapport de la tête à la hauteur du corps, puis la moyenne de ces rapports. Les résultats sont différents : comment les accorder?

Grave difficulté et inévitable écucil! Pour le montrer avec évidence, cherchons entre deux sphères la sphère moyenne; l'une a pour rayon i; nous choisirons les unités de manière à représenter

également la surface et le volume par i. La seconde sphère a, je suppose, poui" rayon 3, pour surface 9 et pour voUime 27; ces chiffres sont forcés. Les moyennes 2, 5 et 1 4 sont incompatibles; une sphère de rayon 2 aurait pour surface 4 et pour volume 8 très exactement; aucune concession n'est possible, nulle sphère n'est difforme. Un homme malheureusement peut l'être, et M. Quetelet en profite; en associant le poids moyen de 20000 conscrits à leur hauteur moyenne, on fera l'homme type ridiculement gros et, quoi qu'en ait pensé Reynolds, un mauvais modèle pour un peintre. Cet artiste éminent, dans ses leçons sur les Beaux-Arts, avait, avant Quetelet, signalé dans l'homme moyen le type de la beauté parfaite. Si tel était le cas, a dit Sir John Herschel, la laideur serait l'exception. Je n'en aperçois pas la raison. Aucun trait de la beauté parfaite ne serait rare; distribués sans convenance, ils seraient sans mé-

rite. L'harmonie fait la grâce. Le hasard appellerait sans doute peu d'élus, et, n'en déplaise à Sir John Herschel, dans les assemblages incohérents, si la laideur formait l'exception, le grotesque deviendrait la règle.

Dans le corps de Thomme moyen, l'auteur belge place une âme moyenne. Il faut, pour résumer les qualités morales, fondre vingt mille caractères en un seul. L'homme type sera donc sans passions et sans vices, ni fou ni sage, ni ignorant ni savant, souvent assoupi : c'est la moyenne entre la veille et le sommeil; ne répondant ni oui ni non; médiocre en tout. Après avoir mangé pendant trente-huit ans la ration moyenne d\m soldat bien portant, il mourrait, non de vieillesse, mais d'une maladie moyenne que la Statisti(jue révélerait pour lui.

L'apphcation du calcul aux décisions judiciaires est, dit Stuart Mill, le scandale des >Lithématiques. L'accusation est injuste. On peut peser du cuivre et le donner pour or, la balance reste sans reproche. Dans leurs travaux sur la théorie des jugements, Condorcet, Laplace et Poisson n'ont pesé que du cuivre.

La réunion, quelle qu'elle soit, qui peut juger bien ou mal, est remplacée dans leurs études par des urnes où l'on puise des boules blanches ou noires. « On peut, dans plusieurs cas, - a dit Laplace, le plus grand des trois, le moins imprudent, et incomparable aux deux autres, — résoudre des questions qui ont beaucoup d'analogie avec les questions qu'on se propose, et dont les solutions peuvent être regardées comme des approximations propres à nous guider et

^^ï^ PRKFACK.

à nous garantir des erreurs et des dangers auxquels les mauvais raisonnements nous exposent. Une approximation bien conduite est toujours préférable aux raisonnements les plus spécieux. »

Rien n'est plus sage : les lionnes approximations valent mieux que les mauvais raisonnements: mais il n'v a, malgré cela, moyen ni apparence de les réduire en acte pour rendre la justice meilleure que les juges. On peut assurément supposer le nombre des boules noires égal à celui des jugements mal rendus, les deux problèmes n'en restent pas moins fort différents et, pour tout dire, sans analogie.

Un juge, supposons-le, se trompe une fois sur dix. Condorcet et Poisson l'assimilent à une urne contenant 9 boules blancbes et 1 noire. Le sort des accusés resterait-il le même?

Sur 1000 épreuves, la boule noire sortira 100 fois, tout comme, sur 1000 jugements, 100 seront mal rendus. Les nombres se ressemblent, tout le reste diffère. Quand un juge se trompe, c'est que le cas sans doute est complexe et ardu. On condamne à coup sûr le coupable qui avoue, on acquitte en hésitant celui que l'on n'a pu convaincre; les 100 boules noires de l'urne se montreront le môme nombre de fois, mais tout autrement. Condorcet répondrait peut-être que pour la société, qui seule l'intéresse, le dommage et l'alarme resteraient les mêmes et qu'ils dépendent du nombre des crimes impunis et des innocents déclarés coupables. Mais une autre objection est sans réplique : l'indépendance des tirages est supposée; les urnes, dans les calculs, échappent à toute influence commune. Les juges, au contraire, s'éclairent les uns les autres, les mêmes faits les instruisent, les mêmes témoignages les troublent, les mêmes solHcitations les tourmentent, la même éloquence les égare, c'est sur les

mêmes considérants qu'ils font reposer la vérité ou l'erreur, l /assimilation est impossible.

« Condorcet a pris possession de l'univers moral pour le soumettre au calcul. » C'est la louange qu'on lui a donnée; on s'est demandé si c'est après l'avoir lu. Dans son Livre sur La probabilité des jugements, il se propose d'abord deux problèmes. Premièrement : Quel est, pour chacjue jugement et pour chaque juge, la probabilité de rencontrer juste? En second lieu : Quelle est la probabilité d'erreur à laquelle la société peut se résigner sans alarmes?

La première question lui semble facile.

« Je suppose, dit Condorcet, que l'on ait choisi un nombre d'hommes véritablement éclairés et cju'ils prononcent sur la vérité ou sur la fausseté de la décision. Si, parmi les décisions de ce tribunal d'examen, on n'a égard qu'à celles qui ont obtenu une certaine pluralité, il est aisé de voir qu'on peut, sans erreur sensible, les regarder comme certaines. »

C'est un concile infaillible, tout simplement, qu'il définit et prétend convoquer. Sans douter, il hésite; non que les hommes véritablement éclairés soient rares, gardons-nous de le croire, mais leur temps est précieux; pour l'épargner, Condorcet propose une seconde méthode dont Poisson, plus tard, n'a pas aperçu l'illusion. La probabilité d'erreur étant supposée pour un juré, on peut, en augmentant leur nombre, la diminuer sans limite })our l'ensemble. L'instrument est trouvé, on n"a plus qu'à choisir. « Que l'on compte, dit Condorcet, combien il périt de paquebots sur le nombre de ceux qui vont de Calais à Douvres, et qu'on n'ait égard qu'à ceux qui sont partis par un temps regardé comme bon par les hommes instruits dans la navigation. Il est clair qu'on aura, par ce moyen, la valeur d'un risque que, pour les autres comme pour soi, on peut négliger sans imprudence. »

Préfère-t-on le danger de périr au Pont-Saint-Esprit, quand on descend le Rhône de Lyon à Avignon? Les honnêtes gens s'y exposent sans frayeur. Veut-on, pour le faire court, la probabilité ^ ,^ ^ '. ,. ^ ? Il ne faut que dire oui. Je n'invente ni n'exagère. Dans une assemblée de 65 votants, on exigera la majorité de 9 voix. Deux conditions seulement sont supposées : chaque juge, isolément, ne doit se tromper qu'une fois sur cinq. En jugeant la

même cause, le raisonnement proposé le suppose, ils ne doivent pas non plus être exposés aux mêmes chances d'erreurs.

Lorscpie, 8 ans plus tard, Condorcet préférait le poison à une justice suspecte, s'il eût pu s'assurer en des juges courageux et honnêtes, il n'en aurait pas exigé 65.

Laplace aborde très modestement le problème des jugements : » La probabilité des décisions d'une assemblée dépend, dit-il, de la pluralité des voix, des lumières et de l'impartialité des juges. Tant de passions et d'intérêts particuliers mêlent si souvent leur influence qu'il est impossible de soumettre le résultat au Calcul des probabilités. » Il Fy soumet pourtant, et Poisson, en fondant, dans son Livre, sur des principes certains, des applications à peine douteuses, a cru suivre son illustre exemple. Laplace cherche d'abord, pour les assemblées, le meilleur système de vote. Il est rare que l'on puisse, en répondant oui ou non, exprimer toute son opinion. Plusieurs propositions, presque toujours, sont relatives aux mêmes oi)jets. Le calcul, suivant Laplace, ne conseille pas de les mettre aux voix successivement. Voici ce qu'il faut faire : chaque votant recevra un nombre illimité de boules, et l'on passera, pour recueiUir les votes, autant d'urnes qu'il y a d'opinions en présence, en invitant chaque votant à verser dans chaque urne un nombre de boules proportionnel à la probabilité qu'il attribue à la proposition

correspondante. Docile à la théorie du probabilisme, chacun résistera à la tentation de verser sa provision tout entière dans Turne favorable à l'opinion qui lui agrée le plus.

Les assemblées n'ont pas tenté l'épreuve; elles cherchent le sûr, comme Pascal, le probable ne leur suffit pas.

Laplace, reprenant une idée de Condorcet, cherche dans le compte des votes concordants ou discordants des divers juges la chance qu'ils ont de prononcer juste. Se séparant pourtant de Condorcet sur un point de grande importance, il fait varier cette probabilité d'une cause à Tautre, mais la fait, dans chaque cause, égale pour tous les juges; la seule donnée introduite est le nombre des juges favorables à chaque opinion. Si un jury de douze nègres prononce sur le vol d'une banane, la probabilité de bien juger sera, d'après la formule, précisément la même, à majorité égale, que pour douze conseillers à la Cour de cassation décidant une question de droit.

La probabilité, dans les calculs de Poisson, reste la même pour toutes les causes; il n'ignore pas (|u'elle peut varier, mais il croit obtenir, sans doute, une de ces approximations bien conduites dont parle Laplace.

Une urne contient des boules noires ou blanches; la proportion est inconnue; il suffira, pour la découvrir, de faire un grand nombre de tirages. Le rapport du nombre des boules blanches sorties au nombre total des tirages fera connaître leur proportion dans l'urne. La vérité, malheureusement, aussi différente de l'erreur que la couleur blanche l'est de la noire, ne s'en distingue pas si facilement.

Supposons, en second lieu, deux urnes en présence. On

ignore la proportion des boules noires ou blanches, et, à

chaque tirage, on fait connaître, non la couleur des boules,

mais leur accord seulement ou leur désaccord. On ne pourra

par de telles épreuves, si souvent qu'elles soient répétées, déterminer la composition des urnes, mais seulement renfermer le doute dans des limites plus ou moins étroites.

En consultant trois urnes au lieu de deux, le problème se résout exactement. Si, tirant une boule de cbacune, on sait quelles urnes s'accordent à donner même couleur, l'épreuve, suffisamment répétée, fera connaître, avec telle probabilité qu'on voudra, la composition des trois urnes, sans distinguer toutefois les cas où les noires seraient cbangées en blancbes, et réciproquement.

Poisson et Cournot substituent aux trois urnes les trois juges d'un même tribunal. Si Pierre, Paul et Jacques prononcent sur un grand nombre d'affaires, on pourra, sans savoir si leurs décisions sont justes ou injustes, connaître leurs différences d'opinion. La formule qui révèle les boules blancbes des urnes s'appliquera aux cbances de bien juger, en repoussant toutefois, pour cliaque magistrat, la probabilité de se tromper plus d'une fois sur deux. Mieux vaudrait sans cela, après avoir vu, lu, relu, paperasse et feuilleté les pièces du procès, jouer, comme faisait Bridoye, la sentence à trois dés.

Les deux problèmes assimilés par Poisson sont, en réalité, très différents. Si Pierre et Paul s'accordent souvent contre Jacques, il peut se faire qu'ils aient, sur certains cas douteux, une opinion pareille et que, en la repoussant, Jacques comprenne mieux la loi. Peut-être Pierre et Paul montrent-ils pour certains plaideurs une même indulgence, pour d'autres une égale rigueur. Pour être plus éclairé, plus droit, plus impartial, Jacques alors serait diffamé par la formule. Si Paul, quand un de ses collègues a opiné le

premier, n'a pas la hardiesse de le contredire, la formule y verra une preuve de son mérite. Est-elle digne de confiance? Sans s'arrêter à

des difficultés aussi visibles, Poisson n'a pas craint d'assigner, pour un juré pris au hasard, la probabilité de décider juste. D'après l'ensemble des documents interprétés par ses calculs, chaque juré, en France, se trompe une fois sur trois. C'est beaucoup : Condorcet n'en demanderait pas davantage. Quelques centaines de ces jurés sans lumières lui suffiraient pour promettre, au nom de la Science, aux accusés innocents toute la sécurité d'un joyeux touriste qui, par un temps serein, s'embarque sur une mer sans écueils.

L'action libre des êtres humains, celle aussi des animaux, quoi qu'en ait dit Descartes, mêle à l'enchaînement des etTets et des causes un élément inaccessible au calcul. La liberté du choix produit, à parler rigoureusement, les seuls cas fortuits.

Les lois du hasard étendent plus loin leur domaine. Un homme agite un cornet, lance les dés, doucement ou avec force, à droite ou à gauche, use sans contrainte de son hbre arbitre; il amène sonnez i fois sur 3G.

On substitue au bras de chair des organes de cuivre et d'acier. Une machine jette les dés, les ramasse, les lance encore, mue par la force aveugle d'un ressort entretenue par d'autres ressorts. Tout est déterminé; un géomètre calcule à l'avance la succession des points. La formule donne sonnez \ fois sur 3G.

Tous les soldats d'une nombreuse ai-mée sont appelés tour à tour à dire un nombre moindre que 7, le premier venu. Dans leurs réponses, inscrites deux par deux, on rencontre deux G I fois sur 3G.

L PRÉFACE

D'où vient cela? Les lois du hasard gênent-elles la liberté des efforts musculaires? règlent-elles l'ordonnance d'un mécanisme aveugle? troublent-elles le caprice de looooo imaginations qui les ignorent? Il n'en est pas ainsi. Si l'on influence la volonté de ces hommes; si le mécanicien, rebelle à la loi de BernouUi, prend plaisir à la mettre en défaut; si le joueur de dés s'y applique avec ou sans adresse, toutes nos assertions seront fausses. A tout effort le hasard est docile; sans souci de la règle, il suit les gros bataillons.

Le hasard est sans vertu : impuissant dans les grandes affaires, il ne trouble que les petites. Mais, pour conduire les faits de nature à une fin assurée et précise, il est, au milieu des agitations et des variétés infinies, le meilleur et le ' plus simple des mécanismes. Les vapeurs s'élèvent, les vésicules se forment, les nuées s'épaississent, les vents les dispersent, les mêlent, les entre-choquent, engendrent la tempête et la pluie; le hasard conduit tout sans surveillance ni délibération aucune, et, précisément parce qu'il est aveugle, il remplit le lit de tous les fleuves, arrose toutes les campagnes et donne à chaque brin d'herbe sa ration nécessaire de gouttes d'eau.

CHAPITRE I

ÉXLMÉRATIOX DES CHANCES.

1. Définition de la probabilité. L'égalité des ciiances est supposée dans la définition. — 2. Exemple d'une énumération incorrecte. — 3. Autre exemple. — 4. Le nombre des cas ne doit pas être infini. Contradiction résultant de l'oubli de cette condition. — 5. Deuxième exemple. — G. Troisième exemple. — 7. Quatrième exemple. — 8, 9, 10, II, 12, 13. Solution de quelques problèmes par l'énumération des chances. — 14. Prétendu paradoxe du chevalier de Méré. — 15. Combien faut-il tenter de coups pour obtenir une probabilité donnée de produire au moins une fois un événement dont la probabilité est connue? — IG. Problème du jeu de rencontre. — 17. Problème relatif aux tirages de boules numérotées sans les remettre après chaque tirage. — 18. Problème relatif au dépouillement d'un scrutin de ballottage. — 19. Une urne contient des boules numérotées, quelle est la probabilité pour que sur n tirages la somme des points tirés ait une valeur donnée. — 20, 21. .\pplicalion au cas de trois dés.. i-^S

PROBABILITÉS TOTALES ET PROBABILITÉS CO.MPOSÉES

22. Les solutions de problèmes isolés ne font pas une théorie. — 23. Théorème des probabilités totales. — 24. Probabilités composées. — 25. Cas où le premier événement influe sur la probabilité du second. — 26. Le? théorèmes ne sont démontrés que dans les cas pour lesquels la probabilité est définie; on complète les défi-

nitions. Les théorèmes deviennent généraux. — 27. Erreur commise dans la théorie du tir à la cible. — 28. Erreur commise dans la tliéorie des gaz. — 29. Erreur commise dans l'appréciation des pronostics sur le temps. — 30. Problème relatif aux tirages faits dans une urne. Fausseté d'un raisonnement en apparence très plausible. — 31. Probabilité du brelan au jeu de la bouillotte. — 32. .\vantage du

LU CALCUL DKS PHOBABILITES.

Pastes.

banquier au jeu de trente-et-quarante. — 33. Études sur le jeu du baccarat. — 34. 35. Problème de la poule 2'{-48

ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

3G. Définition de l'espérance mathématique. — 37. Assertion exagérée de Poisson. — 38. La recherclie de l'espérance mathématique et celle de la probabilité sont deux problèmes distincts. — 39. Exemple de la simplification d'un problème par la recherche directe de l'espérance mathématique. — 40. Deuxième exemple. — 41. Troisième exemple. — 42. Quatrième exemple dans lequel la recherche de l'espérance mathématique fait connaître la probabilité. — 43. Calcul d'une espérance mathématique déduite des probabilités des divers cas possibles. — 44. Problème sur le jeu de dés. — 45. Discussion de la formule obtenue. — 46. La valeur probable d'une fonction n'est pas déterminée par celle des grandeurs dont elle dépend. — 47. Exception relative aux sommes et aux produits quand les facteurs sont indépen-

dants. — 48. Paradoxe de Saint-Pétersbourg. — 49. Insuffisance des explications proposées par Condorcet et par Poisson.

— 50. La réponse du calcul est parfaitement raisonnable et n'a besoin d'aucune justification. — 51, 52. Insignifiance de l'explication proposée par Daniel Bernoulli et devenue célèbre sous le nom de théorie de Vespérance morale 40-G7

THÉORÈME DE JACQUES BERNOUI.LI

53. Régularité observée des résultats du hasard. — 5i. Probabilité des épreuves répétées. — 55. Événements dont la probabilité est maximum.

— 5G. Valeur approchée du produit i.2.3.../i. — 57. Probabilité maxima dans une série d'épreuves. — 58. Probabilité d'un événement peu différent du plus probable. — 59. Fiction d'un écart représenté par une variable continue. — 60. Première vérification. — 61. Deuxième vérification. — 62. Calcul exact de la valeur probable du carré de l'écart; elle ne diffère pas de la valeur approchée. — 63. Troisième vérification. — 64. Calcul exact de la valeur probable de l'écart, elle n'est pas égale à la valeur approchée. — 65. La probabilité pour que l'écart soit inférieur à une limite donnée est donnée par une intégrale que l'on a réduite en Table.

— 66. La probabilité d'un écart absolu inféiieur à une limite {\\(t tend vers zéro; quand le nombre des épreuves augmente, c'est l'écart relatif qui tend vers zéro. — 67. La probabilité d'un écart a, sur ti épreuves, dépend

tie — - : exemples numériques. — 68. Ecart probable et écart moyen; leur

slv-

rapport. — 69. Représentation du nombre probable d'arrivées en introduisant un facteur dont la valeur détermine la confiance méritée par la formule. — 70. Ce qu'on doit entendre par jouer jdus ou moins gros jeu, expression de laquelle dépendent les chances de perte sur un grand

TABLK DES MATIERES. LUI

Pages.

nombre de parties. — 71. .application du théorème de Bernoulli aux chances électorales. — 72. Différences entre les conditions réelles et les données du problème précédent. — 7.'^. Le théorème de Bernoulli suppose la probabilité d'un événement invariable, il suppose aussi que cette piobabililé ait une valeur objective; remarques sur cette question. — 74, 75. Exemple d'une série d'épreuves faites avec probabilité variable.. GS-qô

DÉMONSTRATIONS ÉLÉMENTAIRES DU THÉORÈME DE BERNOULLI

76. Lorsqu'un événement douteux peut se présenter de plusieurs manières et qu'une certaine grandeur résulte de chaque épreuve,

la valeur probable diiïére de moins en moins de la moyenne des valeurs obtenues. — 77. Application à une série de parties faites à un même jeu de hasard. — 78. Cas où le jeu est équitable, les énoncés se trouvent en défaut. — 79. Épreuves successives de deux événements contraires. — 80. Troisième démonstration du théorème de Bernoulli gd-ioS

LA RUINE DES JOUEURS

81. Lorsqu'un joueur joue indéfiniment à un jeu équitable, sa ruine tôt ou tard est certaine. La proposition semble contradictoire, elle ne l'est pas.

— 82. Lorsque deux joueurs luttent indéfiniment, quelles que soient les conditions du jeu, l'un des deux doit finir par se ruiner. — 83. Calcul numérique. — 84. La perte peut entraîner la ruine avant la fin du nombre convenu de parties. Cela accroît les chances de ruine. — S,"j. Deux manières d'énoncer le problème de la ruine des joueurs. — 86. Cas où Pierre possédant m francs joue indéfiniment à un jeu équitable. — 87. La valeur probable du nombre des parties est infinie. Il n'y a pas contradiction. — 88. Démonstration de l'énoncé précédent. — 89. Calcul des chances de ruine dans un nombre donné de parties. — 90. Exemples numériques. — 91. Cas où deux joueurs ont des fortunes données. Chance de ruine de chacun. — 92. Cas où le jeu n'est pas équitable. — 93. Autre manière d'obtenir le même résultat. — 94. Cas où les deux joueurs ont même fortune et exposent la même mise. — 9"). Probabilité pour qu'un joueur qui joue indéfiniment finisse par se ruiner. Trois cas peuvent se présenter. — 96. Le cas

où la ruine nest pas certaine est celui où le joueur a un avantage. — 97. Exemple numérique. — 98. Probabilité d'être ruiné précisément après un nombre donné de coups. — 99. Valeur approchée de la probabilité. — 100. Probabilité pour que la ruine soit postérieure au [x'*°"> coup.

— 101. Valeur maxiina de la probabilité. — 102. Valeur maxima de la valeur approchée. — 10.3. Valeur probable du nombre des parties jouées avant la ruine de l'un des joueurs. — 104. Cas où le jeu n'est pas équitable. Théorème de M. Houché. — 105. Évidence apparente du théorème.

— 106. Insuffisance de la démonstration. — 107. Réduction du cas où le jeu est équitable au cas général. — 108. Cas où les fortunes sont égales en

Pages commençant le jeu. — 109. Cas où deux joueurs luttant l'un contre l'autre peuvent l'un et l'autre être ruinés. Insuffisance d'un raisonnement qui semble fort simple. — 110. Cas où Pierre et Paul possèdent chacun 2".

— 111. Cas où ils possèdent 3^'. — 112. Cas général. — 113. l'examen d'une combinaison proposée pour accroître les chances de gain lo'j-i^i

PROBABILITÉ DES CAUSES

114. Ce que. dans le Calcul des probabilités, on entend par le mot cause. — 115. Enoncé du problème à résoudre, formule qui en donne la solution.

— 116. Autre démonstration de la formule. — 117. Problème relatif à la composition inconnue d'une urne. — 118, 119. Autre manière de comprendre l'énoncé. — 120. Problème plus général. — 121. Loi approchée des probabilités. — 122. Autre manière de préciser l'énoncé. — 123. Applications incorrectes des résultats précédents. — 124. Discussion d'une expérience de Buffon. — 125. Discussion de la méthode d'approximation adoptée.

— 126. Cas extrême où la conclusion du raisonnement souvent accepté serait évidemment sans valeur. — 127. Mégularilé des naissances masculines et féminines. — 128. Quelle est la régularité dont on serait en droit de s'étonner? — 129. Exemple cité par BufTon. — 130. Exemple cité par Laplace. — 131. Les conditions d'un problème doivent être définies avec détail. — 132, 133. Quelques exemples. — 134. Application faite par Mitchel à la théorie des étoiles doubles. — 133. Probabilité des événements futurs. — 1,30, 137. Applications ridicules de la formule à la probabilité du lever du Soleil i^i-i-A

CHAPITRE VIII

LOI DES ERRELIIS d'oBSERVATION.

138. Postulatum de Gauss. — 139. Autre hypothèse faite implicitement. — 140. Cas dans lequel le postulatum est rigoureusement exact. — 141. Conséquence des suppositions acceptées. — 142. Comparaison du résultat avec une formule connue; accord apparent, mais non réel. — 143. Autres contradictions résultant de la loi admise. — 144. Conséquence d'un autre mode de combinaison des mesures. — 145. L'observation confirme la règle de

Gauss, les erreurs constantes étant écartées. — 146. Méthode de vérification. — 147. Résultats de Bradley discutés par Bessel. — 148. Détermination du paramètre A-; diverses formules. — 149. Vérifications possibles.

— 150. Valeur probable du carré de l'erreur commi.se en adoptant la première formule. — 151. Valeur probable pour la seconde. — 152. Comparaison des deux résultats. — 153. Les formules peuvent être remplacées par d'autres qui sont préférables. — 154. Autre modification accroissant la confiance méritée par la formule. — 155. Autres méthodes pour calculer k.

— 156. Groupement des observations deux par deux; valeur probable de la plus grande erreur. — 157. Autre démonstration du résultat. - 158. Valeur probable du carré de la plus grande des erreurs considérées

TABLE DES MATIERES. LV

Pages.

deu» à deux. — 159. Groupement des erreurs trois par trois. — Distinction nécessaire entre l'erreur véritable et l'erreur présumée. — 160. Cas plus général. — ICI. Discussion de la démonstration précédente. —

162. Expression qui caractérise la précision d'un système de mesures. —

163. Ce qu'on entend par poids et par précision. — 164. Si la loi de probabilité était autre, ces deux mois n'auraient plus de

sens précis. — 165. Kst-il permis d'écarier les mesures rendues suspectes par leur dilTérence avec la moyenne? — IGG. Valeur probable de la plus petite des erreurs commises. — 167. Combinaison d'observations qui n'inspirent pas égale confiance. — 168. Partage d'une grandeur en plusieurs parties mesurées séparément. — 169. Evaluation donnée par Fourier en Egypte.

— 170, 171, 172, 173, 171. Discussion relative à la détermination de la constante k déduite d'un système d'observations 1-5-225

ERREURS DE SITLATION DIX POINT

175. Conliance de Bravais dans la loi élémentaire de la probabilité des erreurs proposée et abandonnée par Guuss. — 176. Conséquence dans le cas où l'erreur sur chaque coordonnée est la résultante de deux erreurs élémentaires. — 177. Formule de Bravais déduite d'un postuiatum. — 178. Détermination du facteur que la tlémonstralion laisse indiHeiminé.

— 179. Probabilité des écarts dans le tir à la cibb'. — 180- Ellipse dans l'intérieur de laquelle il y a probabilité donnée de voir la balle se placer.

— 181. Moyenne probable des valeurs de la constante. — 182, 183. Quelle est la mesure de l'habileté d'un tireur. Difliculté d'une réi)onse précise.

— 184. Vérifications de la formule. — 185. Erreur à craindre sur la moyenne des valeurs de la constante. — 186. Valeur probable du carré de l'erreur commise dans l'évaluation du nombre

des balles intérieures à une certaine ellipse. — 187. Calculs relatifs à looo balles tirées dans

une même cible ... ■ • 226-246

LA THÉORIE DES MOVENNES

188. .\bandon nécessaire de la loi de Gauss. — 1S9. Conditions imposées à la loi inconnue qui devrait la remplacer. — 190. Détermination expérimentale de la partie constante de l'erreur. Evaluation de l'erreur à craindre.

— 191. La moyenne des mesures conver^^e vers la valeur véritable augmentée de l'erreur constante. — 192. Valeur probable de la constante caractéristique désignée par m^. L'évaluation de l'erreur à craindre dépend d'une constante nouvelle. — 193. La constante m} diminue quand on retranche l'erreur constante. — 194. Importance de la valeur de m-\ insuffisance de la formule la plus simple. Correction proposée sans preuve bien satisfaisante. — 195. Observations de mérite inégal. — Poids d'une observation. — 196. Objection de Poisson à la théorie des moyennes. — Cause de l'exception 247-258

LVI CAIXLL DES PKOUABlLlTliS.

CHAPITRE XI

Pages.

197. La théorie des moyeniKs n'est pas applicable, en général, à la détermination sirniilianée do plusieurs grandeurs. — 198. Lorsque plusieurs valeurs d'une même inconnue sont indépendantes, on peut prendre la moyenne en ayant égard à leur poids; premier exemple. — 199. Deuxième exemple. - 200. Troisième exemple. — '20\, 20"2. Problème dans lequel les valeurs d'une même im oniuie ne sont pas indépendantes, résolu en suivant le principe de la démonstiation, dont il faut changer le détail. — 203. Problème général; première solution de Gauss. — 204. En ne faisant, en apparence, aucune hypothèse sur la loi de probabilité, on ne change pas essentiellement les conditions de l'énonce. — 20.). Substitution de la plus petite valeur probable du carré de l'erreur à l'erreur la plus probable. — 206. Lorsque le nombre des équations surpasse celui des inconnues, il existe entre les erreurs des relations nécessaires qui ne sont pas satisfaites. — 207. Expression adoptée pour l'une des inconnues; on rend le carré de la valeur probable de l'erreur minimum. — 208. Les erreurs étant très petites, la solution est la plus générale. — 209. Valeur probable du carré de l'erreur à craindre. — 219. Premier exemple. — 211. Second exemple. — 212. Les valeurs probables des carrés des erreurs commises sont indépendantes de la concordance des résultats: explication de ce paradoxe. — 213. Les formules sont démontrées pour des observations qui ne sont pas encore faites. — 214. On peut se placer à un point de vue très difl'érent: le problème devient insoluble. — Développement sur un exemple. La valeur probable a priori de l'inconnue que Ton veut calculer a posteriori est un élément nécessaire de la solution. — 215. La question appartient à la théorie de la probabilité des causes; faute de l'une des données indispensables, la solution est impossible. — 216. Discussion d'un problème analogue. — 217. Étude

du problème général; les solutions sont en nombre infini. — 218. Premier exemple. — 219. Second exemple. — 220. Evaluation, dans un cas très simple, de l'erreur à craindre en égalant la valeur vraie à la valeur probable. — Calculs numériques. — 221. Théorème des moindres carrés. — 222. Simplification des calculs. — 223. Exemple. — 224. Théorie de Gauss. — 225. Objections de Bienaymé. — 226. Les corrections prescrites par la méthode des moindres carrés sont des fonctions déterminées des erreurs réellement commises. — 227. Expression de la somme des carrés de ces corrections. — 228. Valeur probable de cette somme. — 229. Exemple. — 230. Incertitude de quelques assertions compromettantes pour la théorie • 250-306

TABLE DKS MATIERES. LVII

Pages .

brique du problème à résoudre. — '233. Laplace et Poisson, dans leurs études sur la statistique des naissances, ont négligé cette remarque. — 234. Le tirage dans plusieurs urnes donne, pour une même probabilité moyenne, une valeur plus petite à celle du carré de l'écart. — 235. Influence de l'iuiporlance des sommes assurées sur les chances d'écart de la moyenne. La formule obtenue en supposant les tirages faits dans la même urne n'est pas acceptable. — 236. Loi de mortalité de Gompertz 307-318

CIIAPITUE XIJI.

CHAPITRE I

ÉNUMÉRATION DKS CIIAXGES.

On psliiiic la pi-(jhal)ililé d iiii évcMicnionl par le nombre <le, ca^ favorahlo divise pur le noiiihrc des cas possibles. La diflieulté ne consisii- ijue dans lennniération des cas. Lagrange.

1. Définition de la probabilité. L'égalité des chances est supposée dans la définition. — 2. Exemple d'une énumération incorrecte. — 3. .-VuLre exemple. — 4. Le nombre des cas ne doit pas être infini. Contradiction résultant de l'oubli de cette condition. — .5. Second exemple. — (i. Troisième exemple. — 7. Quatrième exemple. — 8, 9, 10, 11, 1-2, 1.3. Solution de quelques problèmes par l'énuméralion des chances. — 14. Prc'tcndu paradoxe du chevalier de Méré. —

15. Combien faut-il tenter de coups pour obtenir une probabilité donnée de produire au moins une fois un événement dont la probabilité est connue? —

16. Problème du jeu de rencontre. — 17. Problèmes relatifs aux tirages de boules numérotées sans les remettre après chaque tirage. — 18. Problème relatif au dépouillement d'un scrutin de ballottage. — 19. Une urne contient des boules numérotées, quelle est la probabilité pour que sur a tirages la somme des points tirés ait une valeur donnée. — 20. Application au cas de trois dés.

1. La probabilité d'un événement est estimée par i'énumératioii ■des cas favorables, rapprochée de celle des cas possibles.

On parie, en jetant un dé, qu'il montrera le point 4. Le dé a SIX faces : six cas sont possibles, un seul est favorable. La probai»ilité est \. C'est une définition.

•^ CALCUL DKS PROBABILITÉS.

On jette deux dés; les six points du premier, en s'associanl aux six du second, peuvent former Irenle-six combinaisons : la probabililé d'amener une d'entre elles, double deux par exemple,

eslf,.

La probabilité d'amener 3 et 4 est ^ : chacun des des pouvant donner 3 lorsque l'autre donne 4, il y a deux combinaisons favorables 3 et 4, 4 et 3; on leur donne le même nom, 3 et 4, mai* elles sont réellement distinctes.

La probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas Javorables au nombre total des cas possibles. Une condition est sous-enlendue : tous les cas doivent être également possibles. La définition, sans celte restriction, n'aurait aucun sens. H peut se faire que l'événement arrive, il se peut aussi (|u'il n'arrive pas; ce sont deux cas possibles, un seul est favorable. Toute probabilité sérail donc ^. L'erreur est grossière. D'Alembert a élevé l'ubjeclion et refusé de passer outre.

Avant de compter les chances, il laut conslaler qu'elles ont même vraisemblance.

2. Trois coflVels sont d'api)arence identique. Chacun a deux tiroirs, cha(iue tiroir renferme une médaille. Les médailles du premier conVet sont en or; celles du deuxième coffret en argent; le troisième coffret contient une médaille d'or et une médaille d'argenl.

On choisit un coffret; quelle est la probabilité pour trouver, dans ses tiroirs, une pièce d'or et une pièce d'argenl?

Trois cas sont possibles et le sont également puisque les trois coffrets sont d'apparence identi(jiie.

Un cas seulement est favorable. La probabilité est |.

Le coflVet est choisi. On ouvre un tiroir. Quelle que soit la médaille qu'on j trouve, deux cas seulement restent possibles. Le tiroir qui reste fermé pourra contenir une médaille dont le métal diffère ou non de celui de la première. Sur ces deux cas, un seu.! est favorable au coffret dont les pièces sont différentes. La probabilité d'avoir mis la main sur ce cofTrel est donc ^.

Comment croire, cependant, qu'il suffira d'ouvrir un liroii pour changer la probabilité et de J l'élever à ^?

Le raisonnement ne peut être juste. Il ne l'est pas en effet.

CHAP. I. — ÉXUMÉRATION DES CHANCES

Après l'oiivertiire du premier tiroir deux cas restent possibles. Sur ces deux cas, un seul est favorable, cela est vrai, mais les deux cas n'ont pas même vraisemblance.

Si la pièce qu'on a vue est en or, l'autre peut être en argent, mais on aurait avantage à parier pour qu'elle soil en or.

Supposons, pour en faire paraître l'évidence, qu'au lieu de trois cofFrets on en ait trois cents. Cent contiennent deux médailles d'or, ceni deux médailles d'argent et cent une médaille

d'or et une médaille d'argent. Dans chaque coffret on ouvre un liroir, on voit par conséquent trois cents médailles. Cent d'entre elles sont en or et cent en argent, cela est certain ; les cent nutres sont douleuses, elles appartiennent au\ coffrets dont les pièces ne sont pas pareilles : le hasard en réglera le nombre.

On doit s'attendre, en ouvrant les trois cents tiroirs, à v voir moins de deux cents pièces d'or : la probabilité pour cpie la première qui se présente appartienne à l'un des cent coflrets dont Tautie pièce est en or est donc plus i;ratide que 4.

3. Supposons, pour second exemple, que Pierre et Paul jouent aux boules; celui (|ui placera la boule la plus rapprochée du but gagnera. Ils sont également habiles; mais Pierre a deux houles à jeter, Paul n'en a (pi'une. Quelle est la probabilit(" pour que Pierre gagne?

Sur trois boules jetées par des jou<'urs également habiles, Pierre en a deux. La probabilité de gagner- est pour lui f.

Ne pourrait-on pas dire (cependant :

Chacune des houles de Pierre peut être meilleure ou moins bonne que la boule de Paul; quatre cas sont donc possibles. Sur les quatre, un seul fait perdre Pierre, celui où ses deux houles sont l'une et l'autre moins bonnes que celle de Paul, les trois autres cas lui sont favorables. La probabilité de gagner, pour Pierre, est |.

L'énumération est exacte, mais les cas n'ont pas même vraisemblance.

Paul a de bons et mauvais coups. Si la boule qu'il a lancée I emporte sur la première boule de Pierre, il est à croire, sans rien

savoir de plus, qu'elle n'est pas parmi les mauvaises. La chance pour qu'elle soit moins bonne que la seconde boule de

Pierre est diminuée. Parmi les quatre cas possibles, ceux dans Jesciuels Pierre vaincu dans un coup est vainqueur dans l'autre sont moins vraisemblables que ceux dans lesquels ses deux boules ont le même sort.

4. Une remar(|ue encore est nécessaire : l'infini n'est pas un nombre; on ne doit pas, sans explication, l'introduire dans les raisonnements. La précision illusoire des mots pourrait faire naître des contradictions. Choisir au hasard, entre un nombre infini de cas possibles, n'est pas une indication suffisante.

On demande, p;.r exemple, la probahililé pour qu'un nombre, entier ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable, choisi au hasard entre o et loo, soit plus grand que 5o. La réponse semble évidente : le nombre des cas favorables est la moitié de celui des cas possibles. La probabilité est ^.

Au lieu du nombre, cependant, on peut choisir son carré. Si le nombre est compris entre 5o et loo, le carré le sera entre u5oo

et loooo.

La probabilité pour (|u'un nombre choisi au hasard entre o et lOOOO surpasse aSoo semble évidente : le nombre des cas favorables est les trois rpiarls du nombre des cas possibles. La probabilité est f.

Les deux problèmes sont identiques. D'où vient la différence des réponses? Les énoncés manquent de précision.

Les contradictions de ce genre peuvent être multipliées à l'infini. M

o. On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus pelile que le côté du triangle équilaléral inscrit?

On peut dire : si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabibté; la symétrie du ceicle ne permet d'y attacher aucune inlluence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

L'une des extrémités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60". La corde, pour être

CHAP. I. — ENUMERATION DES CHANCES

plus grande que le côlé du triangle écjuilatéral, doil se trouver dans celui des Irois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent le recevoir le dirige dans celui-là semble, par définition, égale à j.

On peut dire aussi : si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité. La symétrie du cercle ne permet d'v attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

La direction de la coi-de étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire, dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour cpi'il en soit ainsi semble, par définition, égale à |.

Ou peut dire encore : choisir une corde au hasard, c'est en choisir au hasard le point milieu. Pour que la corde soit plus grande (pie le côlé du triangle é(piilatéral, il faut et il suffit que le point milieu soit à une distance du centre plus petite que la moitié du rajon, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle (|uatre fois plus petit en surface. Le nombre des points situés dans l'intérieur d'une surface (pialre fois moindre est quatre fois moindre. La probabilité pour (pie la corde dont le milieu est choisi au hasard soit plus grande que le côté du triangle équilatéral semble, par définilion, égale à {-.

Entre ces trois réponses, quelle est la véritable? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée.

6. On choisit au hasard un plan dans l'espace; quelle est la probabilité pour qu'il fasse avec l'horizon un angle plus petit

que-?

On peut dire : tous les angles sont possibles entre o et —, la

probabilité pour que le choix tombe sur un angle intérieur à -:

est {.

On peut dire aussi : par le centre d'une sphère, menons un rayon |)ei|)en(liculaire au plan en question. Choisir le plan au

hasard, c'est choisir au hasard le point où cette perpendiculaire perce la sphère.

Pour que l'ar)gle du plan avec l'horizon soit plus petit que-> il faut que la perpendiculaire coupe la sphère dans l'intérieur d'une zone dont la surface est

•mR^/i — cosy j = 47:R2sin2|-

Le rnpport de la surface de cette zone à celle de la demi-sphère est

2Sin2- — 0,29.

La probabilité est donc 0,2g.

C.etle question, comme la précédente, est mal posée et les deux réponses contradictoires en sont la preuve.

T. On fixe au hasard deux points sur la surface d'une sphère; quelle est la probabilité pour que leur distance soit inférieure a 10.'

Le premier point peut être supposé connu, la position qu'il occupe, quelle qu'elle soit, ne change rien à la probabilité cherchée.

Le grand cercle qui réunit les deux points peut être également supposé connu, les chances possibles sont les mêmes dans toutes les directions. Si l'on partage ce cercle en 2160 arcs de 10'. de manière que le point commun soit un point de division, les points situés dans les deux arcs séparés par le point donné remplissent seuls la condition demandée : la probabilité est donc j^âô ^ TôTô
•

On peut dire aussi : le premier point étant connu, pour que le

second soit à une distance moindre que 10', il faut qu'il soit situé

dans une zone dont la surface est

4tcR2 sin2 5 = j'î^R" sin- — ;t- •

Le rapport de la surface de cette zone à celle de la sphère est

plus de deux cents fois plus petite que 777^.

Les probabilités relatives à la distribution des étoiles, en les supposant semées au hasard sur la sphère céleste, sont impossibles à assigner si la question n'est pas précisée davantage.

8. L'application directe de la définition, lorsque les cas possibles sont en nombre déterminé et d'égale vraisemblance, est souvent, au contraire, un problème facile appartenant à la théorie des combinaisons.

Problème L — On jette une pièce de monnaie n fois de suite. Quelle est la probabilité pour que pile et face se succèdent dans un ordre assigné?

Pile et face, à chaque épreuve, sont également possibles. Toutes les successions présentent des chances égales. Leur nombre, pour n épreuves, est 2", car chaque jet nouveau présente deux cas possibles qui, l'un et l'autre, peuvent s'associer à chacune des combinaisons précédentes, dont le nombre est par conséquent doublé. Parmi ces 2" combinaisons, une seule est demandée. La probabilité est-^. L'arrivée de face ou de pile est prise ici comme le ■2" ^ '

type d'un événement dont la probabilité est ^-.

La probabilité de voir, à la roulette, la rouge et la noire se succéder dans un ordre assigné serait exactement la même.

Quelle est, par exemple, la probabilité pour que, la rouge se montrant au premier coup, la couleur change sans interruption à chacun des 29 coups suivants?

La probabilité est

— = 0,000000()Ooq3i 33.

La piobabilité pour que, pendant les trente premiers coups, la rouge et la noire se succèdent sans que la même couleur sorte deux fois de suite est double de la précédente. La suite alternée peut commencer par rouge ou par noire. Cela fait deux cas possibles.

9. Problème IL — Quelle est la probabilité pour obtenir avec un dé à six faces n fois de suite le point 3?

8 CALCUL DES PROBAUILITKS.

A chaque jer, six cas sont possibles et peuvent s'adjoindre à chacune des combinaisons précédentes, dont le nombre est ainsi sextuplé. Le nombre des combinaisons possibles sur n épreuves

est donc 6"; une seule est demandée, elle a pour probabilité^-

10. Problème III. — Quelle est la piobahilité pou?' amener avec deux dés une somme de points égale à ']!

Le nombre des cas possibles quand on jette deux dés est 36. La somme ^ peut être obtenue par 6 et i , 5 et 2, 4 6t 3. Chacune de ces manières représente deux cas; 6 et i, par exemple, peut ré-

sulter de 6 donné par le premier dé avec i donné par le second, ou de I donné par le premier avec 6 donné par le second.

Sur 36 cas possibles, 6 sont favorables; la probabilité est ^

11. Problème IV. — Quelle est la probabilité pour amener avec deux dés n fois de suite le point 'j?

Le nombre des combinaisons possibles sur n épreuves faites avec deux dés est 36".

Chacune des six combinaisons qui, à chaque épreuve, peuvent amener la somme •-, en s'associant à toutes les précédentes, multiplie par 6 le nombre des cas favorables. Le nombre total de ces cas pour les n épreuves est donc 6". La probabilité, rapport du nombre des cas favorables à celui des cas possibles, est

12. Problème V. — Quelle est la probabilité, en jetant deux dés, pour avoir une somme de points égale à 8?

La somme 8 peut être comme la somme 7, oblenue de trois manières : 6 el 2, 5 et 3, 4 et 4; niais ces trois manières représentent cinq cas et non six. Le doublet 4 el 4 ne peut se produire, en effet, que si les deux dés donnent 4- Le nombre des cas possibles est 5 el la probabilité est ^g ■

CHAP. I. — KM MÉ RATION DES CHANCES

13. Problème VI. — Quelle est la probabilité, en jetant deux dés trois fois de suite, pour amener une fois au moins un doublet.

Le nombre des combinaisons possibles sur trois épreuves est

A chaque coup, six combinaisons sont des doublets, trente n'en sont pas. Le nombre total des combinaisons qui ne contiennent aucun doublet est donc, sur trois épreuves, 3o^ ou 2jooo. Le nombre des combinaisons (pii conliennenl un doublet au moins est

3(')^ — So^ = 19636.

La probabilité demandée est

196 if)

14. Problème VIL — Quelle est la probabilité pour qu'en jetant deux dés n fois de suite on amène sonnez au moins une fois ?

A chaque fois que Ton jette deux dés, U' nombre des associations de points possibles est 36; 35, sur ces 3(3, sont autres que sonnez.

Le nombre des combinaisons possibles en n coups est 36"; le nombre de celles dont sonnez est exclu est 35"; le nombre des condîinaisons (jui contiennent une ou plusieurs fois sonnez est

La probabilité demandc'C est

Si l'on veut que celle probabilité soit 4-, il i'Aul di^terminer n par l'équation

On en déduil

Si l'on parie d'amener sonnez en 24 coups, les chances de perte l'emportent sur celles de gain. C'est le contraire si l'on accorde 20 coups.

Le problème précédent, proposé à Pascal par le chevalier de Méré, a été l'occasion des premières recherches sur le Calcul des probabilités.

« Je n'ai pas le temps, écrivait Pascal à Fermât, de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré; car il a un très bon esprit, mais il n'est pas géomètre. C'est, con)me vous savez, un grand défaut. Il me disait donc qu'il avait trouvé difficulté sur les nombres |)Our cette raison : Si l'on entreprend de faire 6 ;tvec un dé, il y a avantage de l'entreprendre par 4 coups. Si l'on entreprend de faire sonnez avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24 coups, et néanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces des deux dés comme 4 est à 6, qui est le nombre des faces d'un dé.

» Voilà quel était son grand scandale et qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'Arithmétique se dément. »

La réponse ne pouvait embarrasser ni Pascal ni Fermât.

Il semble que l'exemple d'un dé à deux faces, c'est-à-dire d'une pièce de monnaie, aurait suffi pour ouvrir les yeux de Méré. Sur I coup, avec une pièce de monnaie, on peut parier sans avantage ni désavantage, d'amener une fois pile. Avec un dé à six faces, Méré le savait, il y a avantage à entreprendre d'amener un point donné en 4 coups. La proportion est donc en défaut, et la petitesse des nombres []ermet d'en apercevoir aisément la raison.

Lorsque le nombre des faces d'un dé s'accroît et lorsque l'on augmente le nombre des tirages, le nombre total des cas []ossibles et celui des cas qui contiennent un point donné ne

croissent proportionnellement ni au nombre des faces ni à celui des coups.

On peut s'en assurer soit par l'examen des cas les plus simples, soit par la recherche d'une formule. La première méthode était

seule accessible au chevalier de Méré. Pascal, en voulant lui expliquer l'autre, a aperçu son grand délaul : il n'était pas géomètre.

13. Problème VIII. — La probabilité d'un événement est p, combien faut il tenter d'épreuves pour que la probabilité de voir C événement se produire au moins une fois dépasse une fraction donnée /?

Supposons que, dans une urne, soient contenues m boules blanches et n boules noires, m et n élanl telles que

ni -H n

Il faut chercher combien de tirages doivent être tentés pour que la probabilité d'amener une boule bbtiiclie soit plus grande que r.

La boule sortie est remise dans l'urne après chaque épreuve, de telle sorte que la |u-obabililé reste, à cbaque tirage, égale à p.

Le nombre des combinaisons possibles, sur A" épreuves, est

le nombre de celles qui ne contiennent pas de boules blanches est n*.

Le nombre des combinaisons contenant une boule blanche au

moins est

La probabilité demandée est donc

Le nombre k des épreuves à tenter pour que celte probabilité soit égale à /■ est donné par l'équation

d'où

Cette valeur de A- n'est pas, en général, un nombre entier. Pour

un nombre d'épreuves plus petit que A", la probabilité de voir une boule blanche sortir sera moindre]ue /'; elle surpassera ;• si le nombre des épreuves est plus grand que k.

Lie chevalier de Méré se scaudalisait de ue pas voir k inversement proportionnel à/?.

((Pourquoi, disait-il, pour /> = jJjr, k n'est-il pas six fois plus grand que pour y:> = i? »

La formule (i) sert de réponse pour les géomètres; elle montre que, pour de petites valeurs de/>, la proportionnalité supposée par de Méi'é s'éloigne peu de la vérité.

On a, en effet,

Si p est très petit, on peut su[]poser K^ — P) =—p-

Le nombre k des épreuves est donc, à très peu près, pour une valeur donnée de r, proportionnel à -, pourvu que p soit très pelit.

On a, en supposant les logarithmes népériens, ce qui est permis dans la formule (i), dont cela ne change pas les rapports,

^Tô =— ^10 = — '2,30:>.5, ^Foif = — /loo = — 4,fio5i, ^TôTô" = — ^iooo = — 6.9077, ^TTo0ô = — ^ loooo = — 9,210.

J^a formule (i) donne donc les théorèmes suivants :

Si un événement a pour probahilité ~^ N étant assez grand pour

qu'on puisse négliger ^i et prendre — i pour le logarithme népérien de 1— p;j, le nombre des épreuves qu'il faut tenter pour acquérir les probabilités ^, |, 4., ^^, ^^i^, JÏ121. de voir l'événe-

ment se produire an moins une fois esl :

Pour la probabilité j o,(i9N

» "HT 2,3025N

iVô 4,«^^05N

TTÔT (>.907N

(3n peut s'expliquer sans calcul comment, avec le nombre des épreuves, la probabilité s'accroît pour devenir rapidement une quasi-certitude.

Le chevalier de Méré aurait accepté sans étonnement le premier chiffre du Tableau. Il y a chance égale, il l'avait reconnu, pour que sonnez^ dont la probabilité est ■—. ;irrive ou n'arrive

pas en ■i4 coups, environ. 24 est les | de 36, comme OjôgN esl, à peu près, les| de N.

La proportion n'est })as exacie, mais ;ipprochée.

Quand le nombre des épreuves est 9,2N, on peut le partager en i4 groupes, environ, de Ojô'gN chacun. Celui cpii a parié pour l'arrivée de l'événement une fois au moins en 9,2N coups est dans le même cas que s'il était admis à renouveler quatorze lois une épreuve qui donne probabilité égale pour gagner ou pour perdre.

Ne pas voir une seule lois l'arrivée de l'événement est, pour lui, aussi peu vraisemblable que de perdre quatorze lois de suite à pile ou face.

16. Problème IX. — Quelle est la probabilité pour qu'en tirant n boules de suite dans une urne qui en contient jj., marquées 1 , 2, 3, . . . , jjL, et remettant la boule sortie après chaque tirage, k numéros désignés soient sortis au moins une fois?

Lorsque k est égal à i, un seul numéro étant désigné, le nombre des combinaisons qui le contiennent est

(2) -J."— ([JL — 1)".

Il faut, en effet, retrancher du nombre total des combinaisons, u", le nombre des combinaisons qui restent possibles quand le numéro désigné est laissé en dehors.

Pour avoir le nombre des combinaisons qui contiennent deux numéros désignés, il faut retrancher de (2) le nombre des combinaisons qui, ne contenant pas le second, contienuenl le premier;

ce nombre est donné par la même formule, dans laquelle ^ est remplacé par [j. — i ,

([JL-l)«-(}Jl-'2)".

Le nombre des combinaisons qui contiennent une ou plusieurs fois deux numéros désignés est donc

(3) tJL«- 2([JL — I)«H-([JI — 2)".

Pour avoir le nombre des combinaisons qui contiennent trois numéros désignés, il faut, de (3), retrancher le nombre des combinaisons qui, ne contenant pas le troisième, contiennent les deux premiers. Ce nombre s'obtient en remplaçant dans (3) ^ par UL — I ; il est

(H — l)"— 2O — 2)"-+-{ [JL— S)'».

Le nombre des combinaisons qui contiennent une ou plusieurs fois trois numéros désignés est

(4) [j,«_3(fji — i)«+3([a-'2)«- ([^-3)«.

La méthode est générale. Le nombre des combinaisons qui contiennent k numéros désignés est

ix^ — k{ Il — i)'^H ([i. — 2)«. . . ± (,a — k)".

En divisant ce nombre par pt.", nombre des combinaisons possibles, on aura la probabilité demandée.

Si l'on suppose ^ = [ji, on aura la probabilité pour que n tirages fassent sortir tous les numéros

La suite contient a + i termes.

Si n et [X sont grands, on a approxinialivemenl

lt\" I = e

Ces formules d'approxinialion sont applicables aux |)remiers termes de (5); les autrt-s sont négligeables, et l'on peut représenter approximativement la probabilité pour que tous les numéros soient sortis en n tirages par

17, Problème X. — Une urne contient jx boules marquées I, 2, 3, ..., u. On les tire successivement, sans les remettre dans l'urne quand elles sont sorties. Quelle est la probabilité pour que, parmi k boules désignées, aucune ne sorte à un rang égal au numéro dont elle est marquée?

Les combinaisons dans lesquelles une boule désignée n'est pas à son rang sont au nombre

((■)) 1 . 9. . 3 . . . ij. — I . ->. . 3 . . . ([i. — I).

Le nombre de celles dans lesquelles deux boules désignées ne sont ni l'une ni l'autre à leur rang s'obtiendra en retranchant de

(6) le nombre de celles dans lesquelles, la seconde boule étant à son rang, la première, dans l'arrangement des [jl — i autres, ne serait pas au sien. Ce nombre s'obtient en remplaçant dans (6) |jL pai- u — I ; il est

JL — I) — 1.2.3. ..([JL

Le nombre des combinaisons dans lesquelles deux boules désignées ne sont ni l'une ni l'autre à leur rang est, par conséquent,

(7) 1.2.3. . .u— A.i.a.S. ..([JL — i)-M.2.3. . .([X — 2).

Pour avoir le nombre des combinaisons clans lesquelles trois boules désignées ne sont pas à leur r.mg, il faut reli;incher du nombre (^) le nombre des combinaisons dans lesquelles, la troisième étant à son rang, les deux autres ne sont pas aux leurs dans les u. — I boules restantes. Ce nombre s'obtient en remplaçant dans ('-) 'j. par <j. — i ; il est

(8) I . 2 . 3 . . . ([JL — I) — 2 . I . 2 . 3 . . . ([Jl — 2) -H 1 . 2 . 3 . . . ([JL — 3).

La différence ave(; (j) est 1.2.3. . .iji — 3. 1.2.3. . .(fJi — 1) -I- 3. 1.2.3. . .(;JL — 2) — 1.2.3. . .(ij. — 3).

La mélhode est générale. Le nombre des combinaisons dans lesquelles k boules ne sont pas à leur |)lace est

1 . 2 . 3 . . . iJL — A' . 1 . 2 . 3 . . . ([JL — i) -î 1 . 2 . 3 . . . (u • — 2) — .

La probabilité pour qu'aucune des boules désignées ne sorte à son rang est le quotient de (9) par le nombre i . 2 . 3 . . . [Ji des combinaisons possibles.

En supposant k = ^, on obtient la probabilité pour que, dans le tirage de toutes les boules, aucune ne sorte à son rang; elle est

Le nombre des termes dont la loi est évidente est celui des numéros de l'urne augmenté de un.

La série (10), si on la prolongeait indéfiniment, re|)résenterait -• Si donc D, n'est pas un très petit nombre entier, la probabilité

devient, quel que soit le nombre des boules, très voisine de ->

La probabilité pour qu'un numéro au moins sorte à son rang

est

CHAP. I. — ENUMERATIOX DKS CHANCI-S. I7

Voici, du reste, les valeurs, pour

^a = I, 9.. . . . j 10, II,

de la probabilité p^^ à moins d'une demi-unité du septième ordre décimal :

p 1 = 0.0000000, p-i =z 0,5000000, /?3 = 0,333333'i, yOi = 0.3700000, /j^ = 0,3666667, Pi = 0.3680356, p- = 0,3678671 ,

/>9 = 0,3()7879-2, /),o = 0,3678795, Pu = 0,3678794.

On voit donc que, dès que ij. est égal ou supérieur à 9, la différence entre p et - n'atteint pas un millionième.

18. Problème XI. — Pierre et Paul sont soumis à un scrutin de ballottage ; l'urne contient m bulletins favorables à Pierre, n favorables à Paul; m est plus grand que n, Pierre sera élu. Quelle est la probabilité pour que, pendant le dépouillement du scrutin, les bulletins sortent dans un ordre tel que Pierre ne cesse pas un seul instant d'avoir l'avantage.

Le nombre des combinaisons possibles est celui des arrangements àe. m -\- n lettres, parmi lesquelles m semblables entre elles représentent le nom de Pierre et les n autres, semblables aussi, représentent le nom de Paul.

Le nombre de ces arrangements est

Cherchons le nombre des arrangements dans lesquels Paul, à un certain moment, aura le même nombre de voix que Pierre. Parmi ces arrangements, il faut compter tous ceux qui com- B. 2

niencent par le nom de Paul. Leur nombre est celui des arrangements de m + n — i lettres, parmi lesquelles m semblables entre elles représentent le nom de Pierre, et les n - i autres celui de Paul. Ce noiTibre est

ils forment la moitié, précisément, du nombre que nous cherchons.

Nous allons démontrer, en effet, que tous les dépouillements commençant par le nom de Pierre, et dans lesquels l'égalité des suffrages'se produit à un certain moment, correspondent un à un, d'une manière parfaitement détern.inée, aux arrangements de ^+n — I lettres dont le nombre est représenté par la formule (i i).

Représentons par la lettre A les bulletins qui portent le nom de Pierre et par B ceux qui portent le nom de Paul.

Considérons une combinaison commençant par A et dans laquelle, à un certain moment, quand on appelle tous les termes à partir du premier, le nombre des B est égal à celui des A. Arrêtons-nous dans cette énuméralion faite de gauche à droite la première fois que cette égalité se produit. Enlevons le groupe déjà appelé, iransporlons-le à la fin de la combinaison, après avoir enlevé le B qui le termine nécessairement. Nous formerons la combinaison de m + n - i lettres, conjuguée de celle que nous avons choisie.

Par exemple, la combinaison

AABBABAB,

qui contient quatre A et quatre B, donnera

ABABAAB,

qui contient quatre i - et trois B.

La combinaison de m + ai — i lettres, déduite, comme nous l'avons dit, de l'une des combinaisons commençant par A dont nous voulons faire le compte, permet, quand elle-même est donnée, de retrouver celle dont on l'a déduite. Il suffit d'y appeler les lettres en commençant par la droite jusqu'au moment, qui ne peut.

manquer de se produire, puisque les A. sont en majorité, où le nombre des A surpassera d'une unité celui des B. On enlèvera alors le groupe ainsi défini pour en faire le commencement de la combinaison, en le transportant à la gauche après l'avoir séparé des termes non transportés, qui gardent leur ordre, par la lettre B ajoutée à la fin.

Le nombre total des dépouiilonents dans lesquels le ..ombre des lettres B, à un certain ...ornent, atteint l'égalité est donc

En le divisant par le nombre total des arraiigemenls distincts

le quotient

■xn

m -,- Il

est la probabilité pour que Pierre, pendant la durée du scrutin, |)erde, à un certain moment, l'avanlaiie.

La probabilité pour que Pierre garde toujours l'avantage est

Cette ingénieuse démonsi.-ation est due à M. André.

19. Problème XII. _ Une urne contient ^ boules numérotées I, 2, 3, ..., a. Quelle est la probabilité pour que, dans n tirages, la somme des numéros sortis soit égale à k'I

On suppose qu'après chaque tirage la boule sortie soit remise dans l'urne.

Le nombœ des combinaisons possibles est a«, puisque chacun des ^ numéros peut sortir à chacun des n tirages.

Le nombre des cas favorables à l'événement demandé est le nombre des manières de former une somme égale à A-avec n nombres inteneurs a j^+i. Cette somme est, évidemment, le coefficient de V^ dans le développement de

^^' {t ^ f--^.. .■+■ tV-)"-

ordonné suivant les puissances de t. Par quelque voie que l'on effectue ce développement, les coefficients des puissances de t feront connaître les numérateurs des diverses probabdités dont le dénominateur commun est ^'^.

On a

L'expression (i) peut donc s'écrire

Les développements du deuxième et du troisième facteur se feront par la formule du binôme.

Le troisième donnera un développement illimité; mais la multiplication fera disparaître tous les termes dans lesquels l'exposant

est négatif.

Le Tableau suivant a été formé par cette méthode. On j a inscrit en regard de chaque somme demandée, et pour un nombre de tirages inférieur à huit, le nombre des combinaisons qui la produisent en supposant u. = 6.

Les tirages peuvent être remplacés par des dés, en nombre égal à n, que l'on jette à la fois sur le tapis. La somme des points est inscrite dans la première colonne verticale, le nombre des dés en tète de chaque autre colonne, et le nombre des combinaisons sur la colonne horizontale commençant par la somme demandée.

Nombre demandé.

1 dé.

2 dés.

3 dés.

4 dés.

5 dés.

6 dés.

7 dés.

8 dés

Nombre demandé. 1 dé. 2 dés. 3 dés. i dés. 5 dés. 6 dés. 7 dés. 8 dés.

IS 0 0 10 140 6Ji 1666 2807 3368

23 0000 126 2856 24017 ii3()88

20. Problème XITI. — Combien faut-il jeler de fois trois dés pour avoir la probabilité p d' amener une fois au moins le point iD?

La probabilités d'amenei- i5 en jetaiil trois dés est, d'après le Tableau précédent,

2ij5_= 0,0462963.

La probabilité d'amener i5 une fois au moins en n coup» est

Le nombre n est donc donné par léqiiation (i— 5;'= \- p\ on trouve, en faisant

En jetant quinze (bis les trois dés, la probabilité d'amener i5 est plus grande que i; elle est plus grande que f en les jetant trente fois et que ,'„ en les jetant quarante-neuf fois.

21. Le jeu du passe-dix, autrefois fort en vogue, donnait aux deux adversaires chance égale de gagner.

Pierre jetait trois dés et gagnait si la somme des points surpassait lo; il perdait dans le cas contraire.

Le Tableau montre que, dans le cas de trois dés, les points supérieurs sont précisément en même nombre que les points non supérieurs à lo; ii a aulant de chances que lo, 12 que 9, i3 que 8, etc.

La même symétrie se rencontre pour les points obtenus avec cinq ou sept dés. Avec (quatre, six ou huit, il existe un maximum pour lequel il n'j a pas de point conjugué.

La raison en est simple. Sur un dé, le point 6 et le point i sont sur des faces opposées, le point 5 est opposé à 2 et 4 à 3. Si donc on jette sur une table 2n-hi dés, la somme des points marqués par les faces posées sur la Table, ajoutée à celle des points marqués par les dés, sera 7(2/1 + 1). Si l'une des deux sommes est plus grande que 7/^ + 8, l'autre sera au plus égale à 7/1 + 8. Celui qui parierait d'amener un point supérieur à 7/1 + 83 donc pour lui la moitié des chances; lorsque 2/1 + 1^8, n est égal à i et 7/1 + 8 est égal à 10. Si l'on jouait avec cinq dés, il faudrait au passe-dix, pour laisser les chances égales, substituer le passe-dixsept. I

C'est pour cette raison que les derniers chifTres du Tableau ont été supprimés. Veut-on savoir, par exemple, le nombre des manières d'amener 44 avec 8 dés. Ce nombre est le même pour 28 + 16 et pour 28 — 16, ou I 2 ; il est donc 880.

PROBABILITES TOTALES ET PROBABILITÉS COMPOSÉES

Un (les points les pins importants do la théorie des probahililés el l'clui qui prèle le plu^ aux illusions est la manière dont les probabilités aufçnienlent ou diminuent par leurs combinaisons mutuelles.

r.APLACE.

■22. Les solutions de problèmes isolés ne font pas une théoiie. — 23. Théorème des probahililés totales. — 2'i. Probabilités composées. — 25. Cas où le premier événement influe sur la probabilité du second. — 26. Le- tlu-orèmes ne sont démontrés que dans les cas pour lesquels la probabilité est dèOnie: on complète les définitions. Les théorèmes deviennent généraux. — 27. Erreur commise dans la théorie du tir à la cible. — 28. Erreur commise dans la théorie des gaz. — 29. Erreur commise dans l'appréciation des pronostics sur le temps. — 30. Problème relatif aux tirages faits dans une urne. Fausseté d'un raisonnement en apparence très plausible. — ,*}!. Probabilité du brelan au jeu de la bouillotte. — 32. .\vantage du banquier au jeu de trente-et-quarante. — 33. Etudes sur le jeu du baccarat. — 3'i. Problème de la poule.

2^2. La solution des problèmes précédents n'a pas exigé de principes nouveaux. Le compte des cas favorables rapproché de celui des cas possibles appartient à la théorie des combinaisons. L'ingénieux et bizarre Cardan, bon géomètre el grand ami des ♦dés, connaissait pour chaque coup le nombre exact des chances;

(il l'a publié sans devenir, pour cela, l'inventeur de la Science du Itasard.

Une Science doit enchaîner les cas simples aux cas composés et ireposer sur des principes. Ceux du Calcul des probabilités sont aussi simples que féconds.

Deux théorèmes fondamentaux renconlreul des applications à chaque page pour ainsi dire de la théorie des chances. Nous les démontrerons d'abord dans les cas où la probabilité a été définie. L'étude des autres cas ne peut précéder, évidemment, la définition du sens exact attaché aux mots qui y figurent.

23. Probabilités totales. — La probabilité d'un événement étant, par définition, le rapport du nombre des cas favorables à celui des cas possibles, si l'on partage les cas favorables en plusieurs groupes, la probabilité de t événement sera la somme des probabilités pour qa' il appartienne à chacun des groupes. On ajoute en ellet les fractions de même dénoniiniiteur en ajou- (ant les numérateurs.

La probabilité d'amener avec trois dés une somme de points supérieure à i4 est la somme des probabilités pour obtenir i5, i6, I ^ ou i8.

Le choix des groupes est arbitraire, sous la seule condition, bien entendu, d'j enfermer tous les cas possibles sans qu'aucun s'v rencontre deux fois.

Si, par exemple, pour calculer la probabilité d'amener 50/z/ie2 une fois au moins en 20 coups, on faisait la somme des probabilités calculées pour chaque coup, on appliquerait mal le

principe. Le sonnez obtenu à un coup n'empêche []as celui du coup suivant; on compterait vingt lois, de cette manière, la série de coups dans laquelle sonnez arrive vingt fois.

La probabilité d'amener avec deux dés le point 3 ou le point 4 n'est pas la somme de la probabilité pour amener 3 et de celle pour amener 4- On peut, en effet, les amener tous deux; et le point 3 et 4j compté une première fois comme contenant 3, ne doit pas l'être une seconde comme contenant 4-

24. Probabilités composées. — Un événement composé est défini par le concours de plusieurs événements simples que le hasard doit amener successivement ou simultanément. Le nombre N des cas possibles, lorsque les événements simples sont indépendants, est le produit a, [ji.2 . . . [jl^ des nombres de cas possibles dans chacun d'eux, chaque cas de l'un des groupes pouvant s'associer avec tous les cas des autres groupes. Le nombre des cas favorables

CHAP. II. — PROBABILITÉS TOTALES ET COMPOSÉES

au concours des événements simples dont la réunion forme l'événement composé est, par une raison semblable, le produit des nombres de cas m,, mo, . . . , thr favorables à l'arrivée de chacun d'eux.

La probabilité de l'événement composé est donc

c'est le produit des probabilités des événements simples.

25. La probabilité cC un événement composé est le produit des probabilités des événements simples dont il exige la réunion. Un cas doit être |)révu, c'est celui où la probabilité du second événement est influencée par la manière dont se produit le premier. Si, par exemple, une urne contient deux boules blanches et deux boules noires, quelle est la probabilité, en liranL deux houles de suite sans les remettre dans l'urne, [)Our obtenir les deux boules blanches? La probabilité d'en obtenir une au premier tirage est ;^; mais, au second, elle est douteuse : égale à | si le premier tirage a enlevé une l)oide noire, elle sera | seulement si la boule disparue est blanche. Quelle est celle de ces deux fractions qui doit servir de multiplicateur? C'est la seconde, évidemment. Dans le premier des deux cas supposés, l'événement demandé est devenu impossible. Peu importe la probabilité des épreuves qui viennent ensuite.

La probabilité d'un événement composé est le produit de la probabilité du premier événement par la probabilité qu'acquiert le second quand on sait que le premier est arrivé.

On a souvent commis des erreurs graves en oubliant les derniers mots de cet énoncé.

26. Les deux théorèmes précédents sont et doivent être incomplètement démontrés. La probabilité, en effet, n'a été définie que pour une classe très restreinte d'événements. 11 en existe d'autres, incertains comme eux, dans lescjuels l'énuméralion des cas ne peut rien apprendre. Les principes leur sont-ils applicables? Sont-ils dès à présent démontrés pour eux ?

Les principes sont ap|)licables.

Ils ne sont pas encore démontrés. Comment le seraient-ils? Les | probabilités dont ils donnent la mesure n'ont pas même été définies.

Quelle est la probabilité pour que la Seine soit gelée à Pans dans le courant de l'année iQpS?

Pour qu'un médecin appelé près d'un malade sache découvrir la nature, la cause et le remède du mal?

Pour qu'un homme âgé de quarante ans, aujourd'hui bien portant, atteigne l'âge de soixanle ans?

11 faut compléter la définition; tous ces cas lui échappent.

La probabilité d'un événement, quelle qu'en soit la nature, est dite égale à une fraction donnée/?, lorsque celui qui attend l'événement pourrait échanger indifféremment les craintes ou les espérances, les avantages ou les inconvénients attachés à l'arrivée de cet événement contre les conséquences supposées identiques de la sortie d'une boule puisée dans une urne dont la composition fait naître une probabilité égale à/?.

Comment, dans des cas tels que ceux qu'on a cités, justifier une telle assimilation? Ce n'est pas en ce moment la question. Si l'assimilation est im|)Ossible, on ne le fera pas. Si on la fait, il faudra la justifier.

La définition, dans les deux cas, reste irréprochable.

Lorsque l'assimilation sei a faite et justifiée, on en acceptera les conséquences.

On aura le droit de dire, par exemple :

Si, après avoir appelé un médecin, on évalue à :j^ la probabilité pour qu'il vienne el à * la prohabilité pour qu'il procure, s'il vient, la guérison du malade ; sans discuter ces chiffres, celui qui les admet peut ajouter : La probabilité pour que le malade soit visité et guéri par le médecin est, pour moi,

1 n X s — 1 fi •

Celui qui accepte, en effet, les probabilités -j^ et j est, par définition, dans le même doute que si, en présence de dix urnes indiscernables dont neuf renlerment une boule blanche et deux boules noires, il cherchait la probabilité pour mettre la main sur l'une des neuf uines dont la composition est connue el en tirer une houle blanche. L'identité des deux pioblèmes est admise ; elle fait partie de l'énoncé. Si on allègue l'impossibilité de mesurer en

chiffres les probiibililés dont nous parlons, l'objection serait aussi peu fondée que si, évaluant la longueur d'un cbam|) d'ap[]arence rectangulaire à 3oo'" et la largeur à loo'", on contestait le droit d'ajouter, indépendatnnient de loiile vérification, ces mesures, si douteuses qu'elles soient, et ces appréciations assignent au cliamp une surface de Irois hectares.

La règle des probabilités totales et celle des probabilités composées s'appliqueront à loiiles les combinaisons de piobabilités simples '5U|)posées évaluées en nombres. L'évaluation sera plus ou moins judicieuse, plus ou moins justifiée, les conséquences vaudront ce qu'elle vaut elle-même, mais sans introduire aucun doute nouveau.

Les précautions presciiles dans l'application des deux principes sont indispensables, bien entendu, quand on les transporte aux cas nouveaux.

Il ne faudrait pas dire, pai- exemple :

La pi'obabilité pour (pie la Seine soit gelée à Paris en i()95 est la somme des probabilités pourcpTelle soit gelée pendant chacun des mois qui comf)Osent l'année.

Elle peut geler, en ellet, en plusieurs mois didercnts, et ('23) l'application du principe des probabilités totales n'est pas permise.

Si l'on a évalué la probabilité pour qu'il gèle demain à |, celle pour (^u'il tombe de la neige a ^, la probabilité pour voir à la l'ois de la glace et de la neige n'est pas -^7. La gelée, en eflél, si elle se présent*,', change la probabilité de la neige.

Nous citerons trois exemples intéressants d'erreurs commises par l'oubli de ces conditions nécessaires dans l'énoncé des principes.

27. pROBLJîME XV. — On tire à la cible. U arme, sans être parfaite, ne présente aucun défaut systématique; les déviations ont en tous sens même probabilité. L'hypothèse est-elle réalisable ? On le suppose.

Quelle est la probabilité pour que le point frappé soit à une distance du but comprise entre r et -\- dri

Les données sont insuffisantes, cela semble évident. On a résolu cependant le problème par une fausse application des principes.

Rapportons le poinl où frappe la balle à deux axes de coordonnées ajant pour origine le centre de la cible, c'est-à-dire le point que l'on veut atteindre. Soient 'f{^) dx la probabilité inconnue pour que l'abscisse du point frappé tombe entre x el x -^ dx, z> (y)dj- la probabilité pour que l'ordonnée tombe entre y et y -+- dy. La probabilité pour que la balle frappe le rectangle dx dy^ dont les coordonnées sont x ety. est, d'après le principe des probabilités composées,

Cette probabilité, d'après notre hypothèse, ne doit dépendre que de la distance du point frappé à l'origine, et l'on doit avoir

Cette équation suffit pour déterminer la fonction cp. On en déduit, en |)renanl les dérivées successivement par rapport à x et

1 r ■ o'ix) , I, ,

La traction — — - — - est par conséquent consianle, et 1 on en conclut

37 cp(a7) ' '

que la fonction C2(.r), qui doit s'annuler (piand x est infini, est de la foime

^{x) = Ge -^•'•'■\

Ce résultat, fort remarquable, n'est pas, malheureusement, acceptable.

La connaissance de la valeur de x changerait, en effet, la probabilité de celle de y et le (acteur par lequel il faudrait multiplier '-o{x)dx^ pour obtenir la probabilité d'un écart jk dans un sens,

associé à un écart x dans l'autre, serait une fonction inconnue de X et de)', très différente peut-être de ©(jk). |

J^a déviation de la balle dépend, en effet, du soin plus ou moins grand et plus ou moins habile avec lequel le coup a été préparé. Si l'on a réussi sous un certain point de vue, il y a plus de chances pour que le coup soit bon et (|uc tous les écarts soient petits en même temps. La démonstration précédente ne tient aucun compte

de celle ren)ar(|ue ; les probabilités j sonl traitées comme indépendaiiies.

28. Un physicien juslemenl célèbre, Maxwell, a proposé dans l'élude des gaz un raisonnement dont l'illusion est semblable.

Les molécules d'un gaz, suivant une théorie que nous n'avons pas à discuter, se meuvent en tous sens avec de grandes vitesses. Les directions sont réglées par le hasard aussi bien que les vitesses, mais toutes les vitesses ne sont pas également probables; la vitesse maxima et la vitesse moyenne varient avec la température. C'est la probabilité pour qu'une molécule ail une vitesse donnée qu'on espère découvrir, sans introduire d'autres conditions.

Soit 'Z)(x) la probabilité pour que la composante parallèle à l'axe des X de la vitesse d'une molécule prise au hasard soit x. La probabilité pour que les trois composantes soient ■^,y-, z parallèlement aux trois axes sera, d'après le théorème des probabilités composées, proportionnelle à

cp(a7) o(jk) '^iz).

Mais la probabilité p()ur(|u'une molécule ait une vitesse donnée, sans que l'on indique dans quel sens, doit être une fonction de celte vitesse, puisque toutes les directions sonl supposées également possibles. On doit donc avoir

et cette condition suffit pour déterminer la forme de la fonction'^. On en déduit, comme (27),

cp(.r)= Ge-*'-''.

La démonstration n'est pas acceptable. Le principe des probabilités composées n'a pas été correctement appliqué. Si la composante de la vitesse d'une molécule parallèlement à l'axe desXestj?, la valeur de x supposée connue influe sur la probabilit»' pour que la vitesse composée parallèlement à l'axe des Y soil y. Si, par exemple, x est égal à la vitesse maxima, le mouvement est certainement dirigé parallèlement à l'axe des X, et la probabilité de j est nulle.

La conclusioD obtenue, indépendamment des objections que la théorie peut faire naître, ne mérite donc aucune confiance.

29. On pourrait multiplier les exemples ; nous en citerons un troisième :

Un météorologiste annonce chaque soir le temps qu'il fera le lendemain. La probabilité pour qu'il pronostique juste est supposée égale à p.

Un second observateur fait, de son côté, des prédictions dont l'exactitude a pour probabilité/?'.

Les deux observateurs s'accordent pour prédire qu'd pleuvra demain. Quelle est la |)rol)abililé pour (pi'ils se trompent tous les deux?

La probabilité pour que le premier se trompe est i — p.

La probabilité pour cpie le second se trompe est i — p' .

La probabilité pour qu'ils se trompent tous les deux est une probabilité composée, mais «die n'est pas mesurée par le produit

La probabilité com|)Osée est le produit de (i — p') par la probabilité pour que le second observateur se trompe, quand on sait que le premier a fait un faux pronostic.

Les données du problème laissent cette probabilité complètement inconnue.

Si les deux observateurs ont reçu les mêtnes leçons, s'ils ont adopté les mêmes principes, en présence des mêmes faits ils porteront le même jugement. Si l'un se trompe, l'autre se ti'ompera aussi; le second facteur du produit sera l'unité. L'accord certain des deux |)rédictions ne diminue pas la chance d'erreur.

Si les deux méthodes sont différentes, les conclusions pourront l'être aussi, sans pour cela devenir indépendantes. Certains symptômes sont nécessairement appréciés de la même manière, et leur nombre inconnu laisse le problème insoluble.

Si l'un des météorologistes annonce qu'il pleuvra, l'autre qu'il ne pleuvra pas, la probabilité pour qu'ils disent juste tous deux n'est pas pp' : elle est nulle.

30. Problème XVL — Une urne contient trois boules marquées I, 2 et 3. On en tire deux successivement, en remettant

dans Cuvne, après le premier tirage, la boule qui en est sortie. Quelle est la probabilité pour que le plus grand numéro sorti soit 2 ?

Pour que 2 soit le plus giand des iiumérss sortis, il faut que 3 ne se soit pas montré et que l'on n'ait pas lire deux fois le n" 1 .

Pour qu'à Tune des épreuves 3 ne sorte pas, la probabilité est|. Pour qu'il ne sorte ni au premier ni au second tirage, elle est l- Pour que i sorte deux fois, la probabilité est |-; | est par consé- (|ueiit la probabilité pour qu'il ne sorte pas à l'un et l'autre tirage.

L'événement demandé semble donc composé de deux autres dont les probabilités sont | et |; il ne faut pas cependant faire le produit de ces deux fractions. Il faut (25) multiplier | par la probabilité pour que i ne sorte pas 2 fois, lorsque l'on sait que 3 n'est pas sorti. Celte probabilité est | ; le numéro 3 étant écarté, il n'en reste en elTet que deux. La probabilité pour que i sorte est ^, pour qu'il sorte deux fois {, et pour qu'il ne sorte pas deux fois, par conséquent, elle est |.

La probabilité demandée est

On aurait pu dire : Pour que le plus grand des numéros sortis soit 2, il faut que 2 soit sorti et (|ue 3 ne le soit pas.

La probabilité de n'amener 2 à aucune des deux épreuves est |-, celle de l'amener une l'ois au moins est, par conséquent, ~.

La probabilité | doit être multipliée par la probabilité de ne pas amener 4, sachant que 2 est sorti.

Si 2 est sorti au premier tirage, la probabilité de ne pas amener 3 au second est |.

vSi 2 est sorti au second tirage, la probabilité de ne pas avoir amené 3 au premier est |. Acceptons donc cettle probabilité | qui convient aux deux cas, nous trouverons pour la probabilité demandée

Le désaccord avec le résultat précédent est un avertissement. Il «'était pas permis, comme nous l'avons fait, de partager la sortie

supposée de 2 en deux cas disliticts et de supposer successivement 2 sorti à la première ou à la seconde épreuve. Il a pu sortir à toutes deux; notre calcul fait eutrer deux fois en compte le cas où les deux tirages auraient, l'un et l'autre, amené le point 2.

31. Problème XVll. — Probabilité des brelans au jeu de la bouillotte.

La bouillotte se joue avec vingt caries. On enlève d'un jeu de trente-deux cartes les sept, les valets et les dix.

Chacun des quatre joueurs reçoit trois cartes. On retourne la treizième.

Un joueur a brelan lorsque ses trois cartes sont de même espèce, trois rois, trois as, etc. 11 a brelan carré lorsque toutes trois sont de même espèce que la retourne.

Soit Pi la probabilité pour que i joueurs désignés aient des brelans. On déduit du théorème des probabilités composées

iC,.3.2 ^ ^

Pi = P\ —. r = 0.0004 128,

7^3= A'-' —, — t: = 0,0000i3608,

II

On peut avoir brelan en effet quelle que soit la première carte; la probabilité pour avoir une première carte est ~, celle pour que la deuxième soit de même espèce que la première est -j^, et pour que la troisième soit de même espèce que les deux autres la probabilité est -j^.

Cette probabilité /?< calculée pour un premier joueur à qui l'on donnerait trois cartes, sans s'occuper des autres, convient à l'un quelconque des trois, car la manière de distribuer les cartes est indifférente.

Lorsqu'un premier joueur a brelan, la probabilité pour qu'un second l'ait aussi est changée. Il faut d'abord que la première carte rende le brelan possible. La probabilité est {j, car elle ne

doit pas être celle qui complète le brelan déjà fait; pour que la deuxième carte soit pareille à la première, la prohabilité est A, et pour que la troisième soit pareille aux deux autres elle est -4. Ou en conclut

les autres formules se démontrent de la même manière.

P^J P2, Pz^ Pi sont des probabilités totales. Si l'on représente par TD< la probabilité pour que ; joueurs désignés aient des brelans et qu'ils soient seuls à en avoir, on aura les relations

, ^ (/'i^^ii /"s = T03 -f- TO; , p, = 77T., -r- 2 7^3 ^ 7TT.,

(/Di = cTi -I- 3 7^2 -i- 3 TîTj -t- rn^.

Il est clair, en eflTel, que la probabilité pour qu'un joueur ait ' brelan se compose de la probabilité m, pour qu'il l'ait seul de la probabilité 3^2 pour qu'il l'ait en même temps que l'un ou l'autre de ses adversaires, de la probabilité 3m.^ pour qu'il l'ait avec deux d'entre eux, ce qui fait trois cas, et de la probabilité ra^ pour que les quatre joueurs aient brelan.

On déduit des équations (i)

^\— P\~ "ip-i -t- 3/>.i — />i

et, par conséquent,

TÎTi = 0,000000639, THs = 0,00001 29 j8,

ro.2 = 0,000386244i

TUl = 0,016345764.

La probabilité pour qu'il n'v ait aucun brelan est Q = (i-R,)(i — R-2)(i-R,)(i-Ri),

II, étant la probabilité d'avoir brelan pour le joueur de rang i <juand les précédents n'en ont pas.

On a évidt'mment

ï^i==^ii R.j = Toi -h nr^, Ro = TO| -t- •2TO2 -H TO3,

R[= Toi -+- 3 TO2 -h 3 TO3 -i- TO^ ,

La probabilité R^ pour que le quatrième joueur ait brelan, les autres ne l'ayant pas, ne diflere pas en effet de nr,.

Rs, probabilité pour que le troisième joueur ait brelan, les deux premiers ne l'ayant pas, est une probabilité totale. R peut avoir brelan tout seul, la probabilité est ro, ; ou l'avoir en même temps que le quatrième joueur, la prohabilité estm^. Les autres formules se justifient par des raisons semblables.

On en conclut

Kl =/>!= 0,017554,

R:i = P\ 2/02-l-/?3= 0,Ol678'2,

Rj = Pi— ipz-h 3/>3 — />4= 0,1634576,

3i2. PuoBLÈME XVIIL — Quelle est la probabilité de la chance favorable réservée au banquier dans le jeu de trente et quarante?

Le jeu de trente et quarante se joue avec un grand nombre de cartes, réunion de divers jeux complets mêlés en un seul, bien euU-ndu.

On abat une à une assez de cartes pour obtenir une somme de points supéiieure à 30, les figures étant comptées pour 10 et les autres cartes pour le nombre de points qui s'y trouvent marqués.

Une sect)nde épreuve suit la piemièie. |

Le hasard donne ainsi deux sommes toutes deux plus grandes que 30 et égales au plus à 40.

Le joueur parie pour celle des deux sommes qu'il choisit et gagne si elle est plus grande que l'aulre.

Si les sommes sont égales, le coup est nul. Ln seul cas esL excepté, celui où l'on a deux fois 3i.

Ce refait de 3i est le seul avantage réservé au banquier; il a droit, dans ce cas, à la moitié des mises.

Nous supposerons le nombre des cartes assez grand pour que, pendant les deux premiers lirages, on puisse négliger l'influence des cartes sorties sur les probabilités des divers points. S'il y a huit jeux, par exemple, et par conséquent trente-deux sept, la

CHAI». II. — PROBABILITÉS TOTALES ET COMPOSÉES

sortie d'un sepl diminue la probabilité d'en voir sortir un second.]1 serait difficile de dire quelles sont les caries dont la sortie accroît ou diminue la probabilité du refait de 3i. Nous néglio-erons cette très petite influence.

Soit V„ la probabilité pour que, en abattant su» cessivemenl les cartes, la somme prenne à un certain moment la valeur n.

La somme i ne peut se produire qu'au premier coup, si l'on abat un as. La probabilité pour cela est jij ; on a

La somme 2 peut se produire de deux manières : 2 au premier coup; as au premier, as air second. On a

La somme 3 peut se produire de trois manières : 3 au premier coup; passer par la somme 2 obtenue en une ou en deux fois et la faire suivre dun as; commencer par un as, puis amener un 2.

On en déduit

On a, en général, tant que /i est inférieure 10,

i3 lô ij - ,3

On trouve ainsi

Pi = 0,076927,

Pr.= 0,1 084 65, Pg = 0,1 11424, Pt= 0,117995,

Pu = 0,139166.

A partir du point lo, les conditions changent; quatre cartes différentes, en effet, les dix et les trois figures, peuvent amener dix points. On a

P,„= 4-^- 4(Pi+P2+P3-t-...-t-P9) = 0,38064i. 1 3 i3

Au-dessus de n = lo, la formule évidente

donn(

Pl3= 0,129613, P24 = 0,147362,

Pn = 0,i34304, P25= 0,149543,

P, 5= 0,139398, P26= 0,l5ll92,

Pj-= 0,147143, P28= 0,154272,

Pjs = 0,151978, P29 = 0,i55382,

Pl9=0,l56021, P30= 0,168488,

P21 = 0,i40c)33,

La probabilité d'obtenir 3i étant P3,, celle de l'obtenir deux fois est

Poisson, dans un Mémoire de lecture difficile, a trouvé, pour valeur approchée de la probabilité du refait de 3i,

Il tient compte de l'influence des cartes déjà passées sur la probabilité de celles qui suivent et suppose huit jeux réunis. L'influence est petite, on le voit par la concordance du résultat exact du calcul fait en supposant le nombre des jeux infini avec le résultat approché de l'autre.

Il ne faut pas croire que l'influence augmente lorsque, le jeu continuant, les cartes deviennent moins nombreuses. Il s'agit, en effet, de calculer Vavantage du banquier et non son bénéfice,

variable avec le hasard des coups. Le calcul doit être fait avant que la première carte soit abattue ; si l'on doit, avant d'épuiser les huit jeux, faire cinquante tailles, les probabilités de la cinquantième sont, à ce moment, identiquement les mêmes que celles de la première.

Les cartes sorties n'auraient d'influence que si un joueur avait assez de mémoire pour se les rappeler toutes, et assez d'habileté pour calculer en quelques secondes leur influence sur la probabilité d'un refait. Le mérite serait grand, l'avantage bien petit.

33. Problème XIX. — Est-il avantageux pour le ponte ou pour le banquier de demander une carte au jeu du baccarat quand il a le point 5?

L'élude mathématique du jeu de i)nccarat est compliquée par la nécessité d'énumérer les cas, toujours nombreux, en faisant pour chacun un petit calcul.

Le ponte reçoit deux cartes, le banquier en prend deux. Le ponte a droit de demander une carte qui s'adjoint aux deux premières, ou de s'y tenir en gardant son jeu.

Le banquier a les mêmes droits, mais il a l'aviinlage, avant de prendre sa décision, de savoir si l'adversaire a demandé une carte et de connaître celle qu'il a reçue.

Chaque carte vaut, comme au trente et quarante, le nombre des points marqués sur elle. Les figures valent lo. Le gagnant est celui qui a le point le plus fort, les chifl'res des dizaines ne comptant dans aucun cas : i i vaut i ; 12 vaut 2; 28, si l'on a trois cartes, vaut 3.

l^e jeu se termine immédiatement si l'un des joueurs reçoit, quand on donne les cartes, l'un des points 8 ou 9. Il abat et gagne si l'adversaire n'a pas un point meilleur. Dans ce cas, il n'est pas donné de caries nouvelles.

Tous les points, à l'exception de 10 (ou zéro) ont même probabdité quand on donne les cartes : la probabilité de 10 est -^ = 0,1479, celle de chacun des autres 7^^=0,09467. La démonstration ne présente aucune difficulté.

Quand un joueur demande une caite, (|uel que soit le point qu'il ait, il a probabilité -j^ de le conserver en recevant un dix et

probabilité -j^ de le changer pour un quelconque des autres points, qui deviennent tous également probables.

Nous traiterons une seule question.

Lorsque le ponte a reçu le point 5, est-il avantageux pour lui de demander une carte?

11 faut résoudre quatre problèmes :

Le ponte ayant 5 et ne demandant pas de carte, quelle est pour lui la probabilité de gagner et quelle est celle de (aire coup nul, lorsque le banquier, ignorant qu'il a le point 5, sait qu'il a l'habitude, quand il a ce point, de ne pas demander de carte?

Le ponte ayant 5 et ne demandant pas de carte, quelles sont pour lui les probabilités de gagner ou de faire coup nul, lorsque le banquier, ignorant qu'il a le point 5, croit qu'il a l'habitude, quand il a ce point, de demander une carte?

Le ponte ayant f) et demandant une carte, quelles sont pour lui les probabilités de gagner ou de faire coup nul, lorsque le banquier connaît son habitude de demander une carte dans cette circonstance ou lorsqu'il croit savoir qu'il n'en demande pas?

Résolvons le piemier problème.

Le ponte a 5. Le banquier l'ignore. En le voyant s'y tenir, il apprend qu'il a 5, 6 ou 7. Ces trois cas ont chacun pour probabilité \. Huit suppositions peuvent être faites : le banquier peut avoir o, i, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7. Les probabilités des huit hypothèses étaient ^ pour le point o et ^ pour les autres, au moment où les caries ont été données. Mais on n'a pas abattu ; les points 8 et 9 ne sont plus possibles. Les probabilités deviennent

et

Que fera le banquier? S'il a 0, i, 2. 3, 4, il prendra une carte.

Il pourra hésiter s'il a 5 ou 6, et il faut résoudre cette question incidente : Dans les circonstances supposées, c'est-à-dire le ponte s'y étant tenu et ayant l'habitude de ne pas tirer à 5, le banquier doit-il tirer à 6? doit-il tirer à 5?

CHVl>. II. — PHOB.VBILITKS TOTALES ET COMPOSÉES. Sq

Nous ferons le calcul pour le cas où le banquier a le point 6 ; il se compose de deux autres :

Quelle est la probabililé de «•aju^ner pour le banquier qui, ayant 6, demande une carte dans les conditions supposées?

Quelle est la probabilité s'il ne demande pas de carte?

Si le bancpiier ne lire pas avant 6, il a probabilité i de perdie le ponte ayant -, | de gagner le ponte ayant 5, j de faire coup nul.

Si le banquier, avant 6, demande une carte, il acquiert la probabilité -p3 d'avoir chacun des neuf points autres que 6 et -j^ d'avoir celui-là.

La probabilité de perdre contre l'adversaire dont le |)oint est 5, 6 ou - doit s'évaluer par l'énumératioii des cas :

Il y a la probabililé -p^- de perdre av(;i; les points 0, i, 2. 3, 4 ! la probabilité yï po"r avoir, avec le point 5, probab ilitt- -^ de faire coup nul et| de perdre ; la probabilité -pj- pour avoir, avec le point 6, probabilité | de gagner, jde faire coup nul et ~ de perdre; probabilité -^ pour acquérir, avec le point -j , probabilité ^ de ga-

gner, j de (aire coup nul ; probabililé ~, enfin de gagner avec le point 8 ou avec le point g.

La probabilité de gagner est, d'après cette énumération,

celle de faire coup nul

II 4 • ' ' >' T

La probabilité de gagner était ^j elle devient -pr, : elle a diminué.

Celle de faire coup nul a également diminué; le banquier, dans les conditions supposées, ne doit pas tirer à 6.

Un calcul fondé sur les mêmes principes et tout aussi facile montre que, dans les conditions supposées, le banquier doit tirer à 5.

Sans énumérer les cas possibles, qui deviennent plus nombreux quand le ponte a reçu une carte supposée connue, nous nous bornerons à donner tes résultats.

Le ponte se lient à 5, le banquier sachant qu'il a celte habitude.

4o ^ CALCUL DES PROBABILITKS.

Le sort du ponle qui a 5 est le siiivanl :

Probabilité de gagner 0,444694

» de faire coup nul. .. . 0,086907 » de perdre 0,469400

Le ponte qui a 5 demande une carte, le banquier sait que telle est son habitude.

Le sort du |)onte qui a 5 est le suivant :

Probabilité de gagner 0, 444348

» de faire coup nul .... 0, 120935 « de perdre 0,434717

Tels sont les résultats du calcul lorsque le ponte ne cherche pasà tromper le banquier sur ses habitudes.

Si le ponte qui a 5 s'j tient, faisant croire au banquier qu'il a l'habitude de demander des cartes, le sort est le suivant :

Probabilité de gagner 0,489612

» de faire coup nul.... 0,094890 » de perdre 0,4i5497

Si le ponte, avant 5, demande une carte en faisant croire au banquier qu'il a l'habitude de s'v tenir, son sort est le suivant :

Probabilité de gagner 0,447i i3

» de faire coup nul. .. . 0,126463 » de perdre 0,426424

L'étude n'est pas complète. Si le banquier ignore ce que fait le ponte quand il a 5, doit-il tirer à 6? Quelle est, dans cette indécision, la chance du ponte qui a 5?

Il est impossible de la calculer: elle dépend de la chance qu'il y a, quand il aura pris son parti, pour que le banquier se trompe ou devine juste en se demandant ce qu'il fait quand il a 5.

En résumé, le ponte doit-il se tenir à 5, doit-il tirer?

Si, sans jouer au plus fin, dès le début de la partie, il déclare franchement ses habitudes, il doit tirer à 5.

Si les conventions du jeu permettent la ruse, il doit se tenir à 5, en faisant croire au banquier, s'il le peut, qu'il a l'habitude de tirer.

3i. Problème XX. — « + i joueurs A,, Aa, . . ., A„+, jouent aux conditions suivantes: A, et S.^ jouent une première partie ; A3 remplace le perdant; A4, A5, ... luttent successivement contre le perdant de la partie précédente. La poule continue ainsi jusqu'à ce qu'un joueur ait gagné successivement tous les autres, et par conséquent n parties de suite. Quelle est la probabilité pour que la partie se termine au coup de rang x2

Le joueur qui gagne la poule au coup de rang x est entré au jeu au coup de rang x — n -^ i; il a gagné ce coup et les n — i suivants. On peut partager cette hypothèse en n — i autres, en distinguant les cas d'après le nombre des parties gagnées par l'adversaire du joueui- dont nous parlons au uiouient où celui-ci est entré au jeu.

Soit />, la probabilité pour que ce |)reniier adversaire ait gagné une seule p;n-tie, la probabilité pour que celte hypothèse se présente et fasse gagner la poule au coup de rang x est

mais on a évidemment

Car, si la partie se termine au coup de rang x — \ , le joueur qui la gagne avait une partie gagnée déjà au (;oiq) de rang x — n - \- \ , et il en a ensuite gagné n — i sans interruption.

La probabilité pour que la poule se termine au coup de rang x. le joueur qui la gagne ajant rencontré d'abord un adversaire qui n'avait gagné qu'une seule partie, est, d'après cela.

--Tx-..

Soit /?2 la probabilité pour que le gagnant de la poule au coup de rangerait eu pour premier adversaire un joueur avant gagné deux parties déjà, le terme correspondant de la valeur de y^ sera

On a, évidemment,

yx~i =Pi -,_^;

par conséquent,

est le second terme de la valeur de y^-

Le raisonnement successivement appliqué à chacun des cas donnera

On a, évidemment.

L'équation (i), à l'aide de ces données initiales, fera connaître jk^ pour £c = n -h i et pour les valeurs suivantes.

30. Nous donnerons, pour terminer ce Chapitre, l'énoncé de quelques problèmes empruntés pour la |)lupart à Moivre et dont la solution est facile.

Problème XXL — Probabilité pour obtenir une fois le point i, et une fois seulement, en jetant quatre dés.

500

Problème XXIL — Pierre parie que, en Jetant cinq dés, il obtiendra une fois le point i et pas davantage. Quelle est la probabilité de gagner?

= 0.0qoii.

Problème XXIIL — Quelle est la probabilité pour que, sur cent essais successifs avec un seul dé, on obtienne une fois au moins une succession de cinq as sans interruption?

o,oio>.6.

CHAP. II. — PROBABILITÉS TOTALES ET COMPOSÉES

Problème XXIV. — Pieire parie d'amener en trois coups, avec deux dés, le point 5 et le point 7, chacun une fois. Quelle est sa probabilité pour gagner?

Problème XXV. — Pierre entreprend d'obtenir le point 7 avec deux dés avant qu'aucun autre ne se soit produit deux fois. Quelle est la probabilité de gagner?

-1 =^ o,r)2oq.

Problème XXVI. — Pierre jette trois pièces de monnaie, Paul en jette deux; celui des deux qui amènera le plus de faces gagnera. Si les nombres sont égaux, on recommencera l' épreuve jusquèi ce qu'elle donne un résultat. Quelle est la probabilité pour que Pierre gagne?

Problème XXVIl. — Pierre lance un dé et recommence autant de fois ciu' il faudra pour amener, soit deux fois le point 1 , soit l' un des points 9. ou 3. Quelle est la probabilité d'amener deux fois le point 1 ?

Problème XXVUl. — Pierre et Paul jouent avec deux dés, Pierre gagnera par le point 7, Paul par le point 6. Paul joue le premier et ils jettent les dés alternativement jusqa'ci ce que l'un d'eux ait amené le point qui le fait gagner. Quelle est la probabilité de Pierre?

Problème XXIX. — Pierre et Paul jouent avec deux dés; Pierre jette les dés deux fois. S'il obtient le même point, il

gagne. Si les points sont différents, il continue à jeter les dés jusqu'à ce qu'il ait obtenu l'un des deux premiers points. H gagne si c'est le premier. Quelle est la probabilité de gagner?

Problème XXX. — On jette en l'air cinq pièces de monnaie. Quelle est la probabilité pour qu'elles montrent trois piles et deux faces?

Problème XXXI. — Pierre et Paul jouent à un jeu d^ adresse. Le gagnant, après chaque partie, marque un point. Le jeu devient égal lorsque Pierre, plus habile que Paul, lui rend deux points sur trois, qui font gagner la partie. Quelle est, à chaque partie, la probabilité du gain pour Pierre?

Problème XXXII. — Pierre et Paul jouent aux conditions énoncées dans le problème précédent. Pierre peut, sans désavantage ni avantage, rendre un point sur trois . Quelle est pour lui la probabilité p de gagner une partie?

Le rapport — = z est donné par l'équation

On en déduit approximativement

Problème XX.XIII. — Une loterie contient un très grand nombre de billets; le nombre des lots est le quarantième du

nombre des billets. Combien faut-il prendre de billets pour avoir probabilité r, de gagner ou de ne pas gagner un lot?

l'j ne suffisent pas, 28 donnent au gain une chance plus grande que i.

Problème XXXIV. — Dans une loterie de 40 000 billets, il y a trois lots. Pierre prend 8000 billets. Quelle est la probabilité d'avoir un loi?

— - — 0,408, a peu près.

Quelle est celle de les avoir tous les trois? — - = 0,008, à peu près.

Problème XXXV. — Combien Pierre devrait-il prendre de billets, à la loterie indiquée au problème précédent, pour avoir chance ^ de gagner un des lots?

Problème XXXVI. — Une loterie, sur 100 000 billets, doit donner 10 000 lots. Combien faut-il prendre de billets pour avoir chance ^ de ii^ai^ner un lot?

Le calcul donne (î^6. Avec 'j billets, la probabililé de ga<^ner un loi, au moins, est 0,62 1 72 ; avec 6 billets, elle est 0, 4^)85-.

Problème XXXVII. — Une loterie, sur i 000 billets, promet trois lots. Quelle est la probabilité, avec trente billets, de gagner un lot?

Problème XXXVIII. — On a dans une urne trente boules, dix blanches, dix noires, dix rouges; on en prend trois au hasard. Quelle est la probabilité pour avoir une boule de chaque couleur?

Problème XXXIX. — En combien de coups, avec trois dés,

peut-on parier, avec chance égale, d'amener trois as deux

/ois?

36i coups.

CALCUL DES PROBABILITKS.

Problème XL. — En combien de coups, avec trois dés, peut-on parier, avec chance égale, d'amener deux fols le point 10?

45 coups.

PnoBLÈME XLI. — En combien de coups, avec un seul dé, peut-on parier, avec chance égale, de voir les six faces?

i3 coups.

Problème XLII. — En combien de coups, avec deux dés, peut-on parier, avec chance égale, d'amener tous les doublets?

;g coups.

ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Hoc ulrobiquc ular fundamcnto : nimirum. in alesB lu lo tanti lEstiiiiandum osl rujus(iiie sortem, scu expectaliuncm ad aliquid ohtinondum, (juanlum si liabcal, possit denuo ad similem sortem sivc expeelalioiiPiu pervenire, iBqua conditione certans.

HUYCENS.

36. Définition de l'espérance mathématique. — 37. Assertion exagérée de Poisson. — 38. La recherche de l'espérance mathématique et celle de la probabilité sont deux problèmes distincts. — 39. Exemple de la simplification d'un problème par la recherche directe de l'espérance mathématique. — 40. Second exemple. — 41. Troisième exemple. — 4'2. Quatrième exemple dans lequel la recherche de l'espérance mathématique fait connaître la probabilité. — 43. Calcul d'une espérance mathématique déduite des probabilités des divers cas passibles. — 44. Problème sur le jeu de dés. — 45. Discussion de la formule obtenue. — 46. La valeur probable d'une fonction n'est pas déterminée par celle des grandeurs dont elle dépend. — 47. Exception relative aux sommes et aux produits quand les facteurs sont indépendants. — 48. Paradoxe de Saint-Pétersbourg. — 49. Insuffisance des explications proposées par Condorcet et par Poisson. — 50. La réponse du calcul est parfaitement raisonnable et n'a besoin d'aucune justification. — 51. Insignifiance de l'explication proposée par Daniel Bernoulli et devenue célèbre sous le nom de théorie de l'espérance morale. *

36. Le sort des joueurs a été la pretiiière préoccupation des créateurs de la théorie du hasard. On le nomme aujourd'hui espérance mathématique, il est la valeur équitable des avantages encore incertains que font espérer les conditions du jeu.

L'espérance mathématique, dans un jeu équitable, est, pour chaque joueur, égale à sa mise qui, livrée au jeu, ne lui appar-

tient plus. Cette éei^alité traduit la définition : le joueur échange sa mise contre une espérance mathématique. Si l'équiva-

lence n'existe pas, le jeu n'est pas équitable.

L'espérance mathématique de celui qui a la probabilité p de recevoir la somme S est mesurée par le]roduityoS.

Si n personnes, en effet, ont sur la somme S des droits égaux, elles peuvent équitablement la partager et prendre chacune - ou la

tirer au sort el accepter pour part la probabilité - d'obtenir S. Si

quelques-uns des ayants-droit, au nombre de m, s'associent, on pourra leur offrir équitablement, soit le partage donnant à leur

association — -, soit la probabilité — de recevoir S. Les deux offres

sont donc équivalentes.

37. Poisson a écrit : « Si le gain espéré par une spéculation est ôoooo'"" et que | soit la probabilité de l'obtenir, la personne qui devra recevoir cette somme éventuelle pourra considérer le tiers de 60000*"'^ comme un bien qu'elle possède et que l'on devrait comprendre dans l'invenlaire de sa fortune. »

Poisson va trop loin. Le plaideur engagé dans un procès qu'il a neuC chances sur dix de perdre et qui, en cas de gain, doit lui rapporter 1 million, mentirait en disant qu'il possède Iooooo^^ Un homme prudent, sur une telle garantie, refuserait de lui prêter 500'^ Son espérance mathématique vaut looooo*^"", mais vraisemblablement il ne trouvera pas d'acheteur.

Cette confusion entre une espérance mathématique et la certitude d'une somme équivalente a fait naître de grandes difficultés. Nous aurons à j revenir.

38. Si la somme espiérée est connue, la recherche de la probabilité et celle de lespérance mathématique forment un même problème. Il en est autrement lorsque les conditions du jeu impliquent la possibilité de gagner ou de perdre, suivant les cas, plusieurs sommes différentes.

Si des événements ajant pour probabilités /?,,;?2,. ••,/>« donnent droit ;.ux sommes S,, S2, ..., S„, l'espérance mathématique est

/'lS,-f-^2S2-h...^-/)„S„.

CHAP. III. — ESPÉRAXCE MATHKM VTIQrE. 4q

Celui (|ui doit, suivant les ctis encore incertains, recevoir l'une

nu l'autre (les sommes S,, S. S,,, peut vendre ses droits et,

|.Hr des marchés équitables, échanger ses chances contre les sommes /^, Ï5,, /VoS^,, . . ., p„S,t qui donneront droit à n acheteurs différents 'le loucher en son lieu et place, le premier la somme S,, si c'est

celle qui lui échoit, le second la somme S., et enfin le dernier

la somme S,,.

Le règlement des comptes n<' fera naître aucune difficulté puisque deux acheteurs, d'après les conventions, n'auront jamais à réclamer la même somme.

L'espérance mathématique est connue (|uaiid les probabilités des divers cas possibles ont été calculées. \Liis il est plus aisé, <[uelquefois, de la chercher directemenr sans s'occuper des termes qui la composent.

39. PiiOBi.EMK XLIil. — Pierre et Paul jouent au jeu de rencontre. Une urne contient <x numéros marqués i, i, 3 <j. t^aul tire successnement les <x boules et s'engage à donner à Pierre i^^" chaque fois qu un numéro sortira à son rang. Qu(dle est l'espérance mathématique de Pierre?

S'il fallait évaluer la probabilih' des divers cas possibles, le problème, sans être difficile, exigerait de longs calculs.

En nommant pi la pndîabilité pour qu'il y ait / rencontres, l'espérance demandée est

P\ ■+- 2/)2-t- 3/)3 -H. . .-H \xp^.

La somme est plus aisée à calculer que chacun des termes qui la composent.

L'espérance mathématique de Pierre est, à chaque tirage, -1- . La somme espérée est en effet i^"", et la probabilité de l'obtenir -■

La probabilité au moment où le tirage va se faire dépend des numéros sortis antérieurement. Si le numéro /est sorti déjà, la probabilité de le voir au /'*""■ tirage est nulle. S'il n'est pas sorti, elle

^^^ \x — i -^ \' "^^^'^ c'est au début du jeu qu'il faut la calculer, et

la probabilité est alors -•

) CALCUL DKS PROBABILITÉS.

L'espérance malhémaliqiie de Pierre, étant pour chaque tirage j est, pour les u liiayes, 'j. — , c'esl-à-dire i".

4-0. Problème XLIV. — Une urne contient des boules noires et des boules blanches; la probabilité de la sortie d'une boule blanche est p, celle de la sortie d' une boule noire est q. On fait a tirages en remettant chaque fois dans l'urne la boute qui en est sortie. Pierre recevra i*" chaque fois qu une boule blanche sortira, précédée et suivie par une boule noire. Quelle est, pour l'ensemble des ^ tirages, l'espérance mathématique de Pierre?

La probabilité pour que le tirage de rang / donne à Pierre le droit de recevoir i^' est/>^-, car il faut le concours de trois événenienls dont les probabilités soni q, p et q. L'espérance mathématique étant, pour chaque tirage, égale à/>^-, elle est, pour l'ensemble des [j. tirages, égale à 'J-pq'--

L'espérance mathémati(]ue est la même que si les u. tirages se faisaient dans une urne donnant à la sortie d'une boule blanche la probabilité yo^y^, et (|ue Pierre dut recevoir i"" pour chaque boide blanche sortie, sans qu'aucune condition fût imposée à celle qui la précède ni à celle qui la suit. Les deux jeux donnent à Pierre des avantages équivalents, mais non identiques. Dans le premier,

sur [X tirages, la plus grande somme qu'il puisse gagner est -, dans

le second elle est ui. Si l'on voulait, pour obtenir l'espérance mathématique, calculer les termes qui la composent et, pour cela, ' chercher la probabilité pour que sur tji tirages Pierre eût un

nombre donné n de fnmcs à recevoir, la difficulté des deux problèmes serait fort inégale. La considération, parfaitement rigoureuse, de l'espérance mathématique dispense de les résoudre. Pierre, , en effet, peut, pour chacun des tirages, vendre la chance (ju'il a de 'j gagner i*^" sans avoir à tenir compte de l'influence exercée par les chances de l'un des coups sur celles du suivant. 11 est certain (|ue, î si l'acheteur du coup de rang / est favorisé par le sort, celui du I coup suivant ne h' sera pas; la boule qui lui appartient sera noire. Peu leur importe : la chance qu'ils achètent, au moment où ils la payent, n'est ni augmentée ni diminuée.

41. Problkme XLW — Ln" urne contient un i>rand nombre n de boules marquées des numéros \, i, d>, . . ., n. On fait successivement 'j. tirages, en remettant chaque fois dans l'urne la boule qui en est sortie. Pierre recevra if"" chaque fois que la série des numéros rcrits dans leur ordre de sortie présentera un maximum ou un minimum. Quelle est P espérance mathématique de Pierre?

Si l'on considère un tirage désigné, la probabilité pour (|ue le numéro correspondant soit dans la suite un niaxiMiiim ou uti minimum est \. Si l'on compare en eftet le numéro sorti à celui qui fe précède et à celui qui le suit, il sera maximum s'il est le plus grand des trois : la probabilité pour cela est |, et minimum s"il est le plus petit : la probabilité est également i; en écartant comme avant une probabihté négligeable, si n est très grand, le cas où deux numéros consécutifs seraient égaux, la probabilité pour que le numéro dont le rangest donné soit maximum ou mitiitnum est f. L'espérance matbématique de Pierre pour cliacun

des tei mes de la série est donc \\ elle est pour les ;jl termes de la série :fa.

Le raisonnement peut, comme le précédent, biisser uu doute qu'il faut discuter.

Si, dans la suite, un numéro est maximum ou tninimum, cela change la probabilité pour que le suivant le soil aussi.

La probabilité pour que le vingtième terme de la suite soit ! maximum est \-^.

La probabilité pour que le vingt et unième soit maximum est aussi j.

La probabilité pour qu'ils le soient tous deux n'est pas ^, elle «si nulle.

L'objection serait fondée si nous calculions les []robabilités. <^uand il s'agit des espérances matbématiques, elle perd toute sa Ibrce.

Pierre, en effet, peut vendre à des acheteurs différents chacun des francs qu'il peut espérer; tous les marchés sont équitables. Chaque acheteur a bien réellement probabilité f de recevoir i^--; peu lui importe que son gain, s'il est obtenu, diminue les chances d'un autre: les conventions partielles n'en sont pas moins équi-

labiés. Pierre a pu vendre équilabletnenl ses droits f ;j.". Telle est donc son espérance malhématiijne.

4.2. Si, une urne contenanl deux boules blanches et une houle noire, on fait successivement ^ tirages, l'espérance mathématique de celui qui doitrecevoir i^"" par boule blanche sortie sera fu. comme dans le cas précédent; là s'arrête la ressemblance des

deux problèmes. La probabilité d'exlr<«ire de Turne un certain nombre de bonles blanches n'est pas éi;ale à celle d'avoir un même nombre de maxima on minima.

La probabilité pour que toutes les boules soient noires est (1)1^, celle pour qu'elles soient toutes blanches (|)!^. Les probabilités de n'avoir ni maximum ni minimum et celle de n'avoir que des maxima et des minima sont très dillerenles.

Légalité entre les espérances mathématiques n'implique nullement celle des diverses probabilités qui figurent dans leur expression.

43. Problème XLVL — On trace sur un plan indéfini des lis'nes parallèles équidistantes. Une aiguille est lancée au hasard sur le plan. Pierre recevra i*^"" par rencontre de l'aiguille avec une des parallèles. Quelle est l'espérance mathématique de Pierre?

L'espérance mathématique de Pierre est proportionnelle à la longueur de l'aiguille et indépendante de sa forme, droite ou courbe.

Il n'en est pas de même de la probabilité de la rencontre, et ce problème, comme le précédent, montre la (lilférence entre le calcul de la probabilité et celui de l'espérance math(';inalique.

Une aiguille est droite; on la courbe; la probabilité de la reneonlre est changée: l'aiguille ne pouvait, si elle est plus petite que la distance des deux parallèles, procurer deux rencontres à la fois; elle le peut quand, sans changer sa longueui', on l'a pliée en (ourbe. On peut même être certain, si la courbe estfermée, qu'une première rencontre en rend une seconde nécessaire.

Les conditions du problème sont donc changées. L'espérance

nialhénifilique de celui qui doil recevoir i"" par rencontre reste la même. Clui(|iie t'Iénient de raiguille donne, en eflet, une espérance indépendante des autres éléments qui lui sont attachés. (ïelui (qui doit recevoir i"" par rencontre (c'est la même chose que i"" s'il y a rencontre, quand une seule rencontre est possible) peut vendre à des acheteur s dirterents les droits résultant pour lui de chaque élément de l'aiguille, et la valeui- de ces (h-oits reste la même, soit que laiguille soit 'Iroile ou courbe.

Soient a la distance de deux parallèles, / la longueur de l'aiguille, plus petite que a. Si la probabilité dune rencontre est/>, p est aussi l'espérance mathématique de Pierre. Remplaçons laiguille |)ar un cercle de même longueur. Le rayon R de ce cercle

sera ; — La piobabilité pour que le cercle rencontre une des pa-

\ rallèles est Si Ton partage, en efTel, la distance a des deux

parallèles entre lescpielles tombe le centre du cercle en n parties, il i j a chance égale pour qu'il tombe sur chacune d'elles, et il faut. pour qu'il j ait renC(Mitre. qu'il soit à une distance moindre que R de l'une ou l'autre des deux lignes. Le nondjre des divisions favorables est : leur nombre total est /?, et la probabilité de la ren-

contre est, par con>équent,

Si le cercle rencontre une des parallèles, il la rencontre deux fois; l'espérance mathématique est donc

4R _ •W a an

Telle est la probabilité pour la rencontre de l'aiguille. L'ingénieuse substitution d'un cercle à une aiguille rectiligne 1 est due à M. Emile Rarbier.

44. Problème \ L A IL — Pierre a trois pièces de 5", Paul en \ a deux; ils conviennent que chacun jettera ses pièces. Celui I qui obtiendra te plus grand nombre de faces prendra les cinq ! pièces. Le jeu est-il équitable?

Pierre e\|)Ose i 5*"' cl P;iul lo'^'" setileinenl; mais Pierre a plus grnnde chance de gagner. La conipeiisalion esl-rlle exacte?

Dans ce cas, comme dans un grand nombre d'autres, la méthode la plus simple pour calculer l'espérance malhéniati([ue est de chercher la probabilité de chacun des cas possibles.

Pierre peut, avec ses trois pièces, amener o, i, u ou 3 fois face. Les probabilités sont ^, |, | et|.

Paul peut avoir o, i ou 2 fois face; les probabilités sontf, ^el\.

Si Pierre n"a pas face une seule fois, sa probabilité de gagner est o, celle de perdre est |.

S'il a face une fois, sa probabilité de gagner est |, celle de peidre j.

S'il a face deux fois, sa probabilité de gagner est f , celle de perdre o.

S'il a face trois fois, sa prol)abilité de gagner est i.

La |)robabililé de Pierre est donc

3 I 3 3 I \ ifi I 8484^ /32 2

celle de Paul est

8 4 8 4 <S 8 / 3-2 ib

La somme des deux probabilités n'est pas égale à l'unité, parce que la partie peut être nullf: mais, s'il est convenu qu'on recommencera jusqu'à ce qu'un des joueurs ait gagné, les probabilités I et -pg représentent deux fractions de même dénominateur ayant pour numérateur les nombres de cas favorables, dont le rapport reste constant cpiand le nombre des parties augmente. Il faut donc, pour avoir les deux probabilités, partager 1 unité en deux parties qui soient dans le rap|>ort de ^ à -j^; elles s(jnl

— et — II II

L'espérance mathématique de Pierre est

X — = — ; Il II

elle est plus petite que sa mise.

Le jeu est avantageux à Pierre.

io. Problèmr X.LVI1I. — Un nombre n de joueurs avant déposé chacun \^^ jettent un nombre ix de dés. U enjeu total appartiendra à celui qui amènera la plus grande somme de points, ou sera partagé entre ceux qui auront amené le même nombre de points, plus grand que celui des autres joueurs.

Pierre joue le premier, il amène k points. Quelle est, avant que les adversaires aient joué, son espérance mathématique?

Les Ai*^"" qui forment renjeii (olal appaiiien(Jront à Pierre si aucun des adversaires n'amène un point ('i^al ou supérieur à A" ; ils seront partagés entre m -\- i joueurs si, aucun n'amenant un point supérieur à A", m des adversaires amèneni k .

La probabilité d'amener avec a dés un point donné est connue par le Tableau donné (19), cpi'il sérail aisé d'étendre au cas d'un plus grand nombre de dés. Nommons q^ la probabilit(" d'un point supérieur à A" et pk celle d'un point précisément égal à A" ; la probabilité d'un point inférieur à k sera

a = 1 — Pk— qic-

Pour que Pierre ait part à l'enjeu, il faut qu'aucun des points ne soit supérieur à k:, la probabilité pour (pi'il en soit ainsi est (, — q^yi-_ Soient yo^ la probabilité, dans cette hypolbèse, d'amener le point A et r'^ celle d'amener un point inférieur.

La probabilité pour que Pierre partage avec i de ses adversaires est

i . > . î . . .1. i . >. .3 . . .(n — i — I } L'espérance mathématique de Pierre est

(I — y/,j"-'/ir^:'-'^ ^ in -\)r'i}-'p'k

- '•/' -Pk^---^ -Pk

égale évidenimenl à

(1 — qi,)"^ '

Pl<

V^-'k-^p'kY

et, à causr de /-^ -i-/>^= i, piiiscuie r\ et p',. sont les probabilités de deux événements contraires,

Pk

il resle à calculer r\ el p'/^.

Le rapport de r^. à p'/^ esl le même c|iie celui de r^ à /)^. L'Iiypoihèse faite qu'aucun numéro supérieur à k n'est sorti diminue eti effet le nombre des cas possibles, sans changer celui des cas favorables à l'arrivée d'un nombre de poinls égal ou inférieur à k. Les numérateurs de ;-^. et de /?^ soni, avec un même dénominateur devenu plus petit, ceux de ;•/, et dep^. On a donc

et, |)uisque /•^h-/>^=

K Pk

>'k-^Pk Pk

rk-^Pk 46. Un problème intéressant peut être résolu :

Pierre ayant obtenu le point k, quel est le nombre d'adversaires le plus favorable à ses intérêts, c'est-à-dire quel est celui qui lui laisse la plus grande espérance mathématique?

En accroissant le nombre des joueurs, on accroît la somme à partager, mais on diminue la chance d'j avoir part et celle de l'avoir tout entière. Il faut déterminer n de manière à rendre (i) maximum.

En égalant à zéro la dérivée par rapport à «, ou ol)tieut

' lr',-^lK^-qk)

Cette équation fera connaître la valeur de n.

Si Pierre a amené le point le plus élevé jmssible, on a qh=o;

r'I' est nul et n infini. Pierre, dans ce cas, certain d'avoir une piirt, a avantage à accroître sans limite le nombre de ses adversaires.

L'espérance mathématique de Pierre ne grandit pas indéfiniment. La formule (i), quand on v suppose q^^o et n infini, se

réduit à

L'enjeu total n devant èlie parlagé entre tous ceux qui auront le point maximum, poui- que (■liaqu(.' |)arl soit — r> il f«iit que le nombre des partageants soit /ip'/.. p]^, quand A- est le plus grand des points possibles, ne diffère pas de /'/,. nph est le nombre probable de ceux d'entre les n iidveisaires qui amèneront le point maximum dont la probabilité est /'a-

Le Tableau suivant donne les résultats relatifs au cas où l'on joue avec trois dés. Piei le ayant amené au pren)ier coup l'un des points intérieurs au maximum 18. la première colonne donne le point obtenu, les deux sui\antes donnent les probabilités désignées dans la formule par />a et q^] le noml)re d'adversaires le plus avantageux pour chaque valeur de A' est inscrit dans la quatrième colonne; la cin(|uième donne la valeur de (i — qk)'^^ probabilité pour (jue Pierre ait une part.

r5600

Ih-

lO

58 CALCUL DES F'ROBABILITES.

Si Pierre ayant lancé six clés a obtenu cin(| 6 et un 5, on aura

Le nombre d'adversaires le plus avantageux est i5 i44 *'t 'a pi'obabilité de recevoir une part, dans ce cas,

47. Lorsque les valeurs probables de plusieurs grandeurs sont connues, on ne connaît pas pour cela la valeur probable d'une fonction donnée de ces grandeurs.

La valeur probable d'une grandeur inconnue a est, par définition, l'espérance mathématique dr celui qui devrait recevoir une somme égale à a.

Si a peut prendre, selon les décisions du hasard, les valeurs a,, a^, . . . , a^, er que, pour chacune d'elles, les probabilités soient Pi' /'i' • • • , P/n '^ valeur probable de a est

/? 1 ai -^ />, ao -h . . . -4- /?„x„ .

La valeur probable de a- est

elle est très différente du carré de la valeur probable de a.

Si deux grandeurs a et b ont pour valeurs probables A et B, la

valeur probable de y n'est pas -5. On peut même remarquer que,

si o est une des valeurs possibles de b, si peu probable qu'elle

soit, la valeur probable de -r est infinie. ' o

Deux cas importants sont à noter

La valeur probable d'une somme est la somme des valeurs probables des parties de la somme.

C'est la conséquence immédiate de la définition.

La valeur probable d'un produit, quand les facteurs sont indépendants, est le produit des valeurs probables des facteurs.

CHAP. III. — ESPÉRANCE MATHÉMATIQI E. Sg

Soient a et b deux i^randeurs. La premièie peut recevoir les valeurs y.,, ao, ..., a,,, donl les probabilités sont /?, , />o, . . . , pn- La seconde peut avoir les valeurs ^,, ,3o. . . . , |ii„i, dont les |)robabiiités sont q^, g-,, . . . , qm- Les valeurs probables sont

leur produit est la somme des termes tels que

cpii représentent les produits de toutes les valeurs possibles a, |3,' du produit ab par leurs probabilités />,(// .

Si l'arrivée de l'événement a exerçait une inlluence sur celle de 6, la probabilité de l'association de a. avec 3, ne serait pas (t23) le |jroduit/>,(/i'.

Si, par exemple, b est égal à a'-, les valeurs possibles de a étant a,, a^, . . . , a„, celles de b sont a;, ai;, . . . , a;). Si a est éi;al à a/, il est certain que b sera aj'.

i9. Paradoxe de Saiiit-Pélersboarg. — On a opposé les indications du bon sens aux décisions de hi théorie et pour condamner les principes alléj^ué leur-5 eoMsé(pieiices.

La discussion, jusqu'ici, n'a pas dissipé la méprise. La théorie, pourtant, est irréprochable; il n'est pas juste de lui opposer l'absurdité de ses conseils : elle n'en donne pas. Il est déraisonnable d'exposer au jeu une forte somme, indélicat d'accepter un risque qui peut rendre insolvable. Le (>aK:ul des probabilités doit ignorer ces sages ap|)réciations.

On joue, c'est l'hypothèse. A-t-on tort ou raison ? La question n'est pas posée.

On cherche les conditions équitables du jeu sans se demander si elles sont raisonnables, ni établir ;iucune relation entre cette question, (pie l'on ne veut pas aborder, et le problème à résoudre.

Le |)arti raisonnable, si les risques sont grands, est de ne pas jouer.

On peut, en acceptant des conventions strictement équitables, faire un acte de folie ou commettre une escroquerie. La remarque.

pour être incoiilestée, ne change pas la théorie du jeu équitable. La confusion est analogue à celle que faisait Poisson (37), en portant une espérance nialhéinati(pie dans l'inventaire d'une forttine.

Pierre, pour toute fortune, possède looooo'^'", il veut avoir une chance de gagner loo millions.

Rien n'est plus facile, répond sans s'émouvoir le géomètre qu'il consulie. Si le jeu est équitable, vous aurez ggg chances sur looo de perdre vos looooo*^'.

La réponse doit s'arrêter là. Si Pierre trouve 999 personnes désireuses comme lui de gagner 100 millions et résignées comme lui à la presque certitude de perdre 1 00000'", ils organiseront une loterie de 1000 billets à 100000'^" le billet.

Le jeu sera équitable, la théorie le déclare, le bon sens le démontre, et Pierre, cependant, sera très justement interdit comme insensé.

Le problème de Saint-Pétersbourg est devenu célèbre par l'ingénieuse combin;iison des conventions laites pour dissimuler l'énormité des mises, ou, pour être plus exact, des engagements.

l*ierie et Paul jouent aux conditions suivantes :

Pierre jette une |)ièce de monnaie. Si elle montre face, il donnera i*^*" à Paul. Si elle montre pih', il jettera la pièce de nouveau. Si (ace arrive au second coup il donnera 2*^'" à Paul. La pièce sera jetée jusqu'à la première arrivée de face qui termine la partie. S il a fallu la jeter n fois, Paul recevra a""**'".

Quelle est l'espérance mathématique de Paul?

Elle est infinie.

Paul, en clTet, recevra, selon le nombre des coups qui seront joués, une somme égale à lun des termes de la suite illimitée

Les probabilités pour lui de recevoir ces dilïérentes sommes sont

III I

LVspérance mathématique de Paul est, par conséquent,

IX - -I- 2 X 7 -+- 4 X - -1- ... -i- 2" X — — -t- . . . ; 9. 4 8 2"-^'

elle se compose d'un nombre infini de ternies qui sont tous ég^aux

Quel que soit le prix dont il |)ave la promesse i|ui lui est faite, le niarclié sera avantao^eux à P.uil.

Qui voudrait cependant ris()uer loo*^'" à un tel jeu?

oO. Les réponses proposées au prétendu paradoxe sont nombreuses. D'Alembert écrivait à Lai;ran<;e : « Votre Mémoire sur les jeux me fait désirer beaucoup (pie vous nous donniez une solution du problème de Pétershourg, qui me paraît impossible en admettant les principes connus. »

Les conditions du jeu im|)liquent contratliction, ont dit Condoicel et Poisson. Pierre prend des engagements qu'il ne peut tenir. Si lace ne se présente qu'au centième coup, le gain de Paul représentera une masse d'or plus grosse <pie le soleil. Pierre le trompe en la lui promettant.

j^'observation est juste, mais n'éclaircil rien. Si l'on joue des centimes au lieu de frani^s, des grains tie sable au lieu de centimes, des molécules d'hydrogène au lieu de grains de sable, la crainte d'être insolvable peut diminuer sans limite. La théorie ne doit pas taire la différence. Elle ne suppose pas non plus qu'avant cTiâcpie jet de la pièce on dépose la mise. Quelle que soit la dette

de Pierre, la plume peut l'écrire, on réglera les comptes sur le papier; la llK'orie triomphera s'ils confirment ses presciiptions. Le hasard très probablement, on peut dire très certainement, finira par favoriser Paul. Quel (pie soit le prix dont il paye, à chaque partie, la promesse de Pierre, le jeu. s'il est tenace, l'enrichira sans limite. Pierre, insolvable ou non, lui devra une somme immense.

51. Si une machine pouvait jeter looooo pièces par seconde et enregistrer les résultats, Paul, en payant looo"" par partie, s'endetterait sans doute d'une centaine de millions par seconde; il n'en ferait pas moins, après (|uelques millions de milliards de siècles, un bénéfice colossal. Les conditions du jeu le favorisent, et la théorie a raison.

On peut, sans calculs, rendre l'assertion évidente : Supposons, pour ne pas aborder de trop grands nombres, que Pierre s'engage à faire i milliard de parties.

Cherchons quelle somme Paul peut espérer- recevoir, sans présumer pour lui le hasard bénévole.

Sur I milliard de parties, il laul s'attendre à en voir 500 millions pour les(|uelles Paul ne recevra cpie i^"". On ne peut s'étonner d'amener face une fois sur deux. Si le nombre est moindre, Paul aura du bonheur; nous ne voulons pas lui en supposer.

La seconde moitié des parties jouées commencent toutes par l'arrivée de pile. Le second coup amènera face vraisemblablement 250 millions de fois : une Ibis sur deux. Paul, pour chacune

de ces parties recevia ■ >.'"; il doit, de ce chef, espérei- 500 millions.

Les 250 millions de parties restantes commencent par deux fois pile; pour la moitié d'entre elles, on doit s'j attendre, face arrivera au troisième coup, Paul recevra 4*^' ; c'est encore 500 millions qu'il peut raisonnablement espérer. On peut renouveler trente fois le même raisonnement et voir clairement que l'ensemble des parties doit vraisemblablement rapporter à Paul, d'aj)rès les conditions convenues, une quinzaine de milliards. Le hasard, évidemment, peut le favoriser el, accroître la somme, ou le maltraiter et la diminuer; mais, en donnant 1 5" par partie, il a des chances sérieuses de ne rien perdre.

Si Pierre doit faire loo parties seulement, les chances sont ditïerenles; Paul, en donnant i o'"" par partie, aurait grande chance de se trouver en perte. Les conditions du jeu lui seraient toujours avantageuses; mais son avantage résulterait des gros bénélices possibles, dont la chance est |)eti(e.

Si, au contraire, au lieu de i milliard départies, on en devait faire looo milliards, Paul, au lieu de iS*^"", pourrait donner 20*^^ par partie, avec chance sérieuse de recouvrer 20000 milliards, sans compter, bien entendu, pour rien dans cette appréciation sommaire la possibilité de gagner des sommes immenses, dont le calcul exact a dû tenir compte.

52. La réponse la plus singulière faite au prétendu paradoxe est celle de Daniel Bernoulli qui, le premier, a tiré de l'oubli cette question autrefois proposée par son cousin JNicolas.

100 millions, suivant Daniel Bernoulli, ajoutés à une lortune déjà acquise de 100 millions, ne sufflisent pas pour la doubler.

Quels avantages nouveaux peuvent-ils procurer.

CHAP. III. — ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Il siibsliuie, en conséquence, à l'espérance malliématique l'espérance morale, dans le calcul de laquelle une lortnne dépend non du nombre d'écus dont elle se compose mais des satisfactions qu'elle procure

Le problème étant ainsi posé, Bernoulli a l'audace de le résoudre. La solution est simple. Un accroissement dx ajouté à une

fortune x vaut -. Celui dont la fortune était «et devient h ij^aiine

un avantage mesuré par

^ Ih — la.

Jamais compte n'a été ni ne sera réglé de la sorte; mais, grâce à * d'illustres approbations, la théorie de l'espérance morale n'a pas moins contribué m la célébrité de Daniel Bernoulli que ses admirables travaux de Plivsique.

33. Buffon a accru par son élo(|uence l'importance, je veux dire "^ le retentissement de l'idée de Bernoulli.

La théorie de lespérance morale est devenue classique, jamais le mot ne put être plus exactement employé : on l'étudie, on lenseigne, on la développe dans des livres justement célèbres. Le

succès s'arrête là, on n'en a jamais tait et n'en pourra faire aucun usage.

L'importance d'une somme d'argent diminue avec la fortune de celui qui la reçoit.

« L avare, dit Buffon, est comme le mathématicien : tous deux esliment l'argent par sa ijuantiti' uunitrKjue. L'homme sensé n'en considère ni la masse ni le nombre. Il n'j voit que les avantages qu'il peut en tirer. Il raisonne mieux que le mathématicien. L'écu que le pauvre a mis à part pour j)ayer un im|)ôL de nécessité et l'écu qui complète les sacs d'un financier n'ont pour l'avare et le mathématicien que la même valeur. Celui-ci les comptera par unités égales, l'autre se les appropriera avec un plaisir égal, au lieu que l'homme sensé comptera l'écu du pauvre pour un louis et l'écu du financier pour un liard. »

Un commentateur, qui n'est pas sans mérite, Quételet, a ajouté,

pour faire mieux comprendre une théorie qu'il expose et approuve :

« Ainsi looo'^" pour celui qui ne possède que 2000*^"" ont la même importance que Sgoogo^"" pour celui qui possède i million. »

Si, par ce (ier dédain de la fortune lorsque le nécessaire est assuré, on échappe au reproche d'a\arice. c'est pour en mériter un plus grave. Celui qui possédant un million en acquiert un second changera fort peu, pas du tout peut-être, les hal)itudes de sa vie.

Est-ce là, pour qui n'est pas avare, le seul fruit de la richesse?

Si l'homme sensé dont parle Huffon n'est pas un cynique égoïste, il pourra, sans thésauriser, faire bon iisage des millions (|u'on lui suppose. On pourra les doubler, les décupler et les doubler encore, sans ralentir la progression constante du bien qu'il [teut (aire. jN'a-t-il pas une famille à enrichir, des misères à soulager, de grandes œuvres à créer ou à faire naître? Il évitera, s'il est sage, de jouer gros jeu, mente à des conditions équitables; mais, s'il ne porte pas, si riche qu'il soit, igoogo*^"" |)ar jour à la roulette, la crainte de la perte l'arrêtera beaucoup plus que le mépris du gain.

CHAPITRE IV

THÉORÉVIK Dlî JACQUIiS BKRNOULr,[.

Hdu iuiiiii' est illiirl pmhleiiia, (|uo(l evulganduiii hoc loco proposiii, posh|iiam jam pci- viconnium pressi, et ciijiis liim noïiias, tiiiii Mimnia iilililas oum pari conjuncta (liflicultatp omnibus reliqiiis hnjus <locliinîe capilibus pondus el pi-Ptiuui supoi-addcrc polcsi.

.Iacobus Bernoilli.

53. Régularité observée des résultais du hasard. — .i'i. Probabilité des épreuves répétées. — bb. Evénements dont la probabilité est maximum. — bil Valeur approchée du produit i.2.3...n. - 57. Probabilité maxima dans une série d'épreuves. — .08. Probabilité d'un événement peu différent du plus probable. — 59. Fiction d'un écart représenté par une variable conlinue. — 60. Première

vérification. — (il. Seconde vérification. — (i'2. Calcul exact de la valeur probable du carré de lécart; elle ne diffère pas de la valeur approchée. — G3. Troisième vérification. — ()4. Calcul exact de la valeur probable de l'écart, elle n'est pas égale à la valeur approchée. — r,5. La probabilité pour que l'écart soit inférieur à une limite donnée est donnée par une intéiirale (jue l'on a réduite en Table. — 06. La probabilité d'un écart absolu inférieur à une limite fixe tend vers zéro; quand le nombre des épreuves augmente, c'est l'écart relatif qui tend vers zéro. — 67. La probabilité d'un écart a, sur a épreuves, dépend

de — : exemples numériques. — 68. Écart probable et écart moyen: leur rap-

port. — 69. Représentation du nombre probable d'arrivées en introduisant un facteur dont la valeur détermine la coniiance méritée par la formule. —

70. Ce qu'on doit entendre par jouer plus ou moins gros jeu, expressi<jn de laquelle dépendent les chances de perte sur un grand nombre de parties. —

71. Application du théorème de Bernoulli aux chances électorales. — 72. Différences entre les conditions réelles et les données du problème précédent. — /3. Le théorème de Bernoulli suppose la probabilité d'un événement invariable, il suppose aussi que cette probabilité ait une valeur objective; remarques sur cette question. — 74. Exemple d'une série d'épreuves faites avec probabilité variable.

03. Le hasard corrige le hasard. Une vague expérience révèle la justesse de cette maxime à ceux mômes qui en ignorent la B. 5

rigueur. Le mot rigueur n'est pas exagéré. Les résultais de l'action libre du hasard sont prédits avec certitude, sans gêner en rien ses caprices.

La certitude n'est pas celle d'un théorème de Géométrie. Il faut l'accepter dans le sens qu'indique Jacques Bernoulli, véritable inventeur de l'un des plus admirable> résultats de la Science nialhématique : In usu viiœ cUili ubi moraliter certum pro absolute certo habetur.

Vous sortez sans abri par un violent orage, vous serez mouillé, cela est certain.

La certitude du théorème de Bernoulli est de même sorte. I^a resseml)laMc.e va à l'idenlilé. La même objection peut s'appliquer avec autant, osons dire avec aussi peu de raison dans les deux cas.

La pluie, dites-vous, me mouillera, qu'en savez-vous? Chaque ooutte est dirigée par le hasard, aucune n'a de dt-stination ; rien ne prouvant pour aucune d'entre elles qu'elle ira s'abattre sur le promeneur, de quel droit affirmer de l'ensemble ce qui est incertain pour chacune?

Sans (]u<! l'assertion soit certaine à la manière du carré de l'hypoténuse, on peut la produire avec entière confiance. H y a plus : si deux promeneurs sortent ensemble et marchent sans se quitter sous la même pluie, non seulement ils seront mouillés tous deux, mais ils le seront également. Si l'un d'eux accusait le hasard de lui avoir donné la plus grosse part, il ne rencontrerait pas plus de créance que s'il affirmait n'avoir rien reçu.

Les événements fortuits ressemblent aux gouttes de pluie. Pourvu qu'ils soient assez nombreux, le hasard les distribue équitablement entre tous les cas possibles, sans en favoriser aucun. Tel est le théorème que nous allons démontrer avec précision et dont l'importance même justifiera i)lusieurs démonstrations.

J^a première repose sur plusieurs propositions, dont chacune par elle-même est de grande inq)orlance.

04. Probliîme XLVIL — La probabilité d'un événement est /?, celle de U événement contraire est q\ on fait [x épreuves dans les mêmes conditions. Quelle est la probabilité pour que le premier événement se présente n fois, le second]x — ti fois?

CHAP. IV. — THÉORÈME DE JACQUES BERXOULLI

Si l'ordre dans lequel les événenienls doivent se succéder élail assigné, la probabilité demandée serait (24) le produit de n facteurs égaux à p et de [j. — n égaux à q

L'ordre restant indéterminé, l'événement peut être décomposé • n autant d'autres, de probabilités égales, (|u"il y a de cond)inaisons possibles de p. objets dont n sont égaux à A et u — n a B. Ce nombre est

I . •>. . 3 . . . /i . 1 . .4 . 3 . . . u — n La probabilité demandée est donc

c'est le terme général du développement de (/;> + q^. Si l'on éciit

{ p -\- cj)\i- = pV- -^ lxi>V-~^ q -h l^Jlff L

le premier terme représente la probabilité pour que l'événement dont la probabilité est q ne se présente pas une seule fois: le deuxième, la probabilité pour (|ue cet événement arrive une fois; I le troisième, pour qu'il arrive deux fois, etc.

, La somme des k premiers termes est la probabilité pour que cet ; événement, dont la probabilité est q, arrive au plus k — i fois sur u épreuves.

La somme de tous les termes est la probabilité pour que l'évéj nement arrive au plus u fois, c'est la certitude, et la somme des I termes est égale en effet à l'unité, puisque p -\- q = i .

; oo. Problème XLVIIL — La probabilité d'un événement : est /?, celle de l'événement contraire est q\ on fait (jl épreuves \ dans les mêmes 'conditions. Quel est, pour chacun des deux événements, le nombre d'arrivées le plus probable?

11 faut trouver pour quelle valeur de n, a étant donné,

l'expression (2)

acquiert la plus grande valeur.

Si l'on range les expressions (2), c'esl-à-dire les termes du développement de {p-^qY-, suivant l'ordre des valeurs décroissantes de n, le rapport d'un terme au précédent est

ui — n p

La valeur cherchée de n doit rendre ce rapport plus grand que l'unité, et le rapport suivant, obtenu en changeant n en n — i, doit

être plus petit que l'unité.

Nous avons donc, pour déterminer w.

[JL /i -i- 1 p

(n ^ \)q > ixp — np, nq < \ip — np -

et, à cause de p -h q ^ '

n •;> ixp — q.

n < [xp -\- p.

Le nombre entier n est compris, d'après ces formules, entre deux limites dont la différence p -^ q' est égale à l'unité.

11 est donc déterminé.

On peut dire, en négligeant la fraction, que ^-P est le nombre le plus probable d'arrivées pour l'événement dont la probabilité est/?; le nombre d'arrivées le plus probable pour l'événement dont la probabilité est q est 'jl — ^/? = [j.^/.

La combinaison dont la probabilité est la plus grande est donc celle dans laquelle les événements se produisent en nombre proportionnel à leurs probabilités.

06. Pour rendre possible l'application des expressions trouvées

CHAP. IV. — THÉORÈME DE JACQUES BERNOULLI

pour la probabilité, il faut transformer les produits qui y figurent. I^e nombre des facteurs, quand les épreuves sont nombreuses, rendrait les calculs interminables.

La transformation repose sur la célèbre formule de Stirling

Les deux membres ne sont pas égaux, leur difterence grandit sans limite quand /i augmente; mais leur rapport tend vers l'unité, et cela suffit. Nous devons d'abord démontrer cette tbrnuile.

Posons

et ciierchons, lorsque n est grand, une valeur approchée de 'f (/?)■ On a rigoureusement, en changeant dans [i) n en n -{- \ et divisant la seconde équation par la première,

par conséquent,

(1 H — 1 j lorsque n est grand, diffère peu de -• Si donc on pose

la ("onction '^(/O? par '^ changement de n en /< -h i , se multipliera par un facteur peu différent de l'unité. Nous pourrons écrire

avec la certitude que 'i>(/i) varie lentement quand // augmente.

'^{n) varie lentement, mais il n'est pas constant et ne tend pas à le devenir. On a, en effet,

Posons, pour évaluer le second membre,

on en déduit

/5 = i — nl(i -\

el, en remplaçant /(i H) par les deux premiers lermes de son

développement en séiie, c'est-à-dire en négligeant — >

Par conséquent

et, en remplaçant e"" par les deux premiers ternies de son développement,

JNous pouvons écrire, en négligeant — ; ,

'^(n) 'in

On :i au même degré d'approximation

la fonction '^(^) varie donc, quand on néglige— ;> suivant la même

loi que <^n.

Si l'on pose

i) = v/nF(/i), par conséquent

, ,. • i-i - \ • ,1 I F (/i -I- I) la tonclion r(/î) variera très lentement, le rapport — ^ — se

réduisant à l'unité quand on néglige — ^ •

( )n pourrait conlinuer le même mode d'appcoximalion pour clicrclier la valeur approchée de F(/i), comme nous avons cherché celles de '^(/i) el de '}(/i); mais il est permis de s'airéter, parce

1' . n ' I • 1 I ^ Fi /i H- I)

([ue, d après 1 évaluation obtenue pour le rapport — r^ , on

peut démontrer que F{n) tend vers une valeur constante par laquelle on peut dès lors le remplacer si n est très grand.

— se réduisant a l unité quand on nefrlio-e —-, on peut

poser

F (n -h I) _ X|_ Pin) ~ n-'

\f ne grandissant pas iiidélininient avec /?, nous en déduirons, en

changeant la valeur de n,

Fin -+-/?) F{ n — p — I ;

n ^ p — ly-

>.,, Ao, ..., Xp n'augmentant pas sans limite avec />. En multipliant les équations précédentes, on a

('l H-Ij-

n — p — ly

le second membre, et par conséquent le premier (jui lui est égiil, tend vers l'unité lorsque, n étant de plus en plus grand, on donne Àp une valeur quelconcjue, grande ou petite. On a, en effet,

h tendant vers zéro lorsque n augmente. Le logarithme du second membre de (3) f^st

n ^ D-] L (n -H yy — I)-

et, à cause de (4),

(^elle expression tend vers zéro quand n augmente, parce que la série dont le terme géuéral esl — est convergente; la somme des termes qui, dans celte série, suivent -- est donc très petite, quelque loin qu'on la prolonge, et elle reste très petite quand les / termes sont multipliés par des facteurs qui ne grandissent pas il sans limite. '

Nous pouvons donc poser, en nommant G la limite constante vers laquelle tend F(/?),

s. . .n = Gn"e-"\/n

Le théorème, sous cette forme, était connu de Moivre; Stirling a trouvé la valeur de la constante.

On a. d'après un tliéorème célèbre de WalUs,

TT _ '2 .> 4 4 in in

que l'on peut écrire

TT _ ■x'*"(i .■j'..3...n)^

Si, dans cette formule, nous remplaçons 1.2. 3... a? el i.2.3...:in par leurs valeurs déduites du théorème de Moivre,

n = Ge ^" (■>. n y^" }/■}. n

elle devient

et, lorsque n devient infini,

G = y-îTZ.

CHAP. IV. — THÉORKME DK JACQUKS HERNOULLI. 73

Nous pouvons écrire enfin (5) 1 . 2 . 3 .../* = e '" n" ^j.izn.

Pour éprouver rexaclitude de cette formule, véritablement indispensable dans les calculs de probabilités, faisons n=^io] nous trouverons

Le rapport de ces deux nombres est i , 004 i " •

37. Les probabilités de deux événements contraires étant p et q, la combinaison la plus probable, sur a épreuves, est celle dans laquelle le nombre d'arrivées du premier événement est [jl/> et celle du second '^q.

Cette probabilité maxima est

L'application de la formule de Stirliog donne pour valeur approchée

e'V-P (\t-p)^" y-'.-'ij) e ['■'/ ([j. q)'^'l sj 'i. r,a q ce qui se réduit, en ayant égard à la condition /> -i- (^ =: i , à

\J iT.]xpq

Celte probabilité, la plus grande de toutes, contient y/ij. en diviseur. Elle tend vers zéro, quand le nombre des épreuves augmente.

08. Cherchons la valeur approchée du terme dans lequel l'exposant de p est !j./> — /i, en supposant ce terme assez voisin du terme

maximum pour que - et même —^ soient petits.

L'expression exacte est

x.pV-i'-'iq

1 . 2 . 3 . . . (\xp — h) . \ . 1 . i . . . (\j. q -\- h) Le théorème de Stirlin» la réduit à

^■i~lipq -J.;,_A + i ix^ + ^-

On a, en négligeant —,

V f^/?/ V ' ■i/\ \xp 2iX-'p-'

\xq iiL^q'^ et, par consécpient, en négligeant — >

On a

P '] ~ pq'

et l'on concinl

le second facteur diffère fort peu de l'unité; on peut le supprimer et remplacer le ternie (8) par

y'iT^]xpq

La démonstration de cette Cormuie suppose h petit par rapport à p.; on l'étend cependant à toutes les valeurs de A, sans qu'il en résulte, lorsque [j. est grand, aucune erreur sur les chiffres.

CHAP. IV

La (onclion

— THEOREMK DE JACQUES BERNOULI.I.

décroît, en effet, lorsque h au^anente, avec une telle rapidité que sa valeur nutiiéri(jue n'a plus dintluence sur les chiff'res conservés. La piubahililé dans l'expression de lacjuelle on l'introduit est elle-même d'une extrême petitesse et, quoicjue la formule acceptée n'en soit plus la valeur approchée, la substitution de deux quantités négligeables Tune et l'autre est sans inconvénient.

Ou élend même l'expression approchée <le la probabilité à des valeurs de h pour lesquelles cette probabilité n'existe pas; A, en effet, ne peut être plus grarxl (jue 'j.p. et on le fait varier sans que cela exerce d influence sur les chiffres, entre — x et x.

59. Par une (îction qui rendra les calculs plus faciles, nous remplacerons le nombre entier h par une variable continue, en assignant à un écart compris entre :; el :; -j- dz la probabilité

(lo)

Yi-Kiipq

e '^Pl ch

Ce mot écart doit être délini. On considère la valeur ap du nombre d'arrivées de l'événement dont la probabilité est/? comme une valeur normale, la plus probable de toutes, et les autres sont définies pai- leur difTérence avec celle-là. Cette différence prend le nom d écart.

Si, par exemple, on fait 10000 épreuxes à]ile ou face et (|ue pile se présente 0021 fois, Vécart sera 21. Si Ion jette deux dés 36ooo fois et que sonnez se présente 990 t'ois, [écart sera — 5.

La substitution de la fonction continue (10) à l'expression qui convient aux écarts entiers, les seuls possibles, est comparable à celle d'une courbe à un poljgone.

Supposons, par exemple, u = 1 000, /> =^ g z= ^.

La formule (9) devient, pour h = 40,

pour h = 60,

)our h = 100.

v/iGooir

Y 1 000 TI

e 20 = 0,0000000005'2006.

L'influence d'un nombre aussi petit dans les formules est insignifiante; on peut le supprimer s'il existe, l'introduire s'il n'existe pas, le remplacer par un autre de même ordre, les chiffres utiles du résultat n'en seront pas modifiés.

60. Quelques épreuves justifieront la confiance accordée à la | formule (10).

La probabilité d'une erreur comprise entre z el z ^ dz étant

il est nécessaire (|ue la somme des probabilités de toutes les erreurs possibles représente la certitude; on doit donc avoir

yi'K\i.pq J—x, Si l'on pose, en effet.

cette intégrale devient

z Y "y. \^pq

~ f e-"-dt.

égale à l'unité en vertu d'un théorème très connu.

L'épreuve réussit mieux qu'on n'était en droit de l'espérer; toute formule approchée doit en etlèt laisser craindre une erreur. Le résultat, ici, est rigoureusement exact.

CHAP. IV. — THÉORÈMK DE JACQUES BERNOULLI

61. Cherchons, d'après la formule (lo), la valeur probable du carré de l'écart, c'est-à-dire l'espérance mathématique de celui qui doit recevoir une somme égale à z^. Cette espérance est la somme des produits de chaque valeur de z'^ par sa probabilité : elle a pour expression, d'après notre formule,

Posons

la formule devient

yiTcixpq t

^■>- v-pq

pjL r e~.u-^

e ^^P'Iz^dz.

dt

lipq.

62. Nous allons chercher directement la valeur exacte de l'espérance malliémati(|ue dont la formule (ii) donne la valeur approchée. Posons

{ p -r q)V- = pV- -+- AiyoH-"ig' -+- A.,p\^~-^q'^-n . . .-h \^aP"^g'^^^

Les termes de cette formule représentent rigoureusement les probabilités dont (g) donne la valeur approchée. La probabilité qui correspond à un écart h est

ou 1 on a

n == ixq — /(, /(= ixq — n.

L'espérance malhémalique de celui qui attend une somme égale à h- est donc

(11) Ziiiq- n)'-\np\^-"q",

la somme S s'élendant à toutes les valeurs de n. L'expression (i i) peut s't'crire

(12) I.u.^-q'^\„p?--"q"— ■i'L\iqnXnP'^~"q"^ ^ù n^ Anp\^-" q'^. Ou a

puisque l'on multiplie pariji.^^^ tous les termes d'une somme égale à l'unité.

L'identité

(l3) (p -^ q)^ ^ I.\npV--"q"

donne, en égalant les dérivées par rapport à q, préalablement multipliées par q,

\i{p ^q)V-~^q = I.nk„pV--"q",

et, en remplaçant (p -\- q) pai" l'unité dans l'équation précédente, qui est une identité, on en déduit

I.n- \,ipV--^q"- = [ji(rjL — 1) ^2 _)_ u

Ces formules réduisent la somme (12) à

lJ.-q- — ■! ;j.2 q-^ + ixi [x — \) q^ ^ ixq = ijl^ (1 — q) = \t.pq.

C'est le résultat obtenu ((31). La substitution des valeurs approcbées aux valeurs exactes n'a donné aucune erreur.

Il ne peut pas toujours en être ainsi. Faisons une troisième épreuve.

63. Cherchons la valeur probable de l'écarté considéré en grandeur absolue; cela est nécessaire, car sans cela les termes négatifs détruiraient les termes positifs et le résultat serait nul.

La valeur probable de :;, d'après la formule adoptée pour repré-

senler la probabilité dune erreur c, est

'^ / ze ^-\^P'1 dz.

L'intégration s'étend de o à l'infini seulement, parce que nous ne considérons pas les valeurs négatives, dont on tient compte cependant en introduisant le multiplicateur 2.

Posons

y/i [ipq

L'intégrale devient

telle est l'expression approchée de la valeur probable de :;.

6i. (Calculions exactement la valeur probable de l'écart.

La probabilité d'un écart égal à :; est le terme du développement de (p -f qY, dans lequel l'exposant de p est a/; -r ; et celui de

q, 'j.q — c

Il faut multiplier ce terme

par z, afin de former l'espérance mathématique de celui qui attend une somme égale à z. On a, à cause de p -\- q =^ i ,

M yD -j_ - et <j.q — z sont les exposants de p et de q dans le terme de (/> -+- q)^. Or, multiplier un terme

par

'^q — ^p^ pq \--}\^

c'est prendre la dérivée par rapport à p, en retrancher la dérivée pai- ra|)port à q et nndtiplier la différence par /?^.

Nous devons donc prendre les termes de développement de

{p -\- q)^ pour lesquels ;; est positif, c'est-à-dire

/)!A^îa/j!^-'y+ ^—7 p\^-'-q'-^...-\ ^ pV-l>qV-<i,

'•■^ 1 .2.3. . .}i./D. I .'2.3. . .[JIÇ '^ ^ '

et reliancher la dérivée par rapport à q de la dérivée par rapport à /?, pour multiplier ensuite le résultat par pq.

Les termes, on l-e voit aisément, se détruisent deux à deux : la dérivée par rapport à q du second est égale à la dérivée du premier par rapport à yo ; la dérivée du troisième par rapport à ^est la dérivée du second par rapport à p, et ainsi de suite; il ne reste que la dérivée du dernier par rapport à p.

i.p I .2.) . . .\iq

pV-PqV-1 iigp.

C'est le produit par iipq du terme maximum, c'est-à-dire, d'après la valeur approchée (57) de ce terme,

¥-pg__ ^ \^Vpq

yji \XT,pq y/2 TT

Il faut doubler ce résultat, puisque nous n'avons pris que les valeurs positives de -s : il s'accorde avec l'expression obtenue (63).

60. Nous pouvons donc accepter avec confiance l'expression (9) pour la probabilité d'un écart égal à z,

La probabilité pour que 3 soit inférieur à une limite donnée a, c'est-à-dire pour qu'il soit compris entre — a et 4- a, sera

\/l\iT.pq J_a.

e -!J-/"7 dz

ou, en posant -=::^=zz = t^ v/TjI/^

('4) ro^ = — / e-'- dt.

Cette probabilité s'obtiendra dans chaque cas particulier à l'aide

de la Table des valeurs de la fonction

que Ton trouvera à la fin du Volume.

8(^), on peut le voir à l'inspection de la Table, tend rapidement vers runité; on a

66. On peut, sans consulter la Table des valeurs de la fonction 8, drduire de la formule (9) d'importantes conséquences.

L'écart zéro est le plus probable. Il a cependant une probabilité infiniment petite lorsque le nombre des épreuves devient infini.

La formule qui représente la probabilité d'un ('cart inférieur à a s'annule pour a == o. Il faut remarquer (pi'en substituant une variable continue à l'écart, qui nécessairement est entier, nous devons, pour représenter l'écart nul, prendre tout l'intervalle entre a = o et a= 1. Nous n'avons plus alors une probabilité rigoureusement nulle, qui devrait diminuer la confiance inspirée par la formule.

Si l'on assigne à a une valeur déterminée, quelque j-rande qu'elle soit, la probabilité pour qu'il ne la dépasse |)as tend vers zéro lorsque p. augmente sans limite.

On peut regarder comme certain, par consé(|uent, que, le nombre des épreuves croissant indéfiniment, V écart croîtra sans limite. La probabilité pour (pril reste au-dessous d'une limite donnée est infiniment petite.

Ce résultat i\xe le sens du beau théorème de Bernoulli; l'écart relatif est de plus en plus petit, l'écart absolu de plus en plus grand.

67. l^a certitude, quand les épreuves se multiplient, de voir l'écart absolu grandir sans limite peut se (\émon\xQv a priori, indépendamment de toute formule.

Le résultat le plus probable de]x. épreuves successives est l'arrivée u/> fois de l'événement dont la probabilité est/?. Cette pro-

babilité maxinium, quoique plus grande que toutes les autres, | tend vers zéro; elle est (37) |)ro|)ortionnelle à -— •

Les autres, (jui sont plus petites, tendent a fortiori vers zéro; et, si l'on en prend un nombre désigné, quel qu'il soit, leur somme ne peut manquer de tendre vers zéro lorsque, ce nombre restant fixe, UL augmente indéliniment.

68. Il faut insister, en donnant un exemple, sur cette distinc- '

tion entre l'écart absolu, qui doit grandir, et l'écart relatif, qui lond vers zéro. 1

On joue à pile ou face. Combien doit-on faire d'épreuves pour que la probabilité d'obtenir pile ou face, sans préciser lequel, un million de fois au moins de plus que l'autre surpasse o,ui ?

il faut déterminer ul par rt"(|uation

— - j e-^' dt — 0,99.

v/it .."o

On trouve dans la Table de la fonction B(0

Nous poserons donc

on en déduit

[j, = 597 21 1 millions.

69. La probabilité r^a d'un écart plus petit que a est, en général,

v/'2 \xpq) '

il dépend du ra|)port ~ et tend rapidement vers l'unité quand ce

rapport augmente. Si l'écart relatif - reste constant, —= ^ y/u. - 1 r " [i. /a \^

augmentera sans limite, et la probabilité d'un écart moindre que

a se rapprochera de la certitude.

CHAP. IV. — THÉORÈME DE JACQUES BERXOri.I.l. 83

Cherchons, (3ar exemple, le nombre d'épreuves qu'il faut tenter à la roulette pour avoir 99 à parier contre 1 de voir le zéro sortir plus d'une (ois sur quarante en moyenne. Le nombre de sorties le plus probable est une sur trente-sept; si le zéro sort moins d'une fois sur quarante, l'écart est négatif et plus grand que

Nous avons

La probabilité d'un écart plus grand que a, si l'on pose

S/>.\xpq

est donc 0,02: le signe étant donné, elle esl 0,01. Nous poserons donc

En prenant

on trouvera

S/-X IXJHJ

(hielque petit que soit l'écart relatif assigné, on pourra faire un nombre d'épreuves assez grand pour rendre la probabilité de ut-pas Tatleindre aussi grande que l'on voudra.

70. Deux écarts remarquables ont reçu des noms qu'il faut connaître.

On a

L'écart a défini par l'équation

\/l}i.pq

a donc probabilité égale d'être ou de ne pas être surpassé.

Cet écail

0,4:<i9'^ \/'>v-pq

se nomme Vécarl probable sur u. épreuves.

L'écart moyen est la valeur probable de l'écart; il a pour valeur (64)

-4 \/v-Pq = 0)79 789 sll^-P^h

Le rapport de l'écart probable à l'écart moyen est 0,8463. Ils sont l'un et l'autre piopoitlonnels à la racine carrée du nombre des é|)reuves.

71. On représente souvent le nombre d'arrivées de l'événement dont la probabilité est/?, sur u. épreuves successives, par

En assignant à q une valeur numérique donnée, la probabilité pour que le nombre d'arrivées soit compiis entre les limites indiquées par cette formide est un nombre fix -, indépendant de [j., de p et de q.

Dans une série quelconque d'épreuves, il y a un à parier contre un de voir le nombre d'arrivées de l'événement dont la probabilité est p compris dans les limites

neuf à parier contre un c|u"il sera dans les limites

[i./> ± 1 , 1 63 v/2 \i-pq, et mille à parier contre un qu'il ne sortira pas des limites

72. La formule (i4) permet de définir avec précision ce qu'on doit entendre par jouer plus ou moins gros jeu.

Pierre joue 1000 parties, l'enjeu est i*^""; Paul en joue 100, mais l'enjeu est Io'^^ |

Tous deux peuvent perdre looo^'". Ils courent les mêmes risques,, ^

CHAP. IV. — THÉORÈME DE JACOIES BERNOUI.LI

mais n'j sont pas également ex[)osés. Supposons un jeu é(|uitabh; ; la probabilité de gagner est/>, celle de perdre est q. La mise de Pierre est a, celle de son adversaire est 6, et l'on a

pb = qa.

Si Pierre gagne 'xp -f- h parties, il en perdra <xq — h\ son bénéfice sera

{[xp -^ /i) b — {[xq — h) a — /i(a -r- b).

Il est []ropor tionnel à h.

La probabilité pour que la somme perdue ou gagnée soit inférieure à /i(« -h 6) = S est donc

_{ a -h b } \/ ■>. xpq

La situation laite aux joueurs par les conditions (\u jeu et par le nombre des parties est déterminée par le produit (« -t- 6) y u/^y.

Pierre ex[)Ose lo'^'par partie et joue 20000 parties, avec chance égale de gagner ou de perdre.

Paul expose également 1 o"", mais sa chance de gain est ,j^ seulement; il doit, en cas de gain, recevoir 350^". Combien Paul doil-il faire de parties, à ce jeu é(|uiiable, pour courir les mêmes risques que Pierre?

Le nombre a des parties est donné par Téquation

La situation de Paul, qui joue 5-i parties, serait exactement la même que celle de Pierre qui en joue 20000, si les formules étaient rigoureuses; elles ne sont qu'approchées. Il ne faudrait |)as les appH(|uer à de petits nombres.

73. Supposons que, dans un pavs qui compte 10 millions d'électeurs, on en désigne 20000 par un tirage au sort, pour leur faire élire un représentant. En supposant que le pajs soit partagé

entre deux opinions, 4000000 d'un côté et 5500000 de l'autre, quelle est la probabilité pour que le candidat élu appartienne à la minorité.

Le problème est identique à celui-ci :

La probabilité d'un événement est 0,45, celle de l'événement contraire 0, 55 ; on fait entre eux 20000 épreuves, quelle est la probabilité pour que l'écart dépasse 1000 en faveur de V événement le moins probable.

La combinaison la plus probable donnerait à la minorité qooo électeurs sur 20000. Pour que le hasard la transforme en majorité, il faut un écart supérieur à 1000, dont la probabilité s'évaluera en divisant par 2 l'indicalion fournie' par la formule (i4)? (lui se rapporte à un écart inférieur à a dans un sens ou dans l'autre.

La probabilité pour avoir un écart supérieur à 1000 est

0(io) diffère tellement peu de l'unité que l'événement peut être regardé comme absolument impossible. La probabilité de gagner deux quines de suite à la loterie serait beaucoup |)lus grande.

L'expérience semble démentir la théorie. Les minorités sont représentées, et, sans qu'il y ait aucune relation entre leur nombre dans le pavs et celui de leurs élus, celui-là est loin d'être nul.

Le calcul précédent suppose, en effet, que, tous les électeurs étant inscrits sur une seule liste, on y prenne 20000 noms ;iu hasard pour com|)Oser le collège électoral. Il n'en est pas ainsi; les électeurs d'un même département, d'un même arrondissement quelquefois ou d'une même ville ayant des intérêts communs, ne

pouvant manquer de subir les mêmes influences, ne sont nullement assimilables à un groupe de votants désignés indépendamment les uns des autres sur le pays tout entier.

74. Lorsque la probabilité d'un événement est connue, on pent prédire avec presque certitude la valeur approchée du nombre d'arrivées de cet événement sur un nombre connu d'épreuves.

Jl faut cependant faire d'importantes réserves.

Le théorème reste vrai quand la probabilité de l'événement est

inconnue. Le rapport du nombre des arrivées de l'événement au nombre total des épreuves s approchera certainement de celte probabilité inconnue, si l'on augmente sans cesse le nombre des épreuves. Si, par exemple, on puise dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires, en remellanl après chaque tir.i^^e la boule qui est sortie, le rapport du nombre de boules blanches sorties au nombre des tirages- convergera vers la probabilité assignée par la composition de l'urne.

Mais deux conditions sont nécessaires : la probabilité ne doit pas changer pendant les épreuves, et elle doit avoir une valeur déterminée.

Un événement incertain n'a-l-il pas toujours une probabilité déterminée connue ou inconnue?

Il fiuit se garder de le croire.

Quelle est la jjrobabililé pour qu'il pleuve demain?

Elle nexisle pas.

Aon pas parce qu'elle varie d'un jour à l'autre avec l'étal du ciel et la direction des vents; mais parce (jue dans aucune circonstance elle n'a de valeur objective, \.\ même pour tous ceux qui l'évaluent sans se tromper.

Il pleuvra ou il ne pleuvra pas, l'un des deux événements est certain, dès à présent, et Tautre impossible. Les forces physiques d(»nl dépend la pluie sont aussi bien déterminées, soumises à des lois aussi précises que celles qui dirigent les planètes.

Oserait-on demander la probabilité []our qu'il y ait éclipse de lune le mois prochain?

Un homme est âgé de quarante ans, quelle est la probabilité pour qu'il vive dans dix ans?

Ni révénement cette fois, ni révénement contraire n'ont, dès à présent, certitude égah; à celle d'une éclipse, mais la piobabilité n'a pas davantage, pour cela, de valeur objective, indépendante des renseignements connus et du bon jugement de celui qui en fait usage.

Le roi de Siam a quarante ans, quelle est la probabilité pour qu'il vive dans dix ans? Elle est autre pour nous que poui ceux qui ont interrogé son médecin, autre pour le médecin que pour ceux qui ont reçu ses confidences; très différente enfin pour des conjurés cpii prendraient leurs mesures pour l'étrangler le lendemain.

Toutes ces prohabilités sont subjectives, il n'en existe pas d'objective. L'esprit se refuse à concevoir une urne contenant des boules blanches et des boules noires que l'on puisse composer cha(|ue malin de telle sorte que la chance de vie pendant la jour-

née puisse élre remplacée, pour un itidividu désigné, par le tirage d'une boule dans celte urne.

Les cas précédents ne peuvent être pris pour exemple de rapj)lication du théorème de Bernoulli. Que le roi de Siam meure ou vive, il est im|)Ossible de renouveler l'épreuve.

Il faut considérer, au lieu d'un événement isolé, une classe d'événements définis tous ensemble sans distinction. La réponse alors est moins évidente.

Quelle est la probabilité pour qu'il pleuve dix l'ois à Paris pendant le mois de janvier? On ne dit pas de quelle année.

Pour qu'un habitant de Paris âgé de quarante ans vive encore dans dix ans? On ne désigne pas Ihabitant.

Ces deux questions, semblables en apparence à celles qui ont été posées d'abord, en sont réellement très dillerentes. Nous réunissons en eflet, sans distinguer entre eux, tous les jours du mois de janvier de toutes les années et tous les hommes âgés de quarante ans, au lieu de désigner un seul jour et de s'occuper d'un seul homme.

Supposons que les progrès de la Science permettent la prédiction des jours de pluie avec une certitude égale à celle des éclipses. Le Tableau dressé à l'avance soustrairait le problème à la théorie du hasard, mais pour l'y faire rentrer s'il s'agit d'un jour indéterminé du mois de janvier choisi dans une année indéterminée.

L'assimilation à une urne devient possible alors. Le nombre des boules est le nombre des journées de janvier pendant un

grand nombre de siècles; celui des boules blanches, le nombre des jours de pluie.

Une différence subsiste. Dans les épreuves relatives aux jours de pluie, on ne peut ni agiter les boules ni les remettre dans l'uine. En termes plus clairs, l'événement observé un jour n'est pas sans influence sur celui du jour suivant.

S'il s'agit des chances- de mort pour un Français âgé de quarante ans, la question est moins évidente encore. On ne peut plus supposer le tableau des événements dressé à l'avance avec certi-

tude ni accepter, a priori^ rassiniilalion avec les tirages dans une urne.

Il n'est pas permis d'affirmer la régularité de la proportion des décès dans une grande ville ou même dans un grand pays.

Celle régularité est révélée par la statistique ; elle est très remarquable, mais nullement nécessaire.

Le rapport du nombre des décès à celui des survivants est, pour un âge donné, à peu près invariable.

Le ra|)port du nombre des naissances masculines à celui des naissances féminines est constant à très peu près, à toutes les époques et dans tous les pavs.

Il serait im|)Ossible de le démontrer n priori.

Le nombre d'Iieclolitres de blé récoltés dans un département varie d'une année ,'i l'autre.

Pourquoi celui des naissances est-il invariable?

On ne saurait en dire la raison.

t^a constance des rapports, (|iiand elle est constatée, donne-t-elle le droit d'assimilei- les chances «les décès et celles des naissances pour l'un et l'autre sexe à des tirages faits dans une urne de composition invariable?

La conséquence n'est nullement permise.

Les tirages au sort, si l'urne est composée pour cela, seront d'accord, en moyenne, avec la statistique. C'est une vérité identi(|ue.

Mais de l'égalité des moyennes peut-on conclure celle des chances d'écart? Ce serait admettre ce qui est en question.

Substituons aux hommmes d'une tnème ville les moutons d'un même troupeau et faisons la statistique de l'abattoir; un marché fait pour un grand nondjre d'années règle le nombre des victimes, , la régularité est parfaite. On peut composer l'urne dans laquelle on tirera avec certitude, pour un nombre suffisant d'épreuves, un nombre moyen de boules noires égal à celui des moutons sacrifiés chaque jour.

L'assimilation n'ira pas plus loin. Le nombre des boules noires variera d'un jour à l'autre ; le nombre des moutons sera invariable.

On fait une expérience sur les dés. On les introduit dans un cornet, on agite, on les lance et on note le coup. L'épreuve répétée 20000 fois confiime les prévisions théoriques. Tous les cas se pro-

duisent proporlionnellement à leurs probabilités. L'expérimentateur se fatigue; une seule chose importe après tout, c'est de mettre le hasard à l'épreuve. Il dicte les points sans jeler les dés, il s'interdit le choix, le hasard parle par sa bouche.

Obtiendra-t-il les mêmes résultats? Aura-t-il looo doublets environ sur 6000 épreuves? Le nombre des points impairs serat-il peu différent de celui des points pairs? Il serait téméraire de l'affirmer. L'improvisateur des coups de dés peut se dire : il J a longtemps que je n'ai appelé le double six, l'impartialité veut qu'il ait son tour. Le sort n'a pas de tels scrupules, et il pourra arriver qu'une trop grande conformité aux pi'oportions prévues trahisse l'intervention d'une cause perturbatrice.

Si l'on jette deux dés 6000 fois de suite, le nombre le plus probable des doublets est 1000, l'écart probable est

0>47693 \/ ~:p- == i9547^>^^ et l'écîart moyen ^\/5ooo = 23,0829.

Si, en faisant louo séries fie 6000 coups, tous les écarts sont intérieurs à uo ; si la valeur moyenne des écarts, au lieu d'être 23, est inférieure à 10, on pourrait affirmer avec une certitude piesque inlaillible l'existence d'une cause régulatrice corrigeant les écarts du hasard.

75. Lorsque la probabilité d'un événement est variable d'une épreuve à l'autre, le théorème de Bernoulli n'est plus appliiiable.

La généralisation proposée par Poisson sous le nom de loi des grands nombres manque non seulement de rigueur, mais de précision. Les conditions supposées dans l'énoncé échappent par le vague à toute appréciation mathématique. On peut, dans un cas

simple et digne d'intérêt, appliquer le théorème de Bernoulli, malgré la variation des chances pendant les épreuves.

Supposons une urne contenant un nombre \ de boules blanches ou noires, la probabilité d'en extraire une boule blanche est yo, celle d'extraire une boule noire est q.

On fait [j. tirages sans remettre dans l'iu'nc les boules qui en sortent. Si À et \^ sont de grands nombres, il est très probable que le rapport du nombre des boules blanches sorties a celui des

boules noires différera peu de -• En ne remettant pas les boules,

CHAP. IV. — TMÉORKME DE JACQUES BE RNOLLLI. 9I

on change à chaque épreuve la probabilité de choisir une boule blanche; mais ce changement est, en quelque sorte, un régulateur de la proportion prévue f)ar le théorème de Bernoulb. Quand la proportion d'une des couleurs est inférieure à ce rapport normal, la probabilité pour elle augmente et les épreuves suivantes ont plus de chance pour corriger l'irrégularité.

On peut préciser cet indication.

Soient À le nombre total des boules, Ip celui des boules blanches, Aq celui de-^ boules noires. La probabilité de tirer sur [X épreuves 'j.p — k boules blanches et jjir/ + k boules noires est, comme on le v(jit aisément.

[1.2.3. . .(À — ;j.)/? — AJ[i. >,.3. . .(X — (jij^y -H Aj'

par leurs valeurs déduites de cette formule, on trouve

\/\-\ipq y ^ K C'est précisément la formule qui convient au cas où l'on ne

remet pas les boules, dans la(|uelle le nombre [j. des tirages est

I • 1 • ' ^> — I^ multiplie par — r

Si l'on tire la moitié des boules sans les remettre, la probabilité d'un même écart absolu entre le nombre des boules blanches et le nombre le plus probable sera la même que si l'on tirait un quart seulement en remettant les boules.

CHAP. V. — DÉMONSTRATIONS I)i: THÉORÈMK DE BERNOULLI. 98

DÉMONSTRATIONS ÉLÉMENTAIRES DU THÉORÈME DE BERNOULLI

L'emploi «lu calcul est comparable à celui d'un inslrumenl dont on connaît exaelement la précision.

Foi'RIER.

76. Lorsqu'un événement douteux peut se présenter de plusieurs manières et qu'une certaine grandeur résulte de cliaque

épreuve, la valeur probable difTère de moins en moins de la moyenne des valeurs obtenues. — 77. Application à une série de parties faites à un même jeu de hasard. — 78. Cas où le jeu est équitable, les énoncés se trouvent en défaut. — 79. Epreuves successives de deux événements contraires. — 80- Troisième démonstration du théorème de Bernoulli.

Le calcul dool parle Foiirier est celui des moyennes

Lorsqu'un événement douteux peut se présenter de plusieurs manières entre lesquelles prononce le hasard et qu'une certaine grandeur résulte de chaque épreuve, la valeur probable définie (47) différera de moins en moins de la moyenne des valeurs obtenues.

La probabilité d'une différence supérieure à un nombre donné, si petit qu'il soit, tend vers zéro quand le nombre des épreuves augmente.

Soient A,, "k-i, • • • , ^H les valeurs possibles d'une grandeur, y»,, P2. . . , pn leurs probabilités. La valeur probable de la grandeur est par définition

/)lXi-|-/?2'*^2-+-. . ■^Pn^'^n

Si l'épreuve renouvelée un i^rand nombre de fois donne successivement les valeurs ^,, j?^, . . . , j?^, la moyenne arillimétique

différera peu, si a est grand, de la valeur probable G.

Rien n'est certain, bien entendu, mais la valeur probable du carré de la dilTt-rence

tend vers zéro lorsque ij. augmente. Lorsque la valeur probable d'une grandeur tend vers zéro, on n'en peut rien conclure. De grandes valeurs positives peuvent avoir grande probabilité, aussi bien que les grandes valeurs négatives qui les compensent; il en est autrement quand la valeur probable d'un carré est très petite. Toutes les valeurs possibles étant de même signe, aucune ne peut à la fois n'être pas très petite et ne pas avoir une probabilité très petite. La probabilité pour que la valeur surpasse un nombre donné tend nécessairement vers zéro.

Nous considérerons, dans le cas actuel, l'expression essentiellement positive

pour démontrer que sa valeur probable tend vers zéro.

L'expression (i) peut être remplacée, en adoptant une notation bien connue, par

A,, A2, . . . ,).,/ désignant, comme on l'a supposé, les valeurs possibles de X,, .^2, . . . , Xn et/),, p^, . . . , pa leurs probabilités, la valeur probable de x] est

Représentons-la par H; x'\, x\, ..., x^ ont même valeur pro-

bable, j3uisque rien ne les distingue. La valeur probable de I,xf est, donc uiH.

La valeur probable de xiXi' esl (48) le produit de la valeur probable G de Xi par la valeur égale G de Xi'.

La valeur probable de Xi est G.

i_,a valeur probable de la somme (2) est donc

Il ,U2

qui se réduit à

Quels que soient H et G, elle tend vers zéro lorsque u. augmente.

Le théorème précédent a de nombreuses applications

Pierre joue à un jeu de hasard. S'il gagne, il recevra une somme b, enjeu de son adversaire; s'il perd, il dotmera une somme a. ly,i probabilité de gagner est p, celle de perdre esl q. Le gain probable à chaque partie est

pb — qa = G.

La valeur probable du carré du gain est

pù-^^q{—af^pù'^—qa^^ H.

Si donc, après u parties, on nomme X le gain, positif ou négatif, résultant de ces [j. paities, la valeui- probable de

est

=: ' '- '- '- = pq

[ji \y [J-

En multipliant l'expression (4) par jx-, la valeur probable sera multipliée par |j.^, et

]xpq{a-^ 6)2

est, par conséquent, la valeur probable de

Si Ton représente ce carré (5) par z^, on aura

(6) X =]±(ph — qa) ±t.

Le gain X fait sur a parties à un jeu quelconque est donc représenté par la somme de deux termes : l'un, complètement connu, proportionnel au nombre des parties jouées; l'autre s, qui dépend du liasard et dont le signe même est inconnu.

Un tel énoncé, si l'on n'ajoulait rien, serait insignifiant. Ignorer dans une somme la valeur et le signe de l'un des termes, c'est ne rien savoir siir'la somme. Mais, sans connaître e, nous avons sur lui un renseignement. La valeur probable de e^ est [jL(a + b)'-pq, elle est proportionnelle à a; celle de s est donc de l'ordre de sj^et le second terme de (6) deviendra de plus en plus petit par rapport au premier lorsque [x croîtra sans limite.

Nous comparons, il est vrai, la valeur certaine du premier terme à la valeur probable du second. Nos conclusions peuvent être en défaut; mais, lorsque pi. augmente, la probabilité pour qu'il en soit ainsi tend vers zéro. Il faudrait que le hasard rendît t-infiniment grand par rapport à sa valeur probable.

Si Ts désigne la ptobabiliié d une valeur supérieure à a, il en résulte dans la valeur probable de cette grandeur essentiellement positive un terme roa-, cpii deviendrait à lui seul plus grand (|ue

la somme dont il fait partie, si, lorsque a augmente, ra me devenait pas très petit.

En réduisant l'évaluation du gain fait en o. parties au premier terme

(7) X = \x(pb — ga),

on pourra affirmer avec une certitude croissante que l'erreur relative tend vers zéro lorsque y. augmente sans limite.

Le cas oii le jeu est équitable doit êtie traité à part

On a alors

pb — qa =: o,

et le théorème est en défaut.

CHAP. V. — UÉMONSTRVTIONS DL THKORÈME DE BERNOULLI. 97

Le premier terme de la valeur (6) Je X élanl nul, le gain fait en ijL parties se réduit à

On ne peut rien afiirmer sur son signe. Quelque grand que soit a, Pierre, à un jeu équitable, peut perdre ou gagner. La valeur probable du carré du gain positif ou négatif est proportionnelle au nombre des parties. Ou peut donc tenir pour certain

qu'après un grand nombre de parties la valeur moyenne — du gain fait'à chaque |)artie par celui des joueurs que le hasard a fa-

vorisé sera très pelite. La valeur piobable de - — , cairé du aain mojen par partie, est en efifet

\}.pq (a ^ h)2 ^ pq(a — b)-

elle tend vers zéro quand a augmente.

79. Le théorème démontré (77) peut s'appliquer aux épreuves successives entre deux, événements contraires.

Soient/? et q les deux []robabilltés. Leur somme est égale à l'unité; une série de a épreuves amenant, dans un ordre réglé par le hasard, l'un ou l'autre de ces deux événements peut donner lieu à un jeu équitable. Pierre gagnera la [partie si l'événement dont la probabilité est /; se présente; sa mise sera égale à />, celle de l'adversaire égale à q.

On aura, en adoptant les notations du théorème (77),

G — pq -^ cj(— p) — o, H ^ pcji^qpi = pcj.

Si, sur 'X parties, Pierre en gagne m et en perd <j. — m, son gain seia

ni(j — (;JL — m) p = m — \xp.

La valeur probable de B.

est donc (76)

elle tend vers zéro lorsque ix augmente. On peut donc affirmer

m avec une certitude croissante que la dittérence entre le rapport —

et la probahilitr p tend vers zéro lorsque le nombre des épreuves augmente. C'est le lliéorème de Bernoulli.

La valeur probcble de l'expression (8) a été obtenue déjà sous une autre forme.

La valeur probable (62) du carré de Técarl sur p. épreuves

est \i-pg-

Cetécart est la différence m — iJL/>. La valeur j)rob;d)lede(/? J — |J.y>)-

II y [m \- , PI

îtant ^xpq^ celle de (pj esl — •

(^est le même théorème.

80. Nous donnerons du tliéorème de Bernoulli une démonstration plus simple encore que la précédente.

Supposons deux événements contraires ayant pour probabilités

p elq. Sur UL épreuves faites entre eux, les nombres d'arrivées les

plus probables sont tjL/> et [j.^; nommons écart la différence entre

le nombre d'arrivées de l'événement dont la probabilité est/» et le

nombre le plus probable ^p.

On promet à Pierre une somme égale à la valeur absolue de l'écart, et non plus à son carré comme on l'a supposé dans la démonstration précédente. Sans calculer l'espérance mathématique de Pierre, nous allons d('monlrer que, le nombre]j. des épreuves grandissant indéfiniment, celte espérance est très petite par rapport à UL.

Désignons par 'f ([j.) l'espérance mathématique de Pierre.

Si l'on double le nombre des épreuves, cp(u.) deviendra 'f (afj.), très différent de a'>p(a).

Partageons, en effet, les 2 [j. épreuves en deux séries de ^. f^'écart peut, dans les deux séries, avoir le même signe ou des signes différents. Dans le premier cas, l'écart total est la somme des deux écarts partiels; dans le second, il esl leur différence. L'espérance nialliémalique, si l'on sait que le premier cas se produit, est 2 cp(p.);

CHAP. V. — DKMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE BERNOULLI

dans le second, elle est évidemment plus petite. Désignons-la par 2acp(|jL), a étant plus petit que l'unité.

Soient/?, la probabilité pour que, sur pi épreuves, l'écart soit posinf, ^1 pour qu'il soit négatif; la probabilité pour que, dans les deux séries de it. épreuves, les deux signes de l'écart soient semblables est /?; -|- ^, ; pour qu'ils soient différents, elle est 2/),^,. On en conclut

cp(2,a) = '2(/>2 -|-^2)cp(^u) + 4/?,g'iacp((jL). On a

par conséquent

Pi -+-Çi^'i^qiPi < I-

«(2a) est donc plus petit que iz>(<j.). La somme

pi -^ 9\ -i-aa/Jig',

ne pourrait tendre vers l'unité lorsque <x augmente que dans deux cas : ou bien l'une des probabilités />, ou q^ tend vers zéro, ou bien a tend lui-même vers l'unité.

La première hjpotlièse est impossible. Si, en eff'et, p^ tend vers zéro, il en résulterait que, sur un nombre d'épreuves indéfiniment croissant, on pourrait regarder comme certain que Fécart sera d\in certain signe. En jouant alors au jeu équitable, défini (79), l'un des joueurs, après un grand nombre de parties, serait certain de gagner.

La seconde hypothèse est également inadmissible.

L'espérance mathématique de celui qui attend la différence de deux écarts ne peut être la même que s'il attend leur somme.

Nous pouvons donc écrire

(p(2[x) = 2Giçp(,a),

G, étant plus petit que l'unité et ne s'en approchant pas indéfiniment.

On en conclut

Cp(4[a) = 2Gi9(2[Jl), 9(8[-l) = 2G3Cp(4[Jl),

Ç(2«[JI) = 2G„Cp('2"-l[JL)

et, en mulliplianl ces équations,

(p(2"iJl) = 2"GiG-2- ..G„CC([a).

On en conclut

?(lV)^G,G....G.iili^

Les facteurs G,, G,, . . ., G„ étant plus petits que l'unité et ne tendant pas vers l'unité, leur produit tend vers zéro. En posant 2" <j. = z, on a, lorsque :; grandit sans limite,

lin. ^ = o.

L'espérance mathématique de celui qui attend une somme égale à l'écart absolu sur z épreuves est donc très petite par rapport au nombre des épreuves, et l'on peut regarder, par conséquent, comme certain qu'après un nombre indéfiniment croissant d'épreuves l'écart est infiniment petit par rapport au nombre des épreuves.

OH.VH. VI. — LA Rl'lNK DKS JOUEIKS.

LA RUINE DES JOUEURS

Si le nombre de» parties est indélini, l'arantage du joueur le plus riche serait infini si sa fortune pouvait l'èlre : c'est pour cela que c'est courir à une ruine certaine que de jouer indifTéremuienl arec tous ceux qui se rencontrent.

Ami'Khe.

51. Lorsqu'un joueur joue indéfininient à un jeu équitable, sa ruine tôt ou tard est certaine. La proposition semble contradictoire, elle ne l'est pas. — 8^2. Lorsque deux joueurs luttent indéfiniment, quelles que soient les conditions du jeu. l'un des deux doit finir par se ruiner. — 83. Calcul numérique. — 84. La perle peut entraîner la ruine avant la fin du nombre convenu de parties. Cela accroit les chances de ruine. — 8.5. Deux manières d'énoncer le problème de la ruine des joueurs. — 86. Cas où Pierre possédant m francs joue indéfiniment à un jeu équitable. — 87. La valeur probable du nombre des parties est infinie. Il n"v a pas contradiction. — 88. Démonstration de l'énoncé précédent. — 89. Calcul des chances de ruine dans un nombre donné de parties. — 90. Exemples numériques. — 91. Cas où deux joueurs ont des fortunes donn("es. Chance de ruine de chacun. — 92. Cas où le jeu n'est pas équitable. — 93. Autre manière d'obtenir le même résultat. — 94. Cas où les deux joueurs ont même fortune et exposent la même mise. — 95. Probabilité pour qu'un joueur qui joue indéfiniment finisse par se ruiner. Trois cas peuvent se présenter. — 9G. Le cas où la ruine n'est pas certaine est celui où le joueur a un avantage. — 97. Exemple numérique. — 98. Probabilité d'être ruiné précisément après un nombre donné de, coups. — 99. Valeur approchée de la probabilité. — 100. Probabilité pour que la ruine soit postérieure au ij.'»™" coup. — 101. Valeur maxima de la probabilité. — 102. Valeur maxima de la valeur approchée. — 103. Valeur probable du nombre des parties jouées avant la ruine de l'un des joueurs. — 104. Cas où le jeu n'est pas équitable. Théorème de M. Bouché. — 105. Évidence apparente du théorème. — lOG. Insuffisance de la démonstration. — 107. Réduction du cas où le jeu est équitable au cas général. — 108. Cas où les fortunes sont égales en commençant le jeu. — 109. Cas

où deux joueurs luttant l'un contre l'autre peuvent l'un et l'autre être ruinés. Insuffisance d un raison-

nement qui semble fort simple. — 110. Cas où Pierre et Paul possèdent chacun 2'^ — 111. Cas où ils possèdent y. — 112. Cas général. — 113. Examen d'une combinaison proposée pour accroître les chances de gain.

81. Le jeu ruine ceux qui s'y livrent. Il n'y a exception que pour les joueurs auxquels les conditions acceptées accordent un avantage.

Le fermier des jeux à Monte-Carlo peut accroître sans crainte le nombre des coups. La menace ne s'adresse qu'aux pontes.

Lorsque le jeu est équitable, la ruine tôt ou tard est certaine.

La proposition semble contradictoire. En ruinant l'un des joueurs, le jeu enrichit l'autie; en s'exposant à perdre une fortune, on a l'espoir de la doubler.

Cela n'est pas douteux ; mais, quand la fortune est doublée, le théorème s'y applique avec la même certitude : elle peut doubler encore, centupler peut-être, tout sera emporté à la Cois par un caprice du hasard. En combien de temps? Nul ne le sait ; la probabilité augmente avec le nombre des parties et converge vers la certitude. C'est cette progression extrêmement lente, il faut le déclarer tout d'abord, à Tétude de laquelle est consacré ce Chapitre.

82. Lorsque deux joueurs luttent constamment l'un contre l'autre, quelles que soient leurs fortunes et les conditions, équitables ou non, du jeu qu'ils renouvellent sans cesse, l'un des deux

finira par ruiner l'autre ; la probabilité pour qu'ils puissent faire un nombre donné de parties tend vers zéro quand ce nombre augmente.

Lorsque deux joueurs, en effet, font un grand nombre de parties, la probabilité de la répartition la plus probable entre les parties gagnées et perdues par l'un d'eux tend vers zéro quand le nombre des parties augmente. Elle est (57) inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre des parties.

Si la probabilité de la combinaison la plus probable tend vers zéro, il en est de même, à plus forte raison, de toute autre combinaison désignée et, par conséquent, aussi d'un ensemble de combinaisons quel qu'il soit, dont le nombre ne croîtrait pas indéfiniment avec le nombre des parties.

Quelles que soient les mises des deux joueurs, on peui assigner une répartilion des perles el des gains, telle que la compensation soit parfaite et que chaque joueur, à la fin, se retrouve avec sa fortune primitive. Si, prenant pour point de départ ce mode de répartition, on accroît le nombre des parties gagnées par l'un des joueurs, le gain sera pour lui, pour chaque partie gagnée de plus, et par conséquent pour chaque partie pei'due de moins, égal à la somme des deux, mises, et tout écart de cette répartition qui équilibre les pertes el les gains ruinera l'un ou Tautre joueur, si, multiplié par la somme des mises, il donne un pn)duit plus grand que la fortune du plus richi;.

En caractérisant les combinaisons par le nombre total des parties gagnées par l'un des joueurs, le nombre de celles qui, ne ruinant aucun des deux joueurs, permettent la continuation du jeu

est donc indépendant du nombre des parties jouées, et la probabilité pour que l'une ou Taulre de ces combinaisons se produise tend vers zéro quand le nombre des parties augmente.

83. Supposons, par exemple, (pie l'on joue à pile ou face, l'enjeu étant i'" la partie. Si le nombre des arrivées de pile est égal à celui des arrivées de face, il n\ aura ni perle ni gain.

Cherchons combien il faut faire de parties poui- que la probabilité d'une perle de looooo'^" pour l'un des joueurs soit égale à 0,999.

Pour que, en jouant i"" la partie, l'un des joueurs perde rooooo*% il faut (|ue l'écart, dans un sens ou dans l'autre, soit plus grand que 50000.

On entend par écart, il n'est pas inutile peut-être de le rappeler, la dill'érence entre le nombre des parties gagnées et le nombre relatif à la combinaison qui rend les perles nulles. Cette combinaison correspond, dans le cas actuel, à l'égalité des perles el des gains.

Si a est le nombre des parties jouées, la probabilité de la combinaison la plus probable est (07)

et, dans le cas actuel, puisque p el q sont égaux à ■^,

TTIJ.

La probabilité pour que le hasard amène une des looooo combinaisons pour lesquelles la perle est inférieure à looooo" est plus petite (|ue

Si donc on a

, lOOOoO

1 OOO

la probabilité d'une perte moindre que looooo^"" sera plus petite •^1"^ TïïVô ^^ P^'" conséquent, celle d'une |>erte plus grande sur|)as-

sera o.(j9().

L'inégalilé (i) donne

7 millions de milliards de parties sulfiraient pour donner la probabilité demandée.

Si deux joueurs pouvaient (aire ce nombre immense de parties, il } aurait pour chacun d'eux probabilité presque égale à 7, de perdre plus de looooo^'" et probabilité égale de les gagner.

Cette évalualion numérique pourra rassurer ceux que la cerlitude de ruine effrayait plus qu'il ne faut.

La probabilité d'un écart reste la même (58), lorsque l'écart dmiinue ou augmente proportionnellement à la racine carrée du nombre des parties. Si l'on divise le nombre des parties par i million, en les réduisante 7 milliards, la somme dont la perte par l'un des joueurs aura 999 chances sur 1000 sera réduite à IOo'^

La méthode précédente ne donne qu'une limite. Le calcul exact est facile.

La probabilité pour qu'en jouant à un jeu équitable, les mises

io5

élant« et h et les probabilités de gagner à chaque partie/; el q^ la somme perdue ou gagnée soit inférieure à une limite S a été donnée (72); elle est

-tny,i\i.pq

'dt

(a --r- b) \l-i \i.pq

en la retranchant de limité, on aura la probabilité pour que la j)erle de l'un des joueurs soit plus graude que S. On trouve dans la Table

Si Ion pose

{ a -^ b) sj -1 \i.[>q

on en déduira le nombre u des |)arties nécessaires pour que la probabilité d une perte supérieure à S s#it égale à ^.

Soient

on trouvera

Si l'on suppose S = 100 000. on aura

|jL =: (ii^ooo millions.

En prenant S= 100, on a

[jL = (V.).4ooo.

il faut faire 624000 parties à 1 '"■ pour que la probabilité de perdre ou de gagner 100"' soit égale à j^.

84. Les chiffres précédents, donnés sans commentaire, feraient naître une idée très fausse sur les chances de ruine.

Nous supposons le nombre des parties convenu à l'avance. On réglera à la fin : telle a été notre hypothèse. La chance de perte n'a rien alors de bien cfTrayanl, il v a une chance sur dix pour

qu'après 624000 parties jouées tout se réduise à une perte inférieure à loo*^".

La chance de ruine que nous voulons étudier est bien différente. On doit à ciiaque partie déposer la mise; si donc, à un certain moment, la perte du joueur dépasse sa fortune, il ne sera pas admis à continuer et perdra toute chance de se relever. La probabilité qu'il faut connaître n'est pas celle de la perte finale, mais celle de la perte maximum à l'un des instants de la série de parties.

80. Le problème peut être posé de deux manières. On peut considérer deux joueurs jouant l'un contre l'autre à des conditions données, et chercher les chances de ruine pour chacun d'eux et les probabilités relatives à la durée du jeu, c'est-à-dire au nombre des parties jouées avant la ruine de l'un d'eux. On peut, et c'est une étude très différente, étudier le sort du premier joueur sans se préoccuper du second, supposer qu'il change d'adversaire, qu'il en trouve toujours un disposé à jouer aux mêmes conditions, ou, ce qui revient au même, (|ue celui contre lequel il entreprend la lutte ait une fortune infinie.

Dans le premier cas, nous l'avons vu (82), le jeu doit finir tôt ou tard par la ruine de l'un des joueurs. La probabilité pour que

le nombre des parties nécessaires atteigne une limite donnée tend vers zéro quand cette limite augmente.

Dans le second cas, quand un seul des deux joueurs peut être ruiné, la ruine est également certaine si le jeu est équitable; la probabilité pour que le nombre des parties dépasse toute limite est infiniment petite.

On peut le démontrer sans calcul. Supposons que Pierre possède m francs et qu'il ait résolu de risquer une même somme à un jeu équitable, tant qu'il pourra déposer sa mise.

Nous pouvons supposer qu'une première lutte s'établisse entre Pierre et un adversaire de fortune égale. Le jeu est équitable. Pierre a chance ^ de sortir vainqueur de cette lutte : il possédera alors 2/n francs. Supposons-lui alors un second adversaire possédant comme lui 2m francs, Pierre a chance r> d'être ruiné par lui, mais chance r, aussi de le ruiner et de posséder \m francs.

Pierre luttera alors contre un adversaire possédant ^m francs, et

il aura cliance r,, en le ruinant, d'en posséder 8m. La série est indéfinie. On voil que, pour échapper à toutes les chances de rnine, Pierre devrait avoir autant de bonheur que si, jouant sans cesse à pile ou face, il ne perdait jamais une seule partie. Une telle persistance doit être évidemment considérée comme impossible et Pierie, tôt ou tard, se ruinera.

L'assimilation avec le jeu de pile ou lace est évidente. Pour en effacer toute différence, il faut supposer aux parties de pile ou

face des durées croissantes. Si l'une d'elles ne finissait pas, la démonstration perdrait toute sa force. Un tel hasard (82) doit être tenu pour impossible.

86. La démonstration précédente, en montrant la ruine du joueuf inévitable, n'apprend rien sur les probabilités relatives au nombre de parties qui doivent l'amener. Nous pouvons, dès à présent, démontrer que la valeur probable de ce nombre de parties est infinie. J^a contradiction semble choquante.

La ruine est certaine, dit-on, et la valeur piobable du nombre des parties qui la procurent est inlinie. Si le nombre des parties est infini on ne pourra pas les jouer, la ruine ne s'accomplira pas : elle n'est donc pas certaine.

La ruine est certaine. 11 ne faut pas confondre le nombre des parties qui, vraisemblablement, seront jouées avec le nombre probable des parties; il faut surtout ne pas oviblier ce que nous entendons par certitude. Quand on dit la ruine est certaine, tôt ou tard, on n'entend pas affirmer (ju'après un nombre de parties, si grand qu'il soit, la ruine est assurée comme un théorème de Géométrie. S'il en était ainsi, le nombre probable des parties ne pourrait pas, évidemment, surpasser et serait certainement très loin d'égaler cette limite infranchissable.

La ruine est certaine, cela veut dire : la probabilité pour que le nombre des parties qui s'accompliront surpasse une limite donnée tend vers zéro quand cette limite augmente.

La valeur probable du nombre de parties est infinie, cela veut dire : l'espérance mathématique de celui (|ui doit recevoir autant de francs qu'on jouera de parties est infinie.

Les propositions ainsi comprises ne sont nullement contradictoires.

Supposons que Pierre, se mettant au jeu avec i*^"" seulement, c'est le cas le plus défavorable, soit décidé à jouer, sans interruption, jusqu'à ce que ce franc soit perdu. La probabilité pour qu'il le perde, tôt ou tard, est une certitude; mais, quelle que soit la limite qu'on voudra assigner, il y a possibilité pour que le nombre des parties jouées la surpasse. La probabilité pour qu'il en soit ainsi tend vers zéro quand la limite augmente. En disant que le nombre des parties ne /?ew^ pas être infini, on ne veut pas dire autre chose.

Si l'on promet à Paul i*'"" par partie que jouera Pierre avant d'avoir perdu le franc qu'il possède en eutnint au jeu, l'espérance mathématique de Paul est, par définition, le nombre probable des parties. Il faudra, pour la calculer, multiplier chaque nombre possible par la probabilité correspondante. Or les nombres yc>05.ç/Z>/e.ç vont à l'infini • il n'y a rien de contradictoire à annoncer qu'en les multipliant par des probabilités de plus en plus petites qui, suivant notre façon de parler, expriment des impossibilités, la somme des produits augmente sans limite.

Le résultat est analogue au paradoxe de Saint-Pétersbourg, dans lequel nous avons rencontré déjà une espérance mathématique rendue infinie par l'énormité des sommes dont la probabilité paraissait assez petite pour qu'on n'y attachât aucun prix.

87. Démontrons (pie la durée probable du jeu est infinie pour un joueur qui change d'adversaire et veut risquer Va même mise, à un jeu équitable, tant qu'il aura possibilité de la mettre enjeu.

Considérons d'abord deux joueurs, Pierre et Paul, possédant chacun im francs. Ils luttent à un jeu é(|uitable jusqu'à la ruine de l'un deux. Soit '^{im) le nombre probable des parties qu'ils joueront, 'o{m) désignant, parla même notation, le nombre probable des parties quand les deux joueurs possèdent chacun ///francs. La lutte entre Pierre et Paul pourra, sans que rien soit changé aux chances de chacun, commencer par deux épreuves distinctes. Paul, dans une première série de parties, risquera m francs contre m francs de Pierre, et dans une seconde série il exposera la seconde moitié de son avoir contre la seconde moitié de celui de Pierre.

Deux cas [pourront se présenter : ou les deux luttes, quand

CHAP. VI. — LA RUINE DES JOUKURS. I

elles seront terminées, auront le même vainqueur, qui aura ruiné son adversaire ; ou chacun gagnera Tune des deux séries, et les joueurs se retrouveront dans la situation primitive, possédant chacun im francs.

On en conclut

(2) cp(2m) = 2cp(/?7) -!- - tp(2m).

Le nombre des parties se compose, en effet, des nombres de parties faites dans les deux séries, el dont chacune a pour valeur probable C5(m), et de plus, éventuellement, du nombre de celles qu'il faudra faire encore si, à la suite des deux séries, on se retrouve dans la situation primitive, ce dont la probabilité

est :;.

L'équation (2) donne

(3) cf(2m) = 4'f m).

Supposons maintenant que Pierre, possédant m trancs, ait résolu de jouer sans limite contre tout adversaire qui se pi-ésentera. On peut régler son jeu delà manière suivante : il luttera d'abord contre un premier adversaire possédant comme lui m francs. S'il le ruine, il possédera im francs; on lui opposera un second adversaire de fortune égale. S'il ruine le second, il possédera l\in francs el pourra lutter, à chances égales, contre un adversaire ayant comme lui l^m francs. Le jeu continuera jusqu'à la rencontre d'un adversaire qui, à ce jeu toujours égal, léussira à le ruiner.

On voit tout d'abord, comme on Ta remarqué déjà (80), que la ruine de Pierre est certaine; il ne pourrait l'éviter qu'en étant toujours favorisé par le hasard dans une série indélinie d'épreuves pour chacune desquelles la probabilité est ^.

Le nombre probable des parties est, d'après l'analyse précédente,

(4) "^{rn)-^ -ç(2/n)-H-<fU'^)+g?(8^)-*-

Pierre, en effet, est certain de jouer la première série, pour laquelle le nombre probable des parties est cp(m) : il a probabilité i de jouer la seconde : il suffit pour cela qu'il sorte vainqueur de la première ; il a probabilité | déjouer la troisième, car il suffit

qu'il gagne les deux premières, etc. En ayant égard à la relation (3), la somme (4) devient

(p(m)-t-2(p(/n)-f-4cp(m)-H8cp(m)-i-...; elle est infinie quel que soit ^[m).

89. Les clianees de ruine d'un joueur, à un jeu équitable, se calculent aisément lorsque, le nonibre des parties étant fixé à l'avance, on doit les faire, quoi qu'il arrive, et régler les comptes à la fin.

p el q désignant les probabilités de perle el de gain à chacune des 'j. parties, la probabilité pour que le nombre des parties perdues surpasse 'j.q + h, c'est-à-dire pour que la perte surpasse le produit de h par la somme des mises, est

(5) -~^= f'e '^'"'dz.

Si l'on pose

elle devient

l^pq

/ c-i^dt — / e-'Vf.

Le premier terme est égal à ^, le second tend vers zéro quand \j. augmente.

La probabilit*' pour qu'un joueur, après un nombre croissant de parties, fasse un gain supérieur à une somme donnée, tend vers ^, quelle que soit cette somme, quand le nombre des parties augmente sans limite.

La probabilité pour qu'il soit en perte d'une somme égale tend aussi vers |, et la probabilité pour que la perte ou le gain restent,

pour un nombre croissant de parties, inférieurs à un nombre donné tend vers zéro, quel que soit le nombre. Le jeu, on ne doit pas l'oublier, est supposé équitable.

LA RUINK DES JOUEURS

de parties diminue rapidement quand la perte assignée esl grande.

Supposons que l'on joue looo parties, p el q étant l'un et l'autre égaux à ^. La probabilité pour l'un des joueurs de perdre un nombre de parties supérieur à 5oo -\- h, par conséquent détre en perte de imh^ m étant la mise, est

e-'--dt.

Le Tableau suivant donne la probabilité pour que le joueur qui possède 2 A francs soit ruiné en jouant mille parties.

Ail

A = ^ f e-i'dt.

1 0,î73 18 0,r.>.9 35 0.oij

2 0,43() 19 0.ii) 36 0,oi>.

3 0, (25 '20 0,io3 37 0,oio

4r 0,4oo 21 0,09} 38 0,o<'9

5 0^377 22 0,oS3 39 0.007

6 0,3>} 23 0.073 40 0,oo(5

7 0,330 24 0,0(i5 41 0,00j

10 0,2r)4 27 0,045 44 0,003

11 0,ii4 28 0,039 4.0 0,003

14 0,£88 31 0,096 48 0,009

17 0,149 34 0,0r6 82 0,000004

Le Tableau suivant donne le nombre des parties qu'il laut jouer pour que, les deux adversaires ayant ii chaque partie probabilité ^ de gagner, et l'enjeu étant i"", celui des deux qui sera favorisé par

le hasard ait une probabilité | de gagner une somme supérieure à

un nombre donné :

Bénéfice assigné dont la probabilité est i. Nombre des parties.

400 25i603

1000 ■?.igyjii

Les parlies, comme dans le cas précédent, seront jouées, quoi qu'il arrive. Si le jeu devait se terminer dès qu'un joueur a obtenu le bénéfice demandé ou dès qu'il ne peut plus déposer sa mise, les résultats seraient très différents.

91. Problème XLIX. — Pierre et Paul font an nombre illimité de parties à un jeu dont les conditions sont équitables ; leurs fortunes sont m et n. Quelle est, pour chacun d'eux, la probabilité de ruiner lautrel

Le jeu devant se prolonger jusqu'à la ruine de l'un des joueurs peut êti"e assimilé à une seule partie dans laquelle celui qui risque m francs devrait, s'il est vainqueur, en obtenir m-\-n. L'espérance mathématique doit être égale à la mise, et, si Ton nomme/? la probabilité pour que Pierre ruine son adversaire, l'équation

On peut calculer directement cette probabilité. Soit j^a; la probabilité pour que Pierre ruine Paul au moment où il possède X francs et où Paul, par conséquent, en possède m -\- n — x. On pourra écrire

(5) yx^ py.t^h-^ qyx-a-

Lorsque Pierre, en effet, possède x francs, il peut, à la fin de la partie suivante, selon qu'il la gagne ou qu'il la perd, posséder

X + b on X — a francs; Il y a donc probabilité p pour quejK^ se change en j-^^^, et probabilité q pour (pj'il devienney^_<,. LVcjuation (5) en esr la consé(fuence.

pb étant égal à qa, puisque le jeu est équitable, la solution générale de l'équation (5) est

a et ^3 étant arbitraires.

Cetre valeur de jKx satisfait, on le vérilie iuimédiateinenl, et, renferniant deux constantes arbitraires, elle est la solution la plus générale.

On a, pour déterminer les constantes,

on en déduit

ni -T- n

et, par consécpient,

qui s'accorde avec la solution précédente.

Cette solution peut donner lieu à une difficulté. Si les enjeux a et b ne sont pas égaux à l'unité, Tun des joueurs pourra être forcé de cesser le jeu avant d'avoir tout perdu, possédant encore une somme inférieure à la nnse exigée. Nous négligeons cette petite somme, qui, cependant, mettrait la formule en défaut dans le cas où elle formerait une partie notable de la fortune du joueur.

92. Pkoblème L. — Les conditions restant, celles du problème précédent, on ne suppose plus les conditions du jeu équitables. Quelle est, pour chacun des joueurs, la probabilité de ruiner V autre?

Un ingénieux artifice de Moivre permet de déduire la solution de la théorie de l'espérance mathématique.

Donnons à Pierre, au lieu des m francs qu'il possède, m jetons de valeur a, a-, ..., a'" ; a sera choisi ultérieurement. Remplaçons

éji;alenient les n francs de Paul par n jelons de valeur a'«+\. a'""*"-, . . . , a'"+" qui conlinuenl la progression.

Le jeu se faisant dans les conditions supposées, la mise de Pierre sera a jetons, au lieu de a francs, et celle de Paul b jetons. On conviendra qu'à chaque partie Pierre exposera toujours les jetons dont la valeur est exprimée par les plus hautes puissances de a, et Paul, au contraire, ceux dont la valeur est représentée par les plus petites.

La série des jelons restant toujours la même, la séparation après chaque partie se fera en un point différent, mais Pierre aura toujours les premiers termes de la série, et Paul tous les suivants.

La chance, pour chaque joueur, de perdre tous ses jetons est indépendante de la valeur qu'on leur attribue et, par conséquent,, du choix de a. Le jeu sera équitable si l'on pose

Cette équation se réduit, (piel (]ue soit x^ à

a" — 1 _ p ■xu+h — a". " q'

c'est-à-dire, p + q étant égal à i ,

Le jeu, grâce à cet artifice, étant devenu équitable, l'espérance malhématique de chaque joueur doit être égale à sa mise; et^ si l'on nomme P„i la probabilité pour que Pierre, qui a m jetons^, ruine Paul, qui en a /i, on aura

93. Le calcul de P„, peut se faire directement. Soit^a; la probabilité, au nioment où Pierre possède x francs,. pour qu'il finisse par ruiner Paul, on aura, comme (91),

y=c == pyx-rh -+- qyx-a ; pb n'étant plus égal à qa^ l'intégrale de cette équation est, comme

on le vérifie aisément,

(7) 7ar=C,+ Cia^,

C, et C2 étant des constantes arbitraires et a satisfaisant à la condition

c'est-à-dire à l'équation (6) déjà obtenue

prt.^-^^ — r^a _^ q =0.

Les constantes C, et Co se détermineront par les conditions évidentes

et l'on trouve

c'est le résultat, déjà obtenu (92).

L'équation (6) a pour racine a = i qui, évidemment, ne convient pas ou (pii, plutôt, .sert à former le premier terme de la formule (^), C| r^.

9i. Si l'on suppose a = 6 = 1 et /;i = /z, la formule donne un résultat signalé par Huvge'ris dans un cas particulier. Ou trouve

pin

et

/Il _u /-/'"

Les chances de ruine pour les deux joueurs qui possèdent chacun m francs, et exposent i'^" par partie à un jeu dans lequel les probabilités de gagner chaque partie sont/? pour l'un et q pour I autre, sont dans le rapport de />'" à q"^. On peut le démontrer directement.

Les deux joueurs ayant même fortune et les enjeux étant égaux, les successions de perte et de gain cpii peuvent ruiner Pierre cor-

respoiidei.L une à une aux successions de gain et de perle qui peuvent ruiner Paul; il suflil de changer les pertes en gains, et réciproquement, pour passer d\ine série à l'autre. Dans l'une des séries, le nombre des parties surpassera de m celui des gains; dans l'antre, ce sera le contraire. Les probabilités des deux combinaisons sont donc entre elles dans le rapport de

r,in-\-hqh pin

fin+li 7i/i

Ce rapi)ort est celui des probabilités totales dont les termes sont en même nombre.

90. Problème LI. — Pierre jonc à un jeu équitable ou non, mais dans des conditions invariables d'une partie à l'autre, contre tout ad^-ersaire qui se présente. Quelle est la probabilité pour qu il finisse par se ruiner?

La solution de ce problème, déjà résolu en partie (85), peut se déduire des résultats précédents.

La chance de ruine est la méiue, évidemment, pour Pierre que s'il luttait contre un adversaire de fortune infinie.

Lorsque, Pierre possédant m francs, son adversaire en possède n. la probabilité pour que Pierre soit ruiné est (92)

(o) r^ni-^ii I

a étant la racine de l'écpiation

q rj^a-^-b — a6 _4- ^ r= o ;

p et q sont les probabilités de gain pour chaque joueur à chaque partie, a la mise de Pierre, b celle de son adversaire. Il

faut, dans cette formule, supposer n infini. Trois cas peuvent se présenter : a est plus petit que l'unité, égal à l'unité ou plus grand que

l'unité.

Si a est plus petit que l'unité, l'expression (8), en y supposant n inlini, se réduit à Tunité. Il est certain (pie Pierre sera ruiné.

Si a est égal à l'unité, la formule prend la forme ^-, elle a pour

valeur le lapporl des d»M-ivées de ses lennes par rapport à a

égal à l'unilé (|uand n esl infini.

Dans ce cas, comme dans le précédent, la ruine de Pierre esl certaine.

Lors(pie a esl plus grand (pie Tunité, la formule (8) a pour

liiiiile — • La probabilité de la ruine de Pierre dans sa lutte conlre

un adversaire de fortune infinie n'est égale, dans ce cas, ni à zéro, ni à l'unité.

96. Il importe de chercher à quelles hvpothèses correspondent les trois valeurs de a.

L'équation

a, dans tous les cas, la racine a= i. Pour que l'aiilie racine réelle et positive soit égale à Tunité, il faut (pie l'équation ail deux racines égales et (|ue, par conséquent, a soil racine de l'équation dérivée

q(a -^ 6)a"-^"-' — «Oa*» ^ o.

Cette racine double étant égale à l'unilé. on doit avoir

Le jeu, par conséquent, esl <'(piitable.

Pour celui (pii joue indéfinimeni à un jeu écpiitable, a est égal à l'unité et la ruine est cerlaitie. Ce résultat a été obtenu (85).

Le seul cas où la ruine ne soit pas cerlalne est celui de a plus grand que l'unilé : le jeu alors n'est pas é(piitable et les conditions favorisent celui des joueurs dont la fortune esl limitée.

L'avantage, quelque petit qu'il soit, fait disparaître la certitude de ruine.

C'est le cas du banquier dans les jeux publics. Dans tout autre, sa ruine serait certaine.

Un avantage est pour lui juste et nécessaire; il importe seule-

ment de ne pas l'exagérer. La chance de ruine

dm

lorsque a est plus grand que i, est petite. On peut, dans les conditions où se placent habituellement les maisons de jeu, la considérer comme nulle.

Supposons, comme à la roulette ordinaire

19 iH

Les mises étant supposées égales à i"", a est donné par l'équation

une des racines, comme toujours, est égale à l'unité. C'est l'autre (ju'il faut prendre; on a

La cliance de ruine du banquier est donc

n élant le rapport de l'avoir du banquier à la mise totale de l'un des coups.

Si l'on suppose n = 1000, on a

/i8yo»« r

98. Problème LU. — Pierre Joue à un Jeu dans lequel il a à chaque partie la probabilité p pour gagner et pour perdre la probabilité q. U enjeu est \^^ pour chacun des deux adversaires. Quelle est la probabilité pour que Pierre, qui possède m francs, soit ruiné précisément après avoir fait ^parties, de telle sorte que la 11"""" partie lui enlève son dernier franc?

CHAP. M. — LA RUINE DES JOUEURS

Pour que Pierre ail perdu m francs en a parties, il faut qu'il

ait perdu - — parties et gagne '■ —

Le nombre ul étant tel que ces deux fractions soient des nombres entiers, c'est-à-dire de même parité que m, la probabi-

lité pour que, sur u. parties, Pierre en gagne - — ^ , est (04)

Otte probabilité est plus grande que celle que nous cherchons. On compte, en effet, comme séries de parties faisant perdre Pierre an [j. coups, toutes celles dans lesquelles, à la fin de la a"""^ partie, il est en perte de m francs. On doit exclure celles qui, avant de procurer la ruine de Pierre au |j(."""<^ coup, l'ont procurée déjà à un coup antérieur.

Pierre une fois ruiné, en eOet. le jeu doit cesser; il n'est pas admis à exposer l'argent qu'il n'a pas.

Le problème résolu (18) nous fait connaître le rapport du nombre des combinaisons qui ruineront Pierre en a coups au nombre total de celles qui assurent en 'j. coups, joués quoi qu'il arrive, la perte de ses m francs.

Si l'on considère, en effet, l'une de ces combinaisons et que l'on range les pertes et les gains dans l'ordre où ils se sont produits, en les appelant en commençant par la dernière partie, l'excès du nombre des pertes sur celui des gains étant m, le rapport du nombre des combinaisons dans lesquelles, à aucun moment, les pertes et les gains ne seront en même nombre, au nombre total

des combinaisons est (18) — > m étant la difFérence et u. la somme

des nombres de parties gagnées et perdues. Le nombre des cas qui procurent la ruine de Pierre doit donc être multiplié par la fraction — • La probabilité pour que Pierre soit ruiné pour la première fois au ix'^™*= coup est

a — m lt.-+- m „

<io) —p

99. L'expression précédente peut êlre reinplacée, lorsque p et q sont égaux à ^, par une valeur approchée 1res simple. Le facteur qui multiplie — est alors le terme dont le rany s'écarte de —

du plus grand, dans le développement de {p + q)^', il a été calculé (58).

La probabilité de ruiner en fx coups précisément celui (pii joue à un jeu équitable à i^"" la partie, et qui possède m francs, est

(il) 7^-7^^ "■•

100. La probabilité pour que la ruine s'accomplisse en -ji. coups précisément permet de calculer celle pour qu'elle ait lieu après le

Cette probabilité est la somme des valeurs que prend l'expression (10) quand on j remplace successivement [jl par les valeurs U1.-I-2, JJ. + 4, ... de même paritc', seuls nombres possibles de parties qui puissent procurer la luine.

Si 'f (jJ.) désigne l'expression (10), la somme

o(iji)-l-ç([jL-t-9.)-!-cp([ji-+-4)-H...

prolongée indéfiniment est la probabilité pour que la ruine de Pierre soit postérieure au jjl"""^ coup. Cette somme, pour de grandes valeurs de jjl, peut être remplacée par

c'est-à-dire, d'après la valeur approchée de cc(^),

, - -- (JL Z^Z

La probabilité |)Our que Pierre soit ruiné avant le u'^'"*^ coup est, par conséquent,

— ri dz

ZyJ z

CIlAl». VI. — l.V RUINK DES JOUEURS.

Si I on pose — = t-, celle expr<;ssioii devient

lu Jo

l.a Table des valeurs de la fonclioii

-<' dt.

-l'dt = &it)

se Iroiive à la fin du Yoliinie.

On en dédnit, en appliquant la formule au cas d'un joufMir (|ui possède loo" et dont la mise est de i^" par partie, avec probabilité ^ de gagner ou de perdre :

Probabilité d'être ruiné.

Avant d'avoir fait 2000 parties 0,026

» 40f)*^ " 0, I i4

« Le Tableau suivant, calculé à l'aide de la formule (10), que

pour des petits nombres la formidc; approcliée remplace mal,

donne la probabilité de perdre 1 o^"" en un nombre précis de parties

inférieur à 1 00.

Su--

■Slii- .

0,00534057

Zu- ■

2;tv. -

-SiO-.

-3ôV.

TU

0,00585677

2jo

0,005i 536 I

0,00504846

.'^^ CALCUL DFS PROBABILITÉS.

101. Il est inléressanl de chercher pour quel nombre a de parties la probabilité de voir la ruine du joueur s'accomplir au p^ieme ^^-^^^^^ précisément a la valeur maxima. L'expression de cette probabilité, en supposant les enjeux égaux à i^"" et la []robabilité de gagner chaque partie égale à i, est

SI l'on change tj. en ^ + 2, elle se multiplie par

c'est-à-dire

(jJi -H •2)'- — //j2

L'expression augmente avec u., tant que l'on a

c'est-à-dire

> [JL < m^— 4,

et la probabilité maxima correspond à

SI m = 100.

On a

La probabilité maxima est égale à 0,0000920.

102. Si l'on remplaçait l'expression (10) par la valeur approchée

la valeur maxima s'obtiendrait en égalant à zéro la dérivée par

rapport à ul; on trouve

La différence des résultats est, par sa petitesse, une vérification de la l'orniule ap|)rochée.

103. Pkoblî:mk lui. — Pie/re et. Paul jouent à un jeu de hasard. La probabilité de <ragner chaque partie est p pour Pierre et q j>our Paul. fJ enjeu de Pierre est a francs, celui de Paul b francs. Pierre possède ni francs, Paul n francs ; le jeu est équitable. Quelle est la valeur probable du nombre des parties qui seront jouées avant la ruine de l'un des joueurs?

Ln nommant y^ cette valeur [)robal)le lorsque Pierre possède œ francs, c'est-à-dlie l'espérance mathématicpie de celui (jui aurait promesse de recevoir i^' par partie jouée, on aura

{vi) 7x = i-t- pfx+b + q.y.c-a ■

Il est clair, en effet, que le nombre des parties jouées com|)ren(l d'abord la partie par laquelle on commence, (pii certainement aura lieu, et qu'après cette partie Tespérance niathc'-matique cherchée est devenue fx+b ou _>x_a, ^elon celui des deux joueurs qui a gagné.

La probabilité pour (jue la valeur de l'espérance mathématique devienne y^+i étant /?, et pour (pi'elle devienne fx-a étant q, l'équation (12) est la consécjuence immédiate des principes.

La solution générale de l'équation (12) doit contenir deux constantes arbitraires, et ne peut évidemment en contenir davantage.

Posons

€11 supposant/?6 = ^rt, l'équation sera satisfaite si l'on pose

ab

^ et V restant arbitraires.

L;i sol II lion générale est donc

Les conditions évidentes

don lien I

et

yo

ab

yn

inn

Le nombre probable des parties est donc proporlionnel au produit des fortunes des deux joueurs; il devient infini (88) lorsque l'une des fortunes est infinie.

104. M. Kouché a étendu Va solution précédente au cas où le jeu n'est pas équitable. Il a résolu le problème suivant :

Problème LIV. — Pierre et Paul jouent aux conditions énoncées dans le problème précédent; mais le jeu n'est pas équitable, la différence pb — cja n'est pas nulle. Tromer la valeur probable du nombre des parties qui précé leront la ruine de V un des joueurs.

L'équation

r-t = i-H py.c+b -+- qyx-a

définit, comme dans le cas précédent, le nombre probable des parties qui restent à jouer lorsque Pierre possède x francs et Paul m -\- n — X francs.

On satisfait à cette équation, quelles que soient les constantes qui j figurent, excepté dans le cas traité précédemment, en posant

(i3) _;k,^= Ga.^+G'ar-+- C",

a étant la racine de l'équation

pa'^+l'—T." — q = n.

CHAP. VI. — LA RLINE DKS JOUEURS.

el en prenant

Ces valeurs sont données par la subslilution de (i3) dans ré(|ualion, en écrivant qu'elle devienl identique. C et C" restent arbitraires. Quelles que soient leurs valeurs, l'équation est satisfaite. Ou les déterminera par les conditions

yo = o, ym^n

En nommant P la probabilité calculée (92) pour que Pierre Unisse par ruiner Paul, on trouve, en ellectuant les calculs,

pb — </a rt'siillat élégant qui peut s'éncMicer ainsi :

Le nombre i)\^obable des parties est égal au lapport de Ua-Kaiitage total de l'un des joueurs à Cavantage du même joueur dans cliaque partie.

/ffi _!-/?) p est en eflct l'espérance malhématifpic du joueur qui a probabilité P de posséder l'enjeu total (/« + //), m est la fortune de ce joueur, et le numéraleur est l'avantage qui résulte |)Our lui de la décision prise de continuer le jeu indéfiniment. I.e dénominateur est, pour cbacpie partie jouée, l'excès de son espérance mathémati(pie sur sa mise.

lOo. 11 semble facile de démontrer ce théorème directement. Supposons />6 — ^<^ positif, le jeu est avantageux au premier joueur. Soit n le nombre de parties qui seront jouées. Si/>,, P2, . • • , Pii sont les probabilités pour que le jeu (inisse en .r, , ^2, . . • , -^[1 parties, le nombre probable des parties est

(|5) p^Xi-^r /HX^ + psX-i-^. .. + Pp.3?^^.

Celui qui aura droit à une somme égale à (i5) pourrait conclure avec d.'s acheteurs différents des marchés équitables pour leur vendre en détail les avantages qui, suivant les cas, pourront pour lui n'îsulter du jeu. Si le nombre des parties est^r,, un ache-

leur recevrait la promesse du bénéfice correspondant; il devra pour cela payer

p^xi-^{pb — aq),

puisque chaque partie jouée équivaut pour Pierre à un avantage pb — aq.

Les ventes simultanées failes à des acheteurs difiérents ne peuvent faire naître aucune difficulté pour le rèi;lement des comptes. Quel que soit, en elFet, le nombre des coups joués, l'un des acheteurs se substituera au vendeur, et les autres n'auront rien à réclamer. La somme pajée en échange de la totalité du gain espéré sera

Cette somme est l'excès, sur la fortune de Pierre, de l'espérance mathématique résultant pour lui de la détermination de continuer le jeu jusqu'à la ruine de l'un des joueurs, à \\n jeu inégal dont les conditions lui sont avaulageuses. Cette espérance mathématique est le produit de l'enjeu [m H- n) par la probabilité P de le gagner, et l'avantage du joueur est l'excès de celle espérance mathématique sur la somme qu'il possédait avant d'entrer au jeu, n)ais qui, une fois le jeu commencé, ne lui appartient plus.

On peut donc écrire

{pyXx -f- />2^2 + - • --^ P\}.-f^]}.)ipb — qa) = V {m -\- n) — m

et, par conséquent,

V {m -^ n) — ni

O] J-'i -t- 02^79 -H . . . -t- /?ij, ^M =: -, •

' ^ ^ pb — qa

C'est le théorème de M. Kouché.

106. Nous avons plusieurs fois signalé des raisonnements plausibles, qui, loiscju'on y regarde de près, manquent de rigueur et conduisent à des conclusions Causses. Celui qui précède conduit à une formule exacte. On peut cependant élever contre lui une objection fondée.

Lorscpi'un joueur est admis à jouer une partie inégale, dont les

conditions lui sont favorables, la probabilité de gagner la mise b de l'adversaire étant p, et celle de perdre une mise égale à a étant ^, l'avantage déjouer une parlie dans ces conditions a pour valeur équitable pb — qa ; le droil de joufîr un nombre x de parlies doit être payé x[pb — (]<^)] c'est ce (|u'il vaut.

Mais quand ce nombre .r, au lieu d'être doinu', est désigné comme le nombre de parties jouées jusqu'à la ruine de l'un des joueurs, ces parties, quoique le détail des pertes et des gains soit inconnu, ne présentent pas lt!s mêmes cbances que si l'on connaissait seulement leur nombre fixé à l'avance et les conditions du jeu. Si, par exemple, le non)i)re de ces parties est assez petit pour que la (in du jeu, que par hypothèse (dles procurent, ait exigé la perte continuelle du second joueur, le droit, pour le premier, de jouer chaque partie ne vaut plus pb — qa^ il vaut b.

Le calcul de M. Rouché était donc nécessaire, et le raisonnement, quoique très spécieux, qui conduit au résidtat exact, n'est cependant pas rigoureux.

107. La démonstration (lOo) ne s'applique pas au cas où le jeu est équitable. L'expression (i4) prend la forme J}; on peut en trouver la vraie valeur.

La valeui" probable du nombre des parties est

P (m -h n) — /)i pb — qa ' on a (92)

a étant racine de l'équation P

Si l'on suppose /?6 — qa = e, e étant infiniment petit, a diffère infiniment peu de l'unité. Posons

La valeur de V devient

oth H m- h^

l g \in-\-ii)h fil

et, en négligeant le carré de A,

l'expression du nombre probable de parties devient, par la substitution de cette valeur de P,

hmn

h le rapport - est indépendani de m et de n : le nombre probable des

parties est donc

G/nn,

C étant nne constante; et, comme le nondjre des parties est égal

à l'unité quand on a tn = a, /i = b, il faut supposer C = -V • On

' ' ab

retrouve le résultat déjà oljlenu.

108. Dans le cas où les deux joueurs possèdent au début la même somme, on peut trouver la valeur probable du nombre des parties par une méthode très différente des précédentes.

Soitcp(m) le nombre probable des parties lorsque cbaque joueur possède m francs. Supposons que l'avoir de chacun soit doublé, le nombre piobable des parties deviendra (5(2 m). Si l'on fait dans l'avoir de chatpie joueur deux parts égales à ni, on peut supposer que chacun expose d'abord, dans deux luttes séparées, la moitié w de ses francs contre la moitié de ceux de son adversaire. Après cette première série de parties, de deux choses Tune, l'un des joueurs a gagné deux fois, et l'autre est ruiné, ou bien chacun a gagné une série et ils se retrouvent tous deux avec im francs. La valeur probable du nombre des parties est alors,

comme au début, çp(2m). La probabilité pour que le premier joueur ruine son adversaire, lorsque tous deux possèdent m (rancs, est (92)

et, pour qu'il soit ruiné,

La probabililé pour que l'un des joueurs gagne une série el perde l'autre est le produit de ces deux probabilités, qu'il faut doubler puisqu'on ne dit pas dans quel ordre les événemenls doivent se succéder; on doit donc avoir

(i6) cp(9.m) = 29(/n) + ^ — -o(9./n),

a étant (92) la racine de l'équation

p^a-hb — 3ta_4_ g, — o

L'équation (i6) donne

Cette équation, si on la suppose vraie po;ir toute valeur de /??, permet de déterminer la fonction de C2. Nous nous bornons à mentionner ce problème, qui n'intéresse pas le Calcul des |)rol)abilités.

109. La probabililé dans un nombre donné de parties de la ruine d'un joueur, dont l'adversaire est infiniment riche, a été donnée parLagrange, puis par Ampère dans le Mémoire sur la théorie du jeu, lequel a été son di'biit dans la Science.

Lors(pie deux joueurs luttent Tun contre l'autre el que chacun l)eut ruiner son adversaire, le problème est très dillerenl. La solution suivante, qui se présente d'abord, n'est |)as exacte.

Soient m et n les fortunes des deux joueurs. Siipjjosons le jeu équitable : la probabilité pour chaque joueur de gagner une partie est -^ l'enjeu est i*^"".

La probabilité pour que le premier joueur ruine le second est

m , . , . '/l'A 11 fi j pour qu il soit ruine lui-même elle est

Si Ton sait que l'un des joueurs doit être ruiné, on peut, sans changer les chances, supposer à l'adversaire une fortune infinie. Si donc on nomme 'f (m, u.) la probabilité pour qif un joueur qui possède m francs soit ruiné, en jx coups précisément, par un adversaire dont la fortune est infinie, la probabilité pour que la jiartie engagée entre deux joueurs, dont l'un possède m francs el B.

Tautre ii lianes, se termine en pi coii[)s |)iécis{"nienl sera

Le laisonncmenl n'osi pas exact.

Si l'on sait que Pierre a élé ruiné par un adversaire dont la forliine est linie, on en peut conclure (pie le hasard ne l'a pas l'avorisé : les combinaisons cpii, débutant par un ^raii(J nombri; de pallies g^agnées, auraient ruiné son ad\crsaire doivent être exclues, celles dans iescpielles il gagne au d('but plus souvent (pi'il ne perd sont rendues moins probables, j.a probabilité pour que la luinc se soit |)io(luite eu jjl coups n'e^i plus égale à 'f (m, [x).

HO. l^îîOiiLÈME LV. — Pierre el Paul possèdent chacun a'", ils jouent jus(ju'à la ruine de r un d\uix. La probabilité de gagner chaque partie étant ^ et V enjeu égal à i"", quelle est la probabilité pour que le jeu se termine précisément en 2tj. parties?

Le nombre des parties doit être évidemment pair. Si le jeu n'est pas terminé, chaque joueur possédera 2^'"; car, en un nombre pair de parties, la perle de <:hacun est un nombre pair; si donc elle n'était pas nulle, le perdant serait ruiné.

SoitjKu. li» probabilité pour (]ue le jeu ne soit pas terminé en 2 u. parties, on aura

Il est clair en ellct que, si le jeu n'est pas terminé en 21J. parties, ce dont la probabilité est)„, []our qu'il ne le soit pas par les deux parties qui suivent, il faut que chacun des joueurs gagne une partie et perde l'autre. La probabilité ()Our qu'il en soitainsi est^.

De l'équation (18), on conclut

(■9) Xv-^ (i) ^'

et comme, pour u. = i, on di y^=. ^, C est égal à l'unité. La probabilité pour que le jeu ne soit pas terminé après 2 [x parties est donc (4)!^. Pour que le jeu se termine précisément en 2 jjl parties, il faut (pi'il ne soit pas terminé en 2 a — 2, ce dont la probabilité

est (4)!^"' , et que le même joueur perde les deux parties suivantes, ce dont la probabilité est ^. Le produit (j)S^ est la probabilité pour que le jeu se terinine à la 2 u""*^ partie.

111. PROBLi-:ME LVI. — Pierre et Paul possèdent chacun V"", ils jouent dans les conditions définies dans l'énoncé précédent. Quelle est la probabilité pour que l' un des deux soit ruiné précisément au coup de rang u?

Le nombre de parties doit être impair. Après 2 -j. -H i parties, SI le jeu n'est pas terminé, la perle et le j.;ain seront un nombre impair, il doit être moindre que 0, il est donc l'unité : Tun des joueurs possédera 2"" et l'autre 4'^'". Soit rj^ la probabilité pour (jue le jeu ne soit pas terminé au (^ya-f- iy""« coup, on aura

(20) 7u.-h-i = 7Ja-

Si, en elfet, le jeu n'est pas terminé au (2 [jl + i)""""" coup, ce dont la probabilité est)„„, il faut, pour qu'il ne le soit pas au (2u. + 3)""% on (pie cbacuii des joueurs perde une partie et gai^nc I autre, ou que celui qui a conservé 4" perde les deux parties; la probabilité pour que l'un ou l'autre de ces événements se j)roduise est ~.

De l'équalion (20^, on conclut

On a d ailleurs

car, pour que la partie soit lermint'e en trois coups, il faut que le même joueur i^aj^ne les ti'ois premières parties, ce dont la probabilité est \. il faut donc prendre C = 1 , et l'on a

Pour que la partie se termine précisément au coup 2 u + i , il faut qu'elle ne le soit pas au coup 2[jl — i et que le joueur qui possède 2"" seulement perde les deux parties suivantes, ce dont la probabilité est j.

La probabilité pour que le jeu se termine au coup de rang 2 p. + i précisément est donc

112. M. Rouché a traité avec beaucoup d'élégance et de bonheur le cas général.

Problème LVII. — Pierre et Paul jouent V un contre V autre avec des probabilités égales. Ils possèdent chacun n francs avant d'entrer au jeu; à chaque partie le perdant donne 1'^" au gagnant, et le jeu ne cesse que lorsque l'un quelconque des deux joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité P pour que le jeu se termine précisément à la fin d' une partie de rang^ assigné ?

Si, après u. parties, le jeu doit encore se continuer, c'est que l'état des fortunes est alors l'un des suivants :

la notation (i, in — i) indiquant que l'un quelcon(]ue des deux joueurs possède i francs et, par suite, l'autre in — f francs.

Désignons par ^/([J-) la probabilité pour que, après [j. parties, le jeu ne soit pas encore terminé et que l'état des Ibrtunes soit (/, y./? — i). On aura, par le principe de la probabilité totale,

(21) tfK[^+ 1) =/>l'f)(l^)-+-P2?2(H-)-+-. ..-\-pi,On(\^),

p\ désignant la probabilité de passer en une partie de l'état [k, m — k) à l'état (t, m — i).

Or on voit avec un peu d'attention que p'l~^ est égal à i , et que pour les autres valeurs des indices /?^, est égal à ^^ ou à zéro, suivant que la valeur absolue de / — k est égale à i ou diffère de 1 . D'apièscela, la formule (21) donne les n relations

] 2iy„_2([^ + l) = 0„_3([a)-|- C3„_i([a),

2©2([-H-l) = Cp,([a) + Ç;3(li),

2çpi([a + i) = ^i{\J.)\

d'où il (aut tirer cp, (a); car, celle quantité étant connue, on aura, pour la probabilité chercliée,

Or, si l'on adjoignait aux équations (22) celles qu'on obtient en changeant ix en i^ -^ i dans la seconde, ;jl en a+ i, u + 2 dans la troisième, ..., ;a en ;a + i , u + 2, /. . , a -+-,/- i dans la dernière, on aurait l/^(/^ + ,) relations qui, par réilminalion des \n{ji -^ i)_ I quantités cp doni l'Indice dKîere de i, conduiraient à une équation de la forme

(23) cp,([a + /i)+ A,0,(;ji^ /i — 1)+...^ A„cp,(;ji) = 0.

D'adieurs, si «,,«,,, ..., a,, désignent les racines de l'équation caractéristique que l'on obtient en faisant dans (28) cp, (a) = aP^, l'expression générale de o,{'j.) sera I'ck^^ et, par suite, la valeur de P^ sera ISc^^j^-', les constantes c,, c,, . , . , c„ étant déterminées par les conditions initiales du problème.

Cette détermination se fait élégamment de la façon suivante : d'abord, ni Pierre ni Paul ne peuvent être ruinés avant la (in de la „ieme partie; d'autre part, la probabilité pour que le jeu cesse juste après la /«*— ■ partie, c'est-à-dire la probabilité pour que Pierre ou Paul perde n fois de suite, est

De là résultent les relations linéaires

(24) ScA.= o, Sc/,a/,= o, ..., Zc/,ar' = o, ^cual^"

qui permettraienl d'obtenir c,, Co, ..., c« et, par suite, P^ en (onction des racines «,, a., . . . , «,,. Mais ce que nous voulons, c'est l'expression de \^^ en fonction des coeflicients de Téquation caractéristique.

Or, si l'on pose

{z — a^)(z — a^) . . .{z — Un) = ^){z}

et SI l'on ajoute les équations (24) après les avoir multipliées res-

pectivement par les coefficients de t^, tt, r-, ..., <"~' dans le quotient

on obtient

ou, en multipliant par

et désignant par E(3) la partie entière du premier membre,

SJ- — 1

On voit par là que le coefficient de - dans le développemcTit du premier membre est aP^; la probabilité cliercliée Pj^ est donc égale au coefficient de - dans le développement de

2«-iO(x;)

Il reste à trouver l'équation caractéristique. Au lieu de la chercher par le procédé laborieux ci-dessus indiqué, nous l'obtiendrons rapidement comme il suit : les relations (22) montrent que, si l'on pose

cpi([a) = a\>; on a

cp/,(f^) = rtF^J; /,(«;, cp/,(u. + i) = a\>--^^ '\>/c{a);

de là résultent les équations

d/;jH- a? dio -+-']>, = o,

on x désigne la (jiianlilé — 'la ; et l'('liiniiialioii des '| donne

Les v'^aleurs ('videnles

V] = .r, Yo = X'- - ■>.,

et rt'clielle de t-elalion

V,; = .rV„-i — V„-2,

que Ton oblienl ininif'diatcnicnl en di'v(>lo|)|)an! le déteiniinanl par rapport aux deux deniièrcîs lignes, prouvent (pie la fonction \ „ esteelh; cpie l'on renconire dans la théorie d(; la division du eeiele en |)arties égales et cpii a pour expression

\ „(x^ — X" — nx"~- -I-

/• désignant le plus grand nombre entier conlenu dans -^n. Donc P(;. est le coeflîcient de - daus le développement de

on, ce qui revient an même, en posant

Pp_ est le eoelfieient de jk^^"" dans le développement de

■i\>--^ ■ 1-4- .\|_X^-+- AjJ'^-r-... '

A/ dé>ignanl le cofiffieient de x" -' dans V,i{x) et, par suite, étant égal à y.vro (juand l'indice / sui'passe ^^ n .

Ce quotient a pour expression

Byi; désignant le déterminant d'ordre k

Al I o . . . o

A2 Al I . . . o

B;t=(-i)^" A:, x\2 Ai ... o

il- A/,_i A/,._2 • • . Al

On voit par là que, si tj. — /i est impair, Pjj,, est nul, et que, si jjL — n est pair et égal à 2k, on a

Une vérification s'ofTre ici d'elle-mêine. Pour /i = 2 ou /i = 3, le déterminant Bh se réduit à son terme principal, et l'on retrouve immédiatement les résultats obtenus directement aux n"* 110 et 111.

113. On peut rattacher au problème de la ruine des joueurs l'espérance, acceptée souvent, d'accroître les chances de gain par une ingénieuse disposition des mises et du nombre des parties jouées. Toutes ces combinaisons sont illusoires. Si les conditions du jeu rendent pour chaque partie respérance mathématique égale à la mise, l'égalité ex'stera, (juoi qu'on lasse, quel que soit le nombre des parties.

Nous nous bornerons à examiner un procédé plausible pour accroître les chances de gain en laissant celles de perte petites.

Un joueur entre au jeu avec la résolution de continuer tant (|ue le sort lui sera favorable et de se retirer après sa première perte. Le nombre des parties (ju'il jouera peut être illimité et le bénéfice immense; la perte, au contraire, sera nécessairement petite, égale tout au plus à la mise pour une seule partie.

Lors(|ue l'on compare, cependant, les chances de perte à celles de gain, on les trouve, comme cela doit être, équivalentes, lorsque les conditions du jeu, à chaque partie, sont équitables.

Soient

p la probahililé de gagner une partie;

a la somme à recevoir;

q la probabilité de perdre;

b la somme à payer dans ce cas ;

on a

Le joueur a une probabilité q de perdre la somme b\ une probabilité pq de gagner a — b: une probabilité p- q de gagner 2rt — b^ etc.; une probabilité p'^q de gagner n((— b. Son espérance mathématique, au moment où il se met au jeu, est donc

pq{a — b)^ p-q{ia — b)-r-. . .-+- p"cj{iia — b) ^ .. .— qb, c'est-à-dire

pqa (I -H i/J -+- 3/?2 -h . . .) — pqb {l -^ p -^ f^ -^ . . .) — qb

et, en remplaçant les deux séries par leuis valeurs et

pqc- pq^ ^qij^PfL -^b,

{l—pf \—p q

c'est-à-dire zéro si le jeu est équitable.

L'avantage prétendu de la combinaison se réduit à accroître la valeur possible du gain, en diminuant proportionnellement la |)robabilité de l obtenir.

PROBABILITÉ DES CAUSES

Un jour, à Naplcs, un homme de la lîasilicate, en présence de l'ahbé Oaliani, agita trois dés dans un cornet et pariii d'amener rade de 6 ; il l'amena sur-le-cliarap. Cette chance est possible, dit-on; l'homme réussit une seconde fois, et l'on répéta la même cliose ; il remit les dés dans Ifl cornet trois, quatre, cinq fois, et toujours ralle de 6. « Snngiie rii Bacco! s'écria l'abhé, les dés sont pipés! » et ils l'étaient.

DlDEKOT.

114. Ce que, dans le Calcul des probabilili's, on entend par le mot cause. — 115. Enoncé du problème à résoudre. l"\)rmule qui en donne la solution. — IIG. Autre démonstration de la formule. — 117. Problème relatif à la composition inconnue d'une urne. — 118, 119. Aiitie manière de comprendre l'énoncé.

— 120. Problème plus général. — TM. Loi approchée des probabilités.

— 122. Autre manière de précisnr l'énoncé. — 123. Applications incorrectes des résultats précédents. — 124. Discussion d'une expérience de BufTon. — 125. Discussion de la méthode d'approximation adoptée. — 12G. Cas extrême où la conclusion du raisonneinent souvent accepté serait évidemment sans valeur.

— 127. Mégularité des naissances masculines et féminines. — 128. Quelle est la régularité dont on serait en droit de s'étonner? — 129. Exemple cité par Buffon. — 130. Exemple cité pir Laplace. — l.'il. Les conditions d'un problème doivent être définies avec détail. — 13'2. 133. Quelques exemples. — 13't. Application faite par Mitchel à la théorie des étoiles doubles. — 135. Probabilité

des événements futurs. — 13G. Applications ridicules de la formule à la probabilité du lever du SoleiL

114. Étudier les faits pour remonter aux cau.se.s est le but le plus élevé de la Science. Notre curiosité est ici moins amhilieuse. Nous n'aurons dans ce (chapitre aucune loi de la nature à discuter, aucune énigme à résoudre. Les causes sont pour nous des acci-

dénis qui ont accompagné on précédé un événement observé. Le mol n'implifiiie pas (pi'an sens philosophique l'éveneiiient soil un elTel produit par la cause.

Pierre a parié d'îunener avec trois dés un point supi-rienr à i6 -, il a gagné : tel est l'événement. Le point amené]eut être \- ou i8 : telles sont les causes possibles du succès.

On a, sous un même nom, réuni plusieurs cas distincts : ce sera, par exemple, un point |)lus ^rand cpie i6 qui peut être 17 ou 18; la sortie, au loto, d'un numéro divisible par 5 cpii peut être 5, 10, 10, ... ; le tirage, dans une urne, d'une boide de couleur qui peut être rouge, verte ou jaune; la retourne, dans une partie de caries, d'une (igure (pu peut être roi, dame ou valet. L'événement s'est produit, on lésait; les causes cpii, dans ces dilïerents cas, restent possibles sont les maMièr(;s diverses dont il a pu se présenter. On sait ipiiine rivièie a (h'bordé en Lspagiie : c'est à la Géographie, non à la Météorologie, cpTd appartient, par l'énumération des cours d'eau, de faire connaître la diversité possible des causes.

De tels cas sont les plus simples. Les causes dont on cherche la prohabililé ne peuvent, si elles agissent, produire qu'un seul événement dont l'arrivée, supposée connue, diminue le di'noininateiir de la probabilité sans en changer le niiniérateii r. On s;iil, par e\em|)le, qu'en donnant les cartes on a tcloiiriK- une timire. Ouelle est la probahilité pour qu'elle soit un loi? i^e numérateur de la probabilité est le même qu'avant le renseignement donné : c'est le nombre des rois ; mais le dénominaleur, n()nd)ie des eaites possible, a diminué : les figures seules doivent v être c<)iiq)l('es.

On sait qu'au lolo le numéro sorti est divisible |)ar 5, on demande la probahilité pour (pi'il soit 9.5. Le numérateur de celte probabilité est 1, comme avant le renseignement donné; mais le dénominateur, qui était 90, nond)re total des numéros, est devenu 18, nombre 'les multiples d(; 5.

Le numérateur de la probabilité, dans d'autres cas, est changé, en même temps que le dénominaleur, par la connaissance de l'événement observé. Quelquefois aussi, les cas restés possihles ne sont pas également vraisemblables.

Deux urnes, []ar exemple, sont d'aspeci identique : l'une contient ime houle blanche et une boule noire; l'autre, dix boules

noires et une blanche. On choisit une des urnes, on en fait sortir une boule, elle est blanche; quelle est la probabilité d'avoir choisi la première urne ?

Deux causes sont possibles : la première urne et la seconde urne; mais, contrairement à ce qui avait lieu dans les cas précé-

dents, aucune de ces deux causes, supposée véritable, ne rend certain l'événement observé. On pourrait considérer comme causes possibles les deux boules blanches qui ont pu sortii-, l'une de la première urne, l'autre de la seconde; mais ces boules n'ont pas même vraisemblance. La seconde, associée à dix autres boules, a moins de chances de sortir (jue la première et sortira certainement moins souvent si l'épreuve est renouvelée un grand nombre de fois.

Ho. Le problème général peut s'énoncer comme il suit :

Diverses causes E,, Eo, . . . , E,, ont pu produire un événement observé. Les probabilités de ces causes, lorsque le résultai n^ était pas encore connu, étaient w^., ro^, . . . , to,,. L'événement se produit; la cause E/, lorsqu'on est certain que c'est elle qui agit, donne à l'événement la probabilité />/. Quelle est la probabilité de chacune des causes qui sont, on l'admet, les seules possibles?

Le type des problèmes dont nous parlons peut être représenté par une urne conlenant des boules blanches et des boules noires. L'événement est la sortie d'une boide ; elle est blanche, on le sait. Mais chaque boule est marquée par un des numéros i , 2, 3, . . . , /i. Quelle est la probabilité pour que la boule blanche sortie soit marquée d'un numéro donné? Ces numéros représentent ici ce que l'on nomme les causes possibles de l'événement, sans avoir rien de commun, bien entendu, avec l'idée de causalité.

Si [i. désigne le nombre total des boules, jx, le nombre de celles qui sont marquées i et, dans ces |jl/, mi le nombre des boules blanches, le nombre total des boules blanches est

nti -f- m-i -h niz -f- . . . -t- /«„,. Elles sont toutes également possibles, puisque, placées dans la

nièmie urne, chacune, considéiée individuellemenl, a chance é^ale de sortie. La prohabililé pour que la boule blanche que l'on a lirée et donl ou n'a pas vu le numéro soil mar(|uée d'un i est

Telle est la solution du prolUrine. Il reste à l'exprimer en fonction des donriées. Ou a

car consé(|uent.

nii = pi\xi — piWi\x.

La proi)abilité est donc, eu snppriiuanl le facteur a,

P\TSi-f- p.

Pn^n

Le dénominateur est le même pour toutes les valeurs de i, et les probabilités des diverses causes sont proportionnelles, par conséquent, aux produits de la probabilité de chacune, avant l'événement (to/), par la probabilité qu'elle donne à l'événement (pi) quand on la suppose certaine.

il6. La démonslralion |)eut se faire autrement.

La probabilité cherchée est celle pour que l'événement qui est arrivé, on le sait, soil dû à la cause re|)résentée par l'indice ;'.

La probabilité pour que, avant l'épreuve, l'événement en question se produisît et fût dû à la cause désignée est un événement composé, et cela de deux manières :

i" Il faut que la cause soit mise en jeu ; 2" Il faut qu'elle |jroduise l'événement.

Ou bien :

i" Il faut que l'événement se produise;

'2" il faui que, étant produit, il soit dû à la cause désignée.

l42 CALCLI. DKS l'ROliAlilLITÉS.

On en déduit deux expressions de lii même prohabilllé

TO//>,- = (/> 1 TTii -f- /?, rrr. -h . . . H- p,, 7tt„) .r,

et, par eonséqneni, la probabilité x pour (|iie l'événement, étant prodiiil, soit dû à la eaiise désignée |)ai' Tindice i est celle qui a été obtenue (llo)

/»lT7Ti-4-/;,7772^-. . .-^r- pnm,i

117. J'îîoinJMK LVIll. — Une urne eontient jjl boules : les unes sont blanches, les autres noires, on iiinore en quelle proportion. On tire k boules, en remettant à chwjue fois la boule sortie. Il ne sort que des boules blanches. Quelle est la probabilité pour que l'urne ne contienne que des boules blanches?

La question est mal posée.

On Ignore, dit l'énoncé, la proportion dans l'urne des boules blancbes et d(;s boules noires. Toutes les bypothèses sont possibles. Il faudrait dire, en outre, quelle est, a priori, la probabilité de cliacune. Si, tontes les combinaisons jiossibles avant été prépaiées dans des urnes d"apparen<;e identique, le hasard a décidé entre elles, les conditions sont autres que si l'on a puisé au hasard dans une urne de composition convenue, pour composer avec les boules ainsi tirées l'urne nouvelle dont nous parlons.

Nous admellron-, d'abord, pour préciser la queslion, que toutes les compositions de l'urne soient, a priori, également possibles. Toutes restent possibles après l'é[]reuve, à l'exception d'une réunion de boules noires, mais les probabilités ne sont plus égales.

La combinaison dans Ia(|uelle, sur jx boules, le nombre des blancbes est n donne à l'événement observé la probabilité

Les probabilités désignées par w,, ttio, ..., vs„ dans l'énoncé général sont supposées égales entre elles; en les supprimant comme facteur commun dans la formule (.), on trouve la probabi-

liié i)oiir que le nombre des boules blanches soil ii

La probabilité pour que louLes les boules de l'urne soienl blanclies est donc

Si Ton suppose, par exemple, ;jl ^ 5, k = 6, après avoir lire six l'ois de suite une boule blanche d'une urne qui contient cinq boules, la probabilité pour que les ciiicj boules soient blanches est

118. Si, au lieu de supposer toutes les combinaisons également possibles a priori, on avait composé Turne en tirant au sort, à |)ile ou face par exemple, la couleur de chaque boule, le problème serait très ditlerent.

Les hypothèses possibles sur la composition de l'urne, au lieu d'être également vraisemblables a priori, oui les probabilités suivantes :

5 blanches ou 5 noires,

1 ^ 0,00i '2'j ;

4 blanches et i noire ou 4 noires et i blanche, 51 -) = 0, i5(v25;

3 blanches et 2 noires ou 0 noires et 2 blanches,

Les probabilités désignées parrî5,,ro^, ..., fn„ dans la lormule (i) sont proportionnelles aux nombres i , 5, lo, lo, 5, i, et la probabilité, quand six fois de suite on a extrait une boule blanche, pour

que les cinq boules de l'urne soient blanclies est

io.-2^-+- io.3"-i- 5.4®-t

119. Si, après avoir extrait les boules de l'urne, on ne les remeltail pas, les résultats seraient différents.

Il est clair, d'abord, qu'on ne peut, dans cette hypothèse, extraire plus de cinq boules, et que, si on les extrait toutes les cinq, il n'y a plus de problème.

Supposons donc que l'événement observé soit la sortie de quatre boules blanches; les probabilités, a priori, des diverses compositions de l'urne étant proportionnelles à i, 5, 10, 10, 5, i, cherchons la probabilité pour que la cinquième boule qui reste dans l'urne, la seule que l'on n'ait pas vue, soit blanche.

L'événement observé est la sortie de quatre blanches. Les hypothèses possibles lui donnent pour probabilités : i, >-, 0, 0. 0, 0.

La formule (i) devient, en y substituant les valeurs de nji et de Pi,

Ce résultat est évident a priori.

Après avoir vu quatre des boules, sachant que pour les cinq la couleur a été tirée au sort, on n'a acquis sur la dernière aucun renseignement. Les circonstances pour elle sont les mêmes que si, lorsque l'on procédait à la formation de lurne, le hasard avait désigné la couleur blanche aux quatre premières épreuves. On ne devrait y voir aucune raison pour qu'il la désignât une cinquième fois.

120. Problème LVIII his. — Une urne contient des boules noires ou blanches en proportion inconnue. On y fait ^ tirages, en remettant dans l'urne, après chaque tirage, la boule qui en est sortie. On a obtenu m boules blanches et n boules noires. Quelle est la composition la plus probable de V urne?

L'énoncé, comme celui du problème précédent, n'est pas suffisamment précis.

Toutes les hypothèses sur la composition de l'urne étaient possibles avant l'épreuve. L'étaient-elles également? Il est nécessaire de le dire. Nous le supposerons d'abord.

Soil X la probabilité assignée à la sortie d'une boule blanche par lii composition de l'urne.

La probabilité de l'événement observé, la sortie de m boules blanches et de n noires^ est

Le nombre des combinaisons qui peuvent se présenter est indépendant de a?, et la probabilité de l'événement observé, que l'on connaisse ou non l'ordre de sorlie des boules, est proportionnelle à

Ce produit doit remplacer la probabilité désignée par pi dans la formule (i); les probabilités tjt/ sont supposées égales entre elles, et la probabilité de chaque valeur supposée pour x^ proportionnelle au produit/>/Tn,, est, dans le cas actuel, proportionnelle à

La valeur de x la plus probable rendra ce produit maximum. Eu égalant la dérivée à zéro, on trouve

iT _ I — X

La composition la plus probable est celle qui rend les probabilités de sortie des boules blanches ou noires proportionnelles aux nombres de (bis qu'elles se sont montrées.

121. Chaque hvpotlièse sur la valeur de .r a une probabilité. Nous devons en chercher la loi. Il ne peut être question d'assigner la valeur de Tune de ces probabilités. Toutes les hypothèses ayant été supposées possibles et leur nouibre étant infini, la probabilité de l'une d'elles, rigoureusement désignée, est o; mais la probabilit(' pour que x soit compris entre z ftX. z -^ dz est proportionnelle à dz.

B. lo

X46 CALCUL DKS PROBABILITÉS.

La loi des probabilités esl celle des valeurs de la fonction

"^ x'"{i — .xy',

à laquelle elles sont pioportionnelles.

Pour étudier celte fonction dans le voisinage du maximum, posons

Le maximum étant

p>nqt

la valeur voisine sera, en posant x =^ p — s, i — x =^ q -\- z^

(p — zy"(q -^E)" = /?'« q" (I

p"^r/" élant indépendant de e, la probabilité est proportionnelle au produit

OU a

m n\ ^ r m(m — i) 2 mn n(n — i)

en négligeant les puissances de e supérieures à la seconde. Or, à cause de

P 9 P + 9 l'expression précédente peut être remplacée par

ipq

OU, au même degré d'approximation, par

CHAP. VII. — PROBABILITÉ DES CAUSES. 1 ^J

et, par conséquent, la probabilité pour que la composition de l'urne donne à la sortie d'une boule blanche la probabilité

et à celle d'une boule noire

est proportionnelle à

prop

et |)eut être représentée par

Ge -PI ,

G étant indépendant de t.

Cette formule équivaut à celle qui a été trouvée (08). On a, dans les deux cas, obtenu n fois sur ijl épreuves un événement

dont la probabilité est/?. La différence e, égale à p, est remplacée par h égale à n — p<^. La probabilité d'une valeur désignée de h est proportionnelle à

La seule différence des deux théorèmes consiste en ce que, dans un cas (08), p est donné exactement, le doute porte sur la valeur de n; dans la formule actuelle (121), n est d<mné exactement, le doute porte sur la valeui- de p.

122. La formule précédente est déduite d'une hypothèse qui se réalisera rarement. Toutes les probabilités désignées par x ont, en général, a priori, des valeurs inégales.

Problème LIX. — Une urne contient N boules. On a tiré au sort la couleur noire ou blanche, avec probabilité ^ pour chacune des boules. Sur jo. tirages, faits dans l'urne ainsi coni-

posée, on obtient m boules blanches et n noires. Quelle est la composition la plus probable de l'urne?

La probabilité pour que, dans une urne ainsi composée, le

nombre des boules blanches soit^ z est approximativement (58),

si N est grand et z petit,

iATn

La probabilité de la sortie d'une boule blanche est, dans cette hypothèse,

Posons ^=j; la probabilité d'une valeur désignée de j est proportionnelle à

(4) e La probabilité de l'événement observé est proportionnelle à

Les probabilités dési<;nées par to/ et />/ dans la formule générale (L16) doivent être remplacées par (4) et (5).

La probabilité de la cause, c'est-à-dire de la valeur jk, est proportionnelle au produit

(6) '^'"'{ï-yyW^y)"-

En égalant à zéro la dérivée du logarithme, on obtient, pour déterminer la valeur Ae y qui rend (6) maximum, l'équation

I — 2JK I -+- -i-y

ou, comme j^ est petit,

— aNj' — m(n- 2j) -f- n{i — -ly) = o, d'où

La plus grande probabilité correspond à

ri — ni

La composition la plus probable de l'urne donne à la sortie d'une blanche la probabilité

2 '2 (N -H //i H- n) 2 (iN -H /« -+- /«)

Celte fraction est comprise entre ^ et On aurait pu le

prévoir. Avant le tirage d'aucune boule, les chances pour les deux couleurs étaient égales, le rapport le plus vraisemblable était celui qui donne la probabilité i. Si le tirage indique pour l'une des couleui-s la proportion de m à m + /^, c'est une raison pour croire au même rapport dans l'ensemble des boules. Si ces deux indications ne s'accordent pas, la probabilité la plus plausible est entre les deux.

Si N est très grand, la formule (-) est très voisine de ^, quels que soient les nombres m et n] si, au contraire, m et m + n sont

très ffranils, elle est voisine de ■? quel que soit N.

Ces conclusions du calcul pouvaient également se prévoir.

Si le nombre N est très grand, on a fait, pour choisir les couleurs des boules de l'urne, un très grand nombre d'épreuves, donnant chacune à la couleur blanehe une probabilité ^. Il est certain, d'après le théorème de Bernoulli, que le rapport du nombre des boules blanches à celui des boules de l'urne dilTère peu de ^. Cette certitude est assez grande pour ne pas être notablement amoindrie par les couleurs, quelles qu'elles soient, de cpielques boules tirées de l'urne. Si cependant, après un nombre immense d'essais, on trouve entre le nombre des boules blanches et le

nombre des boules sorties un rapport très dillerenl de ^, on se trouvera en présence de deux certitudes inconciliables.

Nous adoptons, on le voit, le sens vulgaire du mot cer^f^Mo^e. On tire au sort mille fois entre la couleur blanche et la couleur nou-e, eu leur donnant des probabilités égales. Dans Purne contenant les boules dont les couleurs sont ainsi désignées se trouveront, à très peu près, autant de boules blanches que de boules noires :

on peut le tenir pour certain. Sur ni -\- n tirages, on oblieni m boules blanches; le rapport du nombre des boules blanches au

nombre total diffère peu de > on peut aussi le tenir pour

certain. Les deux rapports cependant sont très inégaux. On est évidemment dans un cas exceptionnel, possible assurément, mais fort rare.

Supposons, par exemple, N = iooo. Dans l'urne composée de looo boules, contenant vraisemblablement, d'après la manière dont elles ont été choisies, 500 blanches environ, on ("ait 4 tirages. On tire 4 boules blanches. La composition la plus probable de l'urne, d'après la formule (7), est telle que le rapport du nombre des boules blanches au nombre total soit

La démonstration sup|)Osant un grand nombre d'épreuves faites dans l'urne n'est plus applicable, il est vrai, au cas où le nombre m -\- n se réduit à 4- Le résultat est cependant peu difl-Vnent du véritable. On a vu 4 boules blanches; amenées par le hasard, elles sont presque certainement dillerentes; on ne sait rien sur les 996 autres. Le nombre des boules blanches le plus

vraisemblable est, pour cette portion de l'urne, 49^ j cgVa fait, en tout, 502 pour le nombre le plus probable des boules blanches et pour probabilité la plus vraisemblable -;

502 loi

1000 500

Si, dans la même urne composée de 1000 boules, on a fait 40000 tirages et obtenu 22000 boules blanches, le rapport le plus probable donné par la formide (7) est

peu différent du rapport-^ indiqué par le résultat du tirage; les

motifs qu'on avait d'abord de croire à un rapport voisin de ^- se trouvent en quelque sorte annulés pai* les 40000 épreuves qui les

contredisent. Tous ces cliifTres, nous devons le répéter, sont possibles, mais absolument invraisemblables.

La probabilité pour que, sur looo boules dont la couleur a été désignée par le sort, avec chance égale pour blanc et pour noir, le nouibre des blanches soit inférieur à 550 est (60)

Deux cas, en effet, sont po-^sibles : ou les noires sont en majorité, ce dont la probabilité est ^; ou l'écart est positif et com|)ris entre o et 50.

On a

v/âoo

Il y a plus de mille à parier coulre un. a p/'/ori, (pi'un tel écart ne se produira pas. Nos h vpoLl)«"ses cependant le rendent probable. La sortie de 22000 blanches sur 40000 tirages dans une urne contenant nombre égal de blanches et de noires présenterait une anomalie plus smgidière encore. Si la probabilité de tirer I boule blanche est 4^, la piobabililé d'en obtenir moins de 22000 sur 40000 tirages est

0(1 4) est tellement voisin de limité, que révéuement doit être considéré comme certain, r(;véneinent contraire comme impossible. On pourrait renouveler l'essai des milliards de milliards de fois sans avoir chance d'obtenir, sur 40000 épreuves, 22000 fois un événement dont la probabilité est^.

123. On a assimilé sans raison au problème précédent des questions en réalité fort dilïérentes.

l^orsqne les observiilioiis démenlenl des prévisions dont la probabilité semblait grande, on présume, naturellement, l'influence d'une cause perturbatrice et l'on est conduit à chercher la probabilité de son existence.

La question est insoluble. On n'a pas, d'une part, les données nécessaires. Le dilemme, d'autre part : ou il existe une cause, ou il n'en existe pas, n'a pas la netteté promise par la l'orme de l'énoncé.

Qu'entend-on, si Ton dit : il y a une cause?

On a jeté une pièce de monnaie looo lois, elle a montré face 5io fois. Quelle est la probabilité pour (jue cet écart soit dû au hasard ou pour (piil résulte de l'imperfection de la |)ièce?

Les hj[)othèses possibles sont en nombre inlini.

La pièce [^eut être parfaite.

Elle peut donner à l'arrivée de face une probabilité quelconque plus grande ou plus petite que ^.

L'événement observé, l'arrivée de 5 i o fois face sur looo coups, est compatible avec toutes les hypothèses : il se peut que, la pièce étant parfaite, le hasard ait amené ce petit écart; que, la pièce lavorisant l'arrivée de face de manière à rendre l'écart le plus probable plus]. elil (|ue lo, le hasard ait complété la différence; que la pièce rende probable un écart plus grand, beaucoup plus grand même que lo, ou que, inéj^ale en sens opposé, elle donne probabilité à l'arrivée de pile plus fréquente que celle de face, et que le hasard cependant ait amené l'excès lo.

C'est précisément, dira-l-on peul-êire, parce que tant d'hypothèses sont possibles qu'il y a lieu de chercher la probabilité de chacune.

La recherche ne peut aboutir : les données sont insuffisantes. La solution varie, en effet, avec la probabilité a priori de telle ou telle imperfection de la pièce, et cette |)robabilité n'est pas connue.

Si l'exj)érienee est faite dans un pavs où ta fabrication des monnaies a une grande perfection, les grands écarts, a priori, sont presque impossibles, et, parmi les petits, ceux qui favorisent face ont même probabilité que ceux qui favorisent pile.

Si les pièces, par leur relief exagéré, favorisent toutes le même résultat, le problème est autre que si, par un autre accident de la

fabrication, elles lavorisaienl le résultai contraire. Il faut remplacer par une livpotlièse les renseignements qui font défaut.

L'hjpotlièse adoptée est inouïe.

Toutes les probabilités, depuis o jusqu'à i, données par la pièce à l'arrivée de face sont supposées, a priori, également vraisemblables.

On a clierclié queUpiefois, non la probabilité de chaque hypothèse, mais la probabilité pour (|ue la chance donnée à l'arrivée de face soit plus grande cpie r,. Surpasse-t-elle 4 de un cent-millionième seulement, il faudra donner à celle dllférence imperceptible le nom de c«M5e et laisser croire, d'après la dénominal ion adoptée, que l'écart observé est dû à cette imperfection de la pièce.

11 n'est pas inutile de tiaiter, pour ne laisser aucun doute, un cas célèbie pris pour exemple par Poisson.

124. Bulfon a jeté une pièce de monnaie 401^ (ois et obtenu 2048 fois face.

Poisson a cherché la probabilité pour que la pièce de Buffon donnât à l'arrivée de face une probabililé plus grande que celle de pile.

Avant de résoudre la (piestion, il semble naturel de chercher si cet écart de 28, qui substitue 2048 fois face au (;hiirr(; probable 2020, est assez invraisemblable par lui-même pour rendre suspecte la pièce qui l'a donné.

La probabilité d'un écart h pour un événement dont la probabilité esl/> est

\l>. XX- pq

]x désignant le nombre des épreuves et q la probabililé i — /> de l'événement contraire.

La probabililé d'un écart moindre (jue h, en valeur absolue, est

/ e ^V-i>ndz = ^ / e-t'dt=Q[

T.pq Jo /- Jo \ S/'i- V-Pq J

yji \VKpq

Il faut, dans celte formule, faire /i = 28, ij. = 4040. On peut,

sans erreur sensible, remplacer/?^ p3r|; on aura

La Table des valeurs de, la fonction © donne

La probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire la probabibté pour que, la pièce étant parfaite, l'écart soit égal ou supérieur à 28, est donc G, 38.

Si l'on recommençait 1000 fois l'expérience de BufTon, avec des pièces parfaites, on obtiendrait 380 fois environ un écart supérieur à 28. Si donc le hasard est la cause du résultat obtenu, il n'y a pas sujet d'élonnement.

Résolvons cependant le problème.

Soient i H- 5 la probabilité donnée par la pièce de Ëulïbn à l'arrivée de face; {— z celle qu'elle donnait, par conséquent, à l'ar-

rivée de pile. Toutes les valeurs de z, entre —4 et i, sont supposées également probables a priori.

La probabilité de l'événement observé ('tait, avant l'épreuve, proportionnelle au produit

En

prenant le logarithme de ce produit, remplaçant

M--^^j pai" l-^-^ l{i-V-iz) = l~ -Jr-iz — iz"^,

M- — -j par l^-^l[i — 'iz)-=l]-—'i.z — iz^-,

on voit qu'en supprimant un facteur constant dont la présence ne change rien, la probabilité de l'événement était, pour une petite valeur de ^, proportionnelle à

La [)robabdité pour que z soit positif est donc proportionnelle à

et, pour qu'il soil négatif, à

on a

B et, en posant y.z — ^ = ^,

«^ dz

on a également

:J/-. -'•</, = >5J^Jv^e/?^•

Le rapport de la prohabilité pour «pie z soil positif à celle pour [u'il soit néffatif est donc

i/SoSo

V8oS(Si l'on désigne par yr?' et ^' ces deux probabilités, ou déduit de

Poisson a Irouvé 0,8io43.

120. Une difficulté pourrait s'élever, le principe du calcul étant admis, sur la formule d'approxifnation euiplovée. Après avoir désigné la probabilité cbercbée par ^ 4- z, et annoncé que toutes les valeurs de z seraient traitées comme également vraisemblables a priori, nous avons négligé les puissances de z supérieures à la seconde.

Cela est permis. Lorsque z en efTet n'est pas petit, la probabi-

lilé de l'événement observé peut être considérée comme nulle, aussi bien que l'exponentielle qui la remplace. C'est pour la même raison que, z étant compris entre o et j, nous pouvons étendre les intégrations de o à oo.

126. Si Bufion, au lieu de jeter la pièce 4040 fois, l'avait jetée I fois seulement et qu'il eût obtenu face, l'événement, on en conviendra sans peine, n'apprendrait lien sur la qualité de la pièce.

Cherchons cependant, en appliquant les mêmes principes, la probabilité pour que la pièce ait une tendance à favoriser face.

Soit^ la probabilité que la pièce donne à l'arrivée de face. La probabilité de l'événement observé étant x et les probabilités de toutes les hypothèses étant supposées égales a priori, la probabi-

lité de cha(jue valeur de x est pioportionnelle à .r; la [)robabilité pour que x soil compris entre ^ et i est pro|)ortionnelle à

et, pour qu'il soit compris entre o et :^, à

le rapport est 3 et les probabilités dont la somme est l'unité sont

et T.

Une telle conséquence suffirait pour condamner le principe.

127. La régularité du rapport des naissances masculines et féminines a beaucoup occupé les géomètres. On a commis, en étudiant des anomalies toujours petites, des erreurs semblables à celles que je viens de signaler. On a assimilé les naissances à des tirages au sort faits dans une urne de composition constante, dans laquelle le rapport du nombre des boules blanches à celui des boules noires différerait peu de celui des nombres de naissances indiqué par la Statistique.'

Une telle substitution n'est légitime que si les écarts observés sont compris dans les limites et suivent les lois que la

CHAP. VII. — PROBABILITE DES CAUSES

théorie montre certaines dans une suile d'épreuves réglées par le hasard.

S'il arrivait que, dans la France entière, le rapport, d'une année à l'autre, présentât de tro|) grandes variations ; ou si, au contraire, il se maintenait dans de tiop étroiies limites, il faudrait

conclure, avec grande prohahilité, qu'une cause intervient pour régler le hasard ou pour le Irouhlei'.

La régularité de l;> proportion à Londres entre les années 1629 et 1710 a été admiré(î (omme un miracle par un savant, novice encore à la théorie du hasard. Nicolas Bernoulli, digne héritier de son oncle Jacques et éditeur de son beau l^ivre, montra au contraire dans les chillVes signalés la confirmation des principes. Admettant l'assimilation des naissances à un tirage au sort, sur i4ooo naissances annuelles, tel était le cliillVe moyen pour la ville de Londres, il est très vraisemblable que l'excès du cliiflVe des garçons sur la valeur moyenne ne surpassera pas une (bis en cent ans i63; c'est l'écart le plus grand (pie l'on ait observé à Londres.

La probabilité d'un écart inférieur à une limite A entre le nombre des naissances masculines, sur i4ooo enfants nés annuellement, et le nombre supposé le plus probable, 'jaoo, a pour expression très approchée

v/-*- i^pg

On suppose, bien entendu, que, par une règle de trois, on ramène toujours le nombre di-s naissimces à i4ooo.

Si l'on fait «. ^ i4ooo, À= i63, le produit pq pouvant être remplacé par |, on trouve pour probabilité

il j a donc plus de cent à parier contre un, chaque année, jwur que le hasard n'amène pas l'anomalie dont Arbuthnot admirait la petitesse et qui s'est produite une fois seidement en cent ans.

128. On peut se demander jusqu'où devrait aller la régularité pour qu il y eût lieu de s'en étonner. Cherchons, pour piéciscr la

question, quel est l'écart qu'il y a dix mille à parier contre un de franchir une fois au moins en cent ans.

Nous avons vu (lo) que, si la probabilité d'un événement est

-> il y a dix mille à parier contre un que, sur 9,2/1 épreuves, l'événement se produira au moins une fois. Si l'on a

9,2/1=100, c esl-a-dire —=0,092,

il y aura dix mille à parier contre un pour que l'événement dont

la probabilité est — se produise une fois au moins sur cent

épreuves. La probabilité pour que l'écart, pendant une année, sur i4ooo naissances soit plus grand que A est

e-"dt = 1- e

ipq

Déterminons X de telle sorte que cette probabilité soit 0,092 et, par conséquent,

La Table donne

y/a IJ-pq

On peut remplacer 2u.pqpàr 'jooo; on en déduit

Si, dans un siècle, l'écart n'avait pas une seule fftis dépassé 99 ; si, sur i4ooo naissances annuelles, le nombre des garçons s'était maintenu entre y;5oo et 7100, une cause régulatrice serait presque certaine; il y a dix mille à parier contre un, a priori, pour

que le hasard, sur cent épreuves tentées dans la même urne, ne maintienne pas une telle régularité.

129. Buffon a signalé une commune de Bourgogne dans laquelle, sur 2000 baptêmes enregistrés pendant cinq ans, le nombre des filles a surpassé de 20 celui des garçons. Il est né dans cette com-

CHAP. VII. — PROBABILITÉ DES CAUSES

niune, sur 2000 enfants, 89 garçons de moins que le chiflTre normal. La formule donne 0,92 pour la probabilité d'un écart, en plus ou en moins, inférieur à 09; 0,08 est, par consécpieni, celle d'une anomalie au moins égale à celle qu'a signalée Bulîon ; les statisticiens la rencontreraient souvent, s'ils la cherchaient.

130. Laplace a trouvé, pendant le xviii« siècle, la proportion des garçons aux filles plus petite à Paris que dans l'ensemble du pays, fl au lieu de ff, chiffre normal adopté alors, auquel les documenls nouveaux et plus nombreux ont substitué — .

Quelle est, se demande Laplace, la probabilité pour (pie cette différence soit due à une cause?

« A Paris, dit-il, les baptêmes des enfants des deux sexes s'écartent un peu du rapport de 22 à 21. Depuis 1746, époque à laquelle on a commencé à distinguer les sexes sur les registres des naissances, juscpi'à la fin de 1784, on a baptisé dans celte capitale 398886 garçons et 877055 filles. Le rapport de ces deux nombres est à peu près celui de 25 à 24 ; il paraît donc (pi'à Paris

une cause particulière rapproche de l'égalité les baplêmes des deux sexes.

» Si l'on applique à cet objet le Calcul des probabilités, on trouve qu'il y a 288 à parier contre i en faveur de l'existence de cette cause. »

Laplace supprime les détails. Ni ses calculs ne sont rapportés, ni les principes sur lesquels ils reposent.

131. Faut-il croire à un écart fortuit ou affirmer l'existence d'une cause? Les données ne sont pas suffisantes. Comment se prononcer de la même manière si les études antérieures ont appris (\y\e le rapport varie très rarement, ou si l'on constate, partout où les documents sont nombreux, des écarts comparables à ceux dont s'étonne Laplace? La solidité plus ou moins grande de la règle qui se trouve en défaut doit faire apprécier différemment les consé(|uences.

Il n'est pas inutile d'insister.

Si l'on assimile la distribution des naissances entre les deux

sexes à des tirages faits dans une urne, la probabilité pour que le hasard produise, sans rintervenlion d'aucune cause perturbatrice, sur ^^-0941 nnissances, un écart relatil égal ou supérieur à

— — -^ = 0,00i4'.i, est 43 49

/ e-'V^ = 1 — 0(1,762) = 0,0i3.

Si donc on dresse des listes pendant un temps suffisant, le hasard seul, on peut l'affirmer, produira i3 fois sur 1000 environ,

dans un sens ou dans l'autre, un écart égal ou su|)érieur à celui dont s'est préoccupé Laplace.

Si des causes autres que le hasard amènent aussi des anomalies, le statisticien, en classant par groupes de 'y'joooo naissances les registres de tous les temps et de tous les pays, trouvera un certain nombre de rapports anomaux égaux ou supérieurs à celui de Pai-is. Parmi ceux-là, quelques-uns seront dus au hasard, i3 sur looo environ, cela peut être tenu pour certain, si les chilFres sont suffisamment grands. D'autres écarts seront dus à des causes; nous en saurions à peu près le nombre, si la statistique était faite en retranchant du nombre total le nombre probable de ceux que le hasard a produits. Nous n'avons qu'un seul fait : est-il dû au hasard? 11 serait téméraire, impossible même, d'en rien dire sans accepter sur les probabilités a priori quelque, convention arbitraire.

132. Le possesseur d'un chronomètre a remarqué un r(;tard de 1% quand la température de la chambre dont le chronomètre ne sort pas s'élève de 10".

L'observation a été renouvelée vingt fois.

Quelles sont les probabilités pour que la chaleur soit la cause du ralentissement et pour que le concours des deux faits soit fortuit?

Le possesseur d'un chronomètre a remarqué une avance de i* le lendemain de chaque jour où les artilleurs se sont exercés au champ de tir voisin. ,

[^'observation a été renouvelée vingft fois.

Quelles sont les probabilités pour que l'ébi-anlement causé par

le lir ait changé la inarclie du chronomètre et pour que le concours soit fortuit?

Le possesseur d'un chronomètre a remarqué un ralenlissemenl de 1% chaque fois que la planète Mars passe au méridien entre minuit et i** du malin.

L'observation a été renouvelée vin"! fois.

Quelles sont les probabilités pour que la planète influe sur le chronomètre et pour que le concours soit fortuit?

Les problèmes sont identiques. Les réponses ne peuvent cependant être les mêmes : n'est-ce pas une raison pour reconnaître les données insuffisantes?

433. Les habitants de Saint-Malo s'étaient persuadé, il va un siècle, que, dans leur ville, le nombre des décès à l'heure de la marée haute était plus grand qu'à marée basse.

Admettons le fait.

Supposons que, sur les côtes de la Manche, on ait remarqué une plus grande proportion de naufrages par le vent du nordouest que |)ar aucun autre.

Les chiffres recueillis à l'appui des deux remarques ét;tnt supposés en même nombre et inspirant même confiance, on sera loin d'en déduire les mêmes conséc|uences.

Lorsqu'on sera conduit à accepter comme une certitude Finfliience du vent de nord-ouest sur les naufrages, les gens prudents exigeront des preuves nouvelles pour reconnaître seulement vraisemblable l'influence de la marée sur la dernière heure des Malouins.

Les problèmes, cette fois encore, sont identiques; l'impossibilité d'accepter une même réponse montre la nécessité de faire intervernr la probabilité a priori de la cause qu'on veut apprécier.

134-. Le fermier d'une maison de jeu a installé une roulette nouvelle. L'instrument, sur loooo coups, a amené la rouge 53oo fois et 4700 fois la noire. L'acheteur refuse le pavement et demande une indemnité : les joueurs ont remarqué les sorties plus fréquentes de la rouge et en ont profité. Un procès s'engage. On allègue le Calcul des probabilités. Jamais, dit le fermier, machine bien construite n'a donné un tel écart. 3oo coups sur 10 000 ne peuvent être B. u

l'ell'el du hasard. La probabilité de la lou^e n'est pas ^ coiniiie elle devrait. Peu irn[)oil(', répond le intM-anicien, la slalislicpie des |)arties jouées : on ne |)cut pas liaranlir les eapriees du hasard; la niachine. (•onstniilr par (rcxi.ellents ouvriers, a él('; vériliée avec soin. Aucune pièce n'esl Iniparfailc; on ne tnonlre ni roue mal cenlrée, ni cases inégales, ni nivellenienl défectueux. Le tribunal nomme un expert. Quelle décision doit-il conseiller?

L't'cart observé est un indice. Quelle en est rimporlance? L'application du principe (llo) suppose des données (pTon n'a |)as.

Les probabilités des diverses hypothèses, que nous nommons les causes, sont pi-oporrnuineiles au |)roduil de leur probabilité apriori par la probabilité qu'elles donnent à l'événement.

L'événement est l'arrivée de 53oo fois rouge sur loooo ('preuves. La cause inconnue, c'est la valeur de la probabillt»', donnée parla machine, à l'arrivée de la c-ouleiir rouge.

La probabilitt' a priori désignée par m/ dans la (oiinule (lio), est conn)lètement inconnue ; en supposant, comme on Ta lail dans des cas analogues, toutes les valeurs également prol).d)les, on pi-<>poserall une hvpothèse ina(;ceptable. SI, léellemenl, la i-oulelle favorise la rouge, un très petit écart est plus probabh; (pTuri grand, un très grand est impossible. Les grands écarts sont, en oulre, d'anlant moins probables (pie le nn-caiinnen a meilleure répulallon et qu'il a em[]lo^'é de meilleurs ouvriers.

I^'e\|)ert doit répondre :

Les faits connus de la cause ne permettent pas l'évalnalion des prol)al)llllés : Il maïupie ra|)préciali()n rt />/'/o/7' de la pi'obab-dité qu'on veut co\\iu\\\\i', a posteriori.

J^e Cidciil serait sans issue.

Il faut simplilier la (picslion.

La machine, suivant l'une des |)arties, donne à la sortie de la rouge une probabilité peu dilb'rente de o,53.

Le résultat de lOOOo épreuves ne permet |>as, suivant lui, d'en douter.

La machine, suivant l'adversaire, donne, comme elle doit, à la sortie de la rouge nue probabilité voisine de o,5oo. Le soin appor-

té à la construction ne |)eiinet de croire à aucun défaut grave.

Précisons les deux dires :

(:n.\\>. VII. — l'iiOBAim.iTK dks calsks. i63

î^;> |)i()hal)ilil(' de la loiij^c, dans l'un des systèmes, serait comprise eiilre 0,499 et o,5oi ; suivant raii(t(\ ei)lre o.5y!() et o,53i .

Laissons de coté le cas 1res possible où les plaidenis se liomperaient tons deux, et cherchons le rapport des probabilités de leurs as-" ri mus.

Soient .r la probabilii*' j)onr (pie la roulette donne à la coiib^ir roiii^c Mlle eliance comprise entre o,o>.9 et, o,53i ;j la probabilité pour (pic la chance soit comprise entre 0,499 et o,;kh, x -\- y n est pas éi;,il à rniiiti'-. Le l'apport ^1 sans faire connaître les denx probnbiliK's, apport(M-a nn 1 ('nseii;n(;m(Mil niih;.

Soient 7TJ, la probabililt; r/ />//(>/•/ pour (pie la machine, d'après ce (pi on savait avant sa mis(! en œiivr(!, en tenant (■ompt(; de sa bonne apparence, de la bonne reiiommi'e du consl rii(M(>iir et de 1 apparente >ine("rilé de ses (bM-laral ions, donne à la soilie de la COiib'iir rouf^e niK! valeur coiiipi'is(; enli'(; o. i()() r\ o.joi; ttt , la probabilUx', évalin-e toujours a\ant r/preiivc, pour (pic. mali^ré les i^arantics énnnK-rées, elle donne nin; probabiiilc; comprise entre o. J>,() et o,;"),'^ I .

7ÎT, et rvTj sont inconnus.

Soient/-', et/>j les probalnl il("s (pn^ les denx liv|)otli(;ses snr le mérite de la roulette doniKM-aient à i"("V('nement observé, on anra [llo)

En nommant X la probabilité de la S(,>rlit^ de la ronge, la probabililt- (piVdIe donne à révcnemeiit observé (.-st proj)or-tioiinelle à

\5:iou(,_ X)*"«".

Si l'on suppose

Xi = o,joo et X2=o,53o,

on tronve

X,i3OO(,_X,)V7o

\^ôiW(y — Xj j*""

OjOooooooi Jo8.

Le rapport varie pen quand X| et Xo restent dans les limites assignées. On peut donc snpposer

Pi

par conséquent,

X l5 TiTi I TÎTi

y looooooooo TÏT2 666t)6666 tïJ2

— est inconnu. Si le constructeur est très habile, ce rapport est

très grand ; il est invraisemblable qu'une pièce détestable sorte d'ateliers dignes de confiance ; mais, quelle que soit la confiance, en divisant le rapport qui la mesure par 66666666, il est à craindre que le quotient soit petil.

Si vous croyez qu'un défaut tel que celui qu'on soupçonne ne peut se produire qu'une (bis sur un million, il restera 66 à parier contre i qu'il s'est produit cette fois-là.

135. Les restrictions proposées peuvent s'appliquer aux conséfjuences déduites par Mitcheli du rapprocliemenl fréquent de deux étoiles dans le ciel. Deux hypothèses sont possibles :

Pour être aperçues dans la mênie direction, deux étoiles n'ont rien de commun, leur vraie distance est immense;

Les deux étoiles, au contraire, sont voisines dans l'espace; c'est pour cela qu'elles sont rapprochées dans le ciel.

En comptant les étoiles de i"""", de a** et de 3^ grandeur et les supposant indépendantes les unes des autres, Mitcheli a calculé le nombre probable des groupes dont la distance est inférieure aune limite donnée.

Il ne faudrait pas croire (|ue loutes les distances angulaires soient, a priori, également probables : les petites le sont moins que les grandes. Considérons une première étoile, peu importe la position qu'elle occupe. Si une seconde étoile est placée au hasard, pour qu'elle se trouve à une distance angulaire de la première comprise entre 0 et 9 -h <i9, il faut que le hasard la place dans une zone comprise entre deux cercles ayant pour pôles la première étoile et pour rayons sphériqnes 9 et 9 -f- <i9. La surface de cette zone est d'autant plus grande (pie 9 s'approche davantage

de - ; elle est propoilionnelle au sinus de l'angle 9 dont on cherche

la probabilité. La probabilité pour qu'une étoile se trouve à une distance inférieure à v d'une étoile donnée est le rapport de la zone à une base terminée par le petit cercle dont y est le rayon

spliériqiie à la surface de l'hémisphère sur laquelle on suppose l'étoile placée au hasard. Ce rapport, égala i — cos y, peut être

représente, si y est petit, par — •

Si, par exemple, on prend

on aura

yî I

-!- = 0,00000423(>7 =

Le nombre des étoiles des trois premières grandeurs étant égal

à 280, on peut former ^ "'^"^^ = 9-6 335 combinaisons deux à deux.

La probabilité pour que le hasard |)rocure deux étoiles à distance inCérieure à 10' est celle d'obtenir i boule blanche en 26335 tirages dans une urne contenant une seule blanche et 236302 noires. Cette probabilité est

= 0,r03403.

L'ingénieux argument de Milchell ne peut pas cependant fournir d'évaluation numérique. La reclierche plus ou moins rigoureusement faite de la probabilité pour que le hasard ait produit les groupes observés n'est pas le seul élément de la question.

C'est le seul, cependant, que l'on fasse intervenir. Si l'on trouvait, en étudiant le ciel, trois étoiles de i'" grandeur ayant, à i' pn'-s^ la même ascension droite, la probabilité pour que le basard produise un tel rapprochement est plus petite assurément que la formation fortuite du groupe des Pléiades.

En conclura-t-on, avec la même vraisemblance, que ce rapprochement doit avoir une cause et que ces étoiles, dont la déclinaison diffère de 40" ou 50" peut-être, sont solidaires et forment un système?

Personne, assurément, n'v songera, et la raison en est que la probabilité a /?rw/7_, désignée par tn/ dans nos formules, est trop petite.

Comment définir, d'ailleurs, la singularité dont on juge le hasard incapable?

Les Pléiades semblent plus rapprocliées les unes des autres qu'il n'esl naturel. L'assertion est digne d'intérêt ; mais, si l'on veut traduire la conséquence en chiflVes, les élémenls l'ont défaut. Faut-il, pour préciser cette idée vague de rapj^rochemeiit, cherclier le plus pelit cercle qui conlienne le groupe? la plus grande des distiiiices angulaires? la somme des carrés de toutes les distances? l'aire du polygone spliérique dont quelcpies-unes des étoiles sont les sommets et qui contient les autres dans son intérieur? Toutes ces grandeurs, dans le gioiq^e des Pléiades, sont plus |)eliles qu'il n'est vraisemblable. Laquelle d'entre elles donneia la mesure de l'invraisemblance? Si trois étoiles forment un triangle équilaléral. faut-il laire entrer cette circonstance, as-

sulément peu probable « />/Yo;-/^ au nombre de celles qui révèlent une cause ?

L'intervention du liasard dans la formation de l'univers est inacceptable. Une loi règle lout, cela n'est pas douteux. Quelle est cette loi? voilà la question. Il n'est pas admissible (|u'on demande; s'il v en a une et (pie Ton évalue la probabilité de la réjjonse.

Si l'élude du ciel suggérait plusieurs lois, on pourrait les mettre en b.dance et non choisir l'une d'elles, celle du groupement par attraction ninluclle, pour l'opposer à l'ensemble des autres, réunies sous le nom vague de hasard.

l^orsque plusieurs (iloiles semblent voisines sur la voûte céleste, leur proximité dans l'espace est la première explication qui se présente. JNe peut-on en imaginer d'autres?

Si l'ensemble des éioiles forme un réseau régulier, si le Soleil en est un sommet, les lois gt^ométricpies de cettt; immense cristallisation peuvent exiger des alignements. La Terie, voisine du Soleil, aperçoit, |)Our < c motif, beaucoup d'étoiles dans une même direction. Lhypollièse, diia-t-on, ne mérite pas examen. Raison de plus, si on la condamne p.ir l'appi-i'ciation des probabilités a priori.1 pour ne négliger dans aucun cas le rôle indispensable qu'elles doivent jouer.

136. On a attaché beaucoup d'importance à la recherche de la probabilité des événements futurs, déduite des événements observés comme corollaire de la probabilité des causes.

CII.VP. VII. — PKOltABII.lTÉ DES CAIÎSKS

Le prohirine ptnil s'énoncei- ainsi :

Plusieurs causes pciivenl produire un même événemenL dunt la j)rol)al)ililé dépend à l.i lois de la prohabilité pour cpie chaque cause agisse et de Ja probahililé que, dans ce cas, elle donne à révfueiiK'nl .

8i les probabilités des causes sont ra,, ra.j m,i, et celles

qu'elles donnent à r("vériement />, , />.j, . . . , />^, la probabdilé, a priori, []our que révénement se produise, est

p^TSi-T Pi-n5.l-\-. . .^pn'^n-

On lait un certain nombre d'épreuves, dans des conditions telles (pie la même cause, on ij^more laquelle, a ayi dans toutes. Si les causes sont des uimkîs de com|Jositions dillerenles, que le hasard peut dési<;ner pour qu'on y fasse le liiaj^e, une même urne a servi à tous les tirages. La connaissanc'e de> résiiltiils obtenus change les probabilités, cpii ne sont plus, pour les dineienles causes,

rn,, TTT^ ro„. On demande la probabilité pour (prune nouvelle

épreuve, l'aile dans les mêmes conditions (pie les précédentes, procure l'arrivée d'un événement désigné.

Une urne, par exemple, contient des boules noires et des boules blanches en proportion inconnue. Toutes les suppositions sont également possibles.

On a l'ait 'jl tirages; il est sorti m boules blaïudies et n noires. Quelle est la probabilité pour (pie le (;a + i j""""" tirage amène une boule blanche?

Soit .r la probabilité donnée par la composition di; l'urne à la sorli(! d'une boule blanche. Toutes les valeurs de x sont, a priori, également probables.

La probabilité qu'une valeur x donne à l'événement observé est

La probabilité pour que x soit compris entre x ei x ^ dx peut donc être représentée par

G.r"'(i — oi-)"dx, G étant iiuh'-pendant de x. La probabilité pour que x soit compris

entre o el i est la ceilitucle. On doit donc avoir

donc

el la probabilité pour que le rapport du nombre des boules blanches au nombre total des boules soit compris entre .a; et a? + c/^ est

c'est-à-dire

x"t{i — x)'^dx^

x'"{i — xy^dx.

La probabilité pour qu'une nouvelle épreuve amène une boule blanche est la somme des produits des diverses valeurs de la pro-

babilité x par la probabilité pour que ciiacune soit la véritable, c'est-à-dire

on a

r (/« -t- /t H- 3) ni -r II

V{ m -\- i) et la probabilité demandée est

137. Les applications faites de cette formule ont été presque toutes sans fondement.

On a osé chercher la probabilité pour que le Soleil se lève demain.

Pour chercher la probabilité d'un événement, il faut accepter son contraire comme possible. Une urne est donc supposée qui

contient des boules blanches et des boules noires. La probabilité d'en tirer i boule blanche représente celle de voir le Soleil se lever. Jamais il n'a manqué : cela dure depuis six mille ans. L'urne, consultée 2 191 500 fois, a donné 2 191 500 boules blanches.

La formule donne pour la probabilité d'un nouveau tirage semblable aux précédents

2191502 'jyyy^y "*

Est-il besoin d'insister sur l'insignifiance d'un tel calcul?

Représentons-nous le premier homme au premier coucher du Soleil. Il devrait, pendant sa première nuit, s'il raisonne comme Condorcet, assigner la valeur | à la probabilité de le revoir. S'il

comprend la question et s'il se la pose, les chances pour lui seront beaucoup moindres. Le Soleil a disparu; s'il est éteint, qui le rallumera? S'il est tombé dans la mer, comment en soitirait-il?

Sans avoir cependant la science parfaite que lui supposent les théologiens, le premier homme se persuadera sans doute, après cent apparitions, (|ue le Soleil tourne autour de la Terre; rien alors ne doit lui faire craindre un arrêt brusque, l'absence du Soleil au cent et unième jour ne l'élonnerait pas moins que celle des objets éclairés cha(pie matin par ses premiers rayons ; faudral-il, en invoquant la formule, sup|)oser qu'a|)rès cent jours la probabilité de les revoir est -j-^? L'absurdité serait précisément la même.

Le lever du Soleil, après une année, sera pour le premier homme une certitude.

Si le temps doit la confirmer et l'accroître, c'est parla découverle des lois astronomiques et non par le succès renouvelé d'un même jeu de hasard.

CHAPITKE VIII.

LOI DES ERREURS D'OBSERVATION

In (loi- Aslronomie ist die Praxis cinn Aufsabo (1er Walii-sclieinliflikeits-Reclinuiij:, die Tlicoric cinc Aufftalio (Ici- liotiorcn Mcclianik.

ItESSEL.

138. Postiilatum de Gauss. — 130. Aiitip hypollièse faite implicilement. — 140. Cas dans lequel le posiulalmii csl rigoureusenienl exact. — lil. Conséquence (les suppositions accc|)trcs. — l'i-?. Comparaison du l'ésultat avec une formul(> cimnue; aci-onl appaient, mais non réel. — lil. Antres contradictions résultant de la loi admise. — l'il. Conséquence d'un autre mode de combinaison des mesures. — 1 'lô. L"oi)servalion confirme la rèj;le de Gauss les erreurs constantes iMant ('■c.irtécs. — 110. Mélliode de vérilicalion. — 147. Résultais .le Bradicy discutés par Resscl. — 14.S. Détermination du j)aramètre A: div.r-.es formules. — l'i!). Nériliculions possibles. — !.')(). N'aieur probable du carré de rcrrciir commise en adoptant la première formule.

Ijl. \aleur luob.iblc pour la seconde. — 15-2. Comparaison des deux résultats.

— 1).'!. Les formules peuvent être remplacées pai- d'autres qui sont préférables.

— 151. Autre moditicalion accroissant la confiance méritée par la formule. — 155. Autres métliodes pour calculer A'. — 15(3. Groupement des observations deux par deux; valeur probable de la [)lus grande erreur. — 157. Autre démonstration du résultat. - 158. Valeur probable du carré de la plus grande des erreur.- considérées deux à deux. — 159. Groupement des erreurs trois par trois. — Distinction nécessaire entre l'erreur véritable et l'erreur présumée. — IGO. Cas plus général. — 101. Discussion de la démonstration précédente. — 102. Expression qui caractérise la précision d'un système de mesures. — 163. Ce qu'on entend par poid.s et \y,n- précision. - 1G1. Si la loi de probabilité était autre, ces deux mots n'auraient plus de sens précis. — 1G5. hist-il per-

mis d'écarter les mesures rendues suspectes |)ar leur difTérence avec la moyenne'?

— 1G(J. Valeur probable de la plus petite des erreurs commises — 1(57. Combinaison d'observations qui n'inspirent pas égale conliance. — 108. Partage d'une grandeur en plusieurs parties mesurées séparément. — 109. Évaluation donnée par Fourier en Egypte. — 170. Discussion relative à la détermination de la constante k déduite d'un système d'observations.

138. La loi rigoureuse de piohabililé des erreurs d'observation varie sans doute avec Ja grandeur mesurée, comme avec Je elioix

de rinslriiiuenl et l'Iiabileté de l'observaLeiir; elle esL inaccessible aux géonièltes.

Eiiler, Bernoulli, Layrange et Laplace ont fail des hypollièses démenlies par les faits el mal justifiées par des preuves sans vraisemblance.

Gauss, plus heureux, a déduit d'un raisonnement fort simple une loi que la déinonstr-alion laisserait douteuse, mais que les conséquences justifient.

Lor.squ(; plusieurs mesures d'une grandeur inspirenl une confiance égale, la valeur la plus probable est la movenne de celles qu'on a obtenues.

Tel est le postidatum de Gauss. Tous les obseivaleurs, avant qu'il fût pris pour base de la théorie, y avaient adhéré en en faisant usage.

S'il suffisait d'admeLlre une règle aussi plausd)le, la théorie serait parfaite.

A]a condition énoncée, il faut, malheureusement, en ajouter phisieurs autres qu'on ne dit pas. Nous devons signaler d abord une différence es^enlielle entre la valeur la plus prob,iblc d une; grandeur et la meilleure valeur à adopter.

La valeur la plus probable esl celle dont la pi(d)al)ililé esi la plus grande. Peu importent les aulres. Elles doivenl l()ule>, cependant, diriger le choix à fair(!. S'il esi ulile d'accniilre la probabilité des petites (irreurs, il e>l désirable au>si de diminuer celle des grandes. S'atlaelier senb^nent à (dioisir la valeur la plus probable, c'est imilei' le joueur qui, pouvant esp-'i-er un grand nombre de gains diderents et cr.iindre un -rand nond)re de pertes, prendrai! ses décisions de manièi-e à accioilre la <diarice de gagner le plus gros lot, sans aucunement se soucier des aulres.

En disant : a En présence de plusieurs mesures d'une même grandeur, h; parti le meilleur est d'adopter la moyenne ». et : « La moyenne entre plusieurs mesures est la valeur la plus probable ■ > ■ >. on énonce deux piopositions différentes. On a eu tort de les confondre.

Supposons, pour donner un exemple, cpie l'on cherche l'origine probable d'une plante d'espèce connue cueillie en France.

Dans la liste des i oo localités où l'espèce se rencontre, on en

trouve trois dans la même commune du Cantal et les autres dans 97 communes différentes du Finistère.

La commune la plus probable est en Auvergne ; l'origine probable de la plante, la Bretagne.

139. Après avoir proposé le postulatum qui a été admis sans difficulté, Gauss représente par cp(A)â^A la probabilité pour que l'erreur d'une mesure soit comprise entre A et A + rfA: la fonction cp(A) est l'inconnue qu'il veut déterminer.

Ici encore s'élève une objection. La probabilité d'une erreur A est-elle une fonction de A?

Ne dépend-elle pas de la grandeur mesurée? Si l'on fait une pesée, si l'on mesure un angle, lorsque le poids est un nombre exact de milligrammes, lorsque l'angle contient un nombre exact de secondes, n'a-t-on pas plus de chances d'évaluer juste que s'il faut ajouter une Traction? Si celle fraction, que l'instrument ne donne f)as, est exactement égale à ^, n'a-t-on pas, en l'évaluant, moins de chances d'erreur que si elle est 0,27 ?

En disant, sans explication : Soit o (A) 6^ A la probabilité d'une erreur A, on s'écarte, dès les premiers mots, de la rigueur pronise en quelque sorte par la forme géométrique de la démonstra- J

tion

liO. Il est un cas où, le postulatum étant rigoureusement démontrable, la conclusion cependant n'est qu'approchée. C'est une preuve décisive contre l'exactitude de la théorie.

Supposons que la grandeur à mesurer soit le rapport du nombre des boules blanches au nombre total des boules, dans une urne de composition inconnue.

On tire un certain nombre de boules; nous le désignerons par fjL.

Sur ces jj. boules, m sont blanches.

La fraction — peut être considérée comme une mesure du rapport cherché. L'instrument qui l'a donnée est d'autant plus précis que le nombre des tirages est plus gn.nd. L'opération recommencée n lois donne les mesures successives

^1 m^ TUn

La valeur la plus probable du rapport clierclié déduite des /ijx

tirages est

n [JL

elle est, on le volt, la moyenne entre les valeurs successivement obtenues par n mesures qui méritent même confiance. Si la démonstration que nous allons donner était irréprochable, ta conclusion devrait, dans ce cas, s appliquer en toute rigueur.

141. Soient Xi^x^i ..., x,i les valeurs d'une même grandeur données par n mesures successives, faites dans les mêmes conditions et dignes de la même confiance.

La valeur la plus probable de la grandeur inconnue est, on le sujjpose, la moyenne

Si z est la valeur véritable, les erreurs successivement commises ont été z — .r,, z — x-^-, ..., z — Xn- La probabilité, avant l'épreuve, de ce concours de mesures, c'est-à-dire celle de l'événement observé, est proportionnelle au produit

(1) o{Z — Xi)'~^{z — X2). ..^{Z — Xn-

La probabilité pour que la valeur exacte soit ;:; est proportionnelle à (i); la valeur la plus |)robable est celle qui rend ce produit maximum : elle doit donc rendre nulle sa dérivée et, par conséquent, aussi celle de son logarithme, et l'on doit avoir

o'{Z — X,) ^ ^'{Z — T^) ^^^^^ cp'(^_^,,)^^ <^{Z — Xi) ^{Z — Xi) '" V^{Z — Xn)

(jette équation, d'après le postulatum, doit être satisfaite par la valeur

a; 1 -1- 372 -1- ... -1- Xn

Si l'on pose (3)

cp(u) ^ ^'

l'équation (2) peut s'énoncer de la manière suivante :

La snmtne des valeurs de la fonclion F (il) doit êti'e nidie lorsque celle des valeuis de la variable est ellc-inêine égale à zéro.

Si l'on considère deux valeurs «, el «o de la vaiiahle, on doit

avoir

la fonclion est impaire.

Si l'on en (;onsidrre trois, ;/,,, t/, et — • // ^ — a.,, ont doit avoir

On déduit de ccne é(j nation bien connut; la forme de la fonclion b; elle est pi oportionnelle à la variable. L"("(|uation (3) donne

= Lu.

On en déduit, en intégrant,

et, en remarquant que 'f{if-) doit s'annuler quand u est infini,

G et k étant des constantes.

On peut déterminer le facieur G.

La probabilité d'une erreur conq)rise entre z el z -+- dz élant

celle d'une erreui- comprise entre — oo et + oc est

elle représente la certitude. Il faut l'égaler à l'unité. On en déduit, en se rappelant l'équation bien connue

CllAl». VIII. — LOI Di:S KRUELUS D OKSKRVVTION.

el la loi de probahililé des cireurs est rcprcsenlée par

e-^^-='rfz,

une seule eonslantc servant à disiinmier el à earaclériser les cas.

142. La vérilîcation doiil nous avons parlé (l iO) semble confirmer le r(\siillal.

Si. sur 'j. tirages faits dans une urne, on a renconlr(' m houles blanches, la probabilité pour (pie la c()inpo>ilion de riirne donne

pour rapport du nombre des boules blanches au nombre total des boules est (121)

\J-i - ni (tji, — m)

Le théorème semble conliriiK" ; il est mis en délaiit : la lormule(r>) est seulement apjjiochéc, elle devrait être rigour(uisemeiit exacte.

143. \yd règle des moyennes, il iiiiporte d'insister sur ce point, n'est ni démontrée ni «exacte. S'il était admis cpie la mojeniK! entre plusieurs mesuies lût toujours la valeur la plus probable, il en résulterait des contradictions. Quand on mesure une grandeur, on mesure, par cela même, toutes les fonctions de cette grandeur, son carré par exemple, ou le logarithme du nombre qui la représente. Pourquoi la valeur la plus probable du carré ne serait-elle pas la inovenne des valeurs obtenues pour le carr<';, et la valeur probable du logarithme, la movenn(; des logarithmes?

La valeur la plus probable d une grandeur dont les mesures successives sont ,r,, Xo? •••> -^w serait alors représentée par l'une ou l'autre des formules

X'-. -^- xl-^ . . .-\- X

le carré de la première est, en effet, la mojeune des cariés, et le logarithme de la seconde, la moyenne des logarithmes.

Il ne faut pas, pour écarter l'objection, faire une distinction entre les grandeurs directement mesurées et celles qui résultent d'un calcul. Un mécanicien pourrait, bien aisément, annexer à une balance une aiguille marquant le carré ou le logarithme du poids. Ce carré ou ce logarithme deviendrait alors la grandeur mesurée. Le postulatum admis dans un cas devient donc impossible dans les autres.

La seconde supposition indispensable à la démonstration, la possibilité d'exprimer la probabilité d'une erreur en fonction de cette erreur seulement, implique également contradiction. Une grandeur étant égale à X, on lui trouve, en la mesurant, la valeur ^, ; l'erreur est X — ^,. L'erreur sur le carré est X^ — x'f. Si l'on pose

X — Xi = z, on aura

la probabilité d'une erreurs étant cp (s), celle de l'erreur 2^, s - h z^ sur le carré sera aussi 'f (2). Elle n'est pas une fonction de l'erreur commise.

L'importance du résultat justifie l'étude et la discussion niit)utieuses des détails. Nous résoudrons encore le problème suivant :

Si Gauss avait adopté, au lieu de la moyenne, un autre mode de combinaison des mesures, quelle loi des erreurs en aurait-il déduite?

En supposant que

représente la valeur la plus probable d'une grandeur dont les valeurs successivement obtenues sont x, , X2, • . -, J^«, quelle est la loi correspondante pour la probabilité des erreurs?

En général, nous allons le démontrer, il n'existe pas de loi, exprimant la probabilité d'une erreur A en fonction de A, qui

puisse justifier l'adoption de la fonction cp. Le problème ne peut être résolu que pour certaines formes très particulières.

En désignant par z la valeur de la grandeur mesurée et par ■l(à} la fonction de A à laquelle est proportionnelle la probabilité d'une erreur A, la valeur la plus probable z doit rendre maximum le produit

'^(^ — 3ri)'h(z-Xi)...'l(z~Xn).

La dérivée par rapport à ^ de ce produit doit être nulle et, si l'on pose

on doit avf)ir (8) F,

■xi)-^F{z — x,)-^...-i-F{z — x„)

Z étant lié k x,, x-,, . . ., x^ pur la relation

z = o(Xi, X2, . . ., Xn).

Pour que l'équation (8) puisse être satisfaite par une fonction F,

il faut que les valeurs z — x^^z — x. z ~ x„ de h variable,

auxquelles correspondent les valeurs de la fonction dont la somme doit être nulle, ne soient pas indépen lantes les unes des autres.

Les n fonctions de n variables

O — Xi, o—3^2, ..., (f> — X,i

doivent être liées par une relation. Il faut et il suffit, pour cela, que leur déterminant fonctionnel soit nul.

On doit avoir

do

do

dxi

dxi

do

dxi

dx, '

di

do

dx„

dx,.

dx\

ce qui donne l'équation linéaire

do do dxi dx-i

c/cp dxx

do dx-i

dXn

d^ dxii

ji-8 CALCUL DES PROBABILITES.

dont l'intégrale est

(g) cp = — + F(a?2— ^1, «"s— ^1' . . ., a7«— a"i).

Telle est la seule forme possible de la fonction cp, pour laquelle la recherche, telle qu'on l'a faite, puisse donner une loi de probabilité.

La forme obtenue pour cp peut se définir simplement. La fonction C3 est telle qu'en donnant à toutes les mesures prises un même accroissement a, elle augmente elle-même de a. Cette condition est nécessaire et suffisante pour que la fonction ait la forme (9).

Si l'on prenait

\ (f(Xi, Xi, . . ., Xn) = \l 0C\ + X\ (10)

f C?(Ti, 37-2, . . ., Xn) = V ^7,, X-,, . . ., X„,

la condition ne serait pas remplie.

Aucune loi de probabilité des erreurs, en fonction de V erreur commise, ne peut donc justifier l'adoption des formules (lo).

14-0. Malgré les objections précédentes, la formule de Gauss doit être adoptée. L'observation la confirme : cela doit suffire dans les applications. Les conséquences minutieusement étudiées se sont toujours trouvées d'accord avec les faits. Il est bien entendu que les erreurs constantes sont en dehors des formules; chaque observateur doit étudier son instrument et sa méthode pour les écarter. La moyenne, évidemment, ne peut donner que la mesure entachée de l'erreur systématique inhérente à l'instrument. Si l'on pèse avec de faux poids, si les fils de la lunette sont mal placés, les moyennes ne pourront pas faire les corrections; c'est à la grandeur mesurée accrue de l'erreur constante que se rapportent alors les formules. |

146. Disons d'abord comment la vérification de la formule a été faite.

Bessel, le premier, a fait la comparaison des erreurs commises dans de nombreuses observations avec les conséquences de la formule de Gauss.

CIIAP. VIII. — LOI DES ERlUa-RS D'OBSEFt NATION.

Le théorème de Bernoulli permet d'affirmer (|iie, dans une série luffisamment nombreuse, si Ton partage les erreurs en groupes Sien définis, chaque groupe se présenlcra un nombre de fois à peu îrès proportionnel à sa probabilité.

Bessel a étudié quatre cenis observations de Bradley portant sur les coordonnées, parfaitement connues aujourd'hui, d'une même étoile. Les erreurs ont été classées par ordre de grandeur; on a compté le nombre de celles cpii sont inférieures à o",4 en valeur absolue, le nombre de celles qui sont comprises entre o",4 et o",8, et(;.

On a eomparé ces différents nombres avec le Tableau des nombres probables de cha(|ue groupe d'erreurs, d'après la loi de probabilité admise

Le calcul exige la connaissance de la constante /•. Les méthodes |)Our la calculer sont nombreuses; leur accord numérique est une des meilleures vérifications de la théorie.

Nous reviendrons sur cette importante question. Bornons-nous à faire remarquer en ce moment que chacun des calculs qui vont donner, en fonction de k supposé connu, le nombre probable des erreurs d'un certain groupe, suffit, par la condition d'égaler le résultat du calcul à celui de l'expérience, pour fournir

une valeur de k. Si l'on n'avait qu'un groupe, la détermination de la constante par la condition de satisfaire à l'égalité qu'on veut vérifier formerait un cercle vicieux. Mais les égalités sont nombreuses. Chacune j<i'elles déterminera une valeur de k; on adoptera la moyenne et les vérifications ultérieures auront toute leur valeur.

Nous aurons d'ailleurs à revenir sur ce problème très im|)ortant de la détermination de k.

La probabilité d'une erreur comprise entre c et ; H- dz étant

- e-^'=-^ dz,

celle d'une erreur plus petite que a, en valeur absolue, sera

' dl = fe)(7,a).

Celte formule donnera la probabilité pour qu'une erreur soit comprise entre o et a, entre o et aa, o et 3a, etc. La différence de deux termes consécutifs sera la probabilité pour qu'elle soit comprise entre deux multiples.

147. Le Tableau suivant a été formé par M. Nikolaus Wuicli, professeur à l'École d'Artillerie de Vienne.

Les erreurs sont évaluées dans la première colonne par leur rapport à V erreur probable, c'est-à-dire à celle qu'il y a probabi-Mté ~ de surpasser ou de ne pas surpasser. La moitié des erreurs sur un grand nombre de mesures doivent être par définition, pour ainsi dire, plus grandes, l'autre moitié plus petites que l'erreur probable. On voit en elïet dans le Tableau, en regard de i , le nombre oooo indiquant que la moitié des erreurs sont inférieures

à i. On lit en regard de 2, 8227; sur loooo erreurs, par conséquent, il y en a 8227 plus petites que le double de l'erreur probable; 9070, d'après le Tableau, sont plus petites que le triple, 9980 que le quadrup'e et 9993 que le quintuple.

Sur loooo observations, nombre probable des erreurs plus petites que mli^ h étant l'erreur probable :

Nombi'c

Nombre

Nombre

Nombre

sur 10000.

sur 10000.

sur 10000.

sur lOUOO

CIIAP. Vlll. — LOI DES ERREURS D OBSERVATION.

Nombre

Nombre

Nombre

Nombre

sur 10000.

sur 10000.

sur 10000.

sur 10000.

5000

Si 38

Si 8)

. 4io5

99 iJ

CALCUL i)i:s i>i!OBABiLrri:s.

La valeur de k est inversement proportionnelle à l'erreur probable. Si l'on a posé, en effet,

lin' . /^^'^

on trouvera

et, par conséquent, À désignant l'erreur probable, la valeur correspondanle de k est

148. Bessel a trouvé par la discussion des 470 observations de Bradley, en réduisant les nombres par une proportion à rhjj)oihèse de 100 observations seulement, les nombres suivants pour les erreurs variant de o",4 '•

Déclinaison d'une étoile, k = o", 43539.

-Nombre Ki'fcurs. des erreurs. Nombre calculé,

L'élude des observations d'ascension droite de la même étoile a

donné :

Nombre Erreurs. des erreurs. Nombre calculé.

Genl. déterminations de Fascension droite de l'étoile polaire faites à l'observatoiie de Konigsberg, de 181 3 à 181 5, ont donné :

Nombre Erreurs. des erreurs. Nombre calculé.

II i3,7

149. .Nous devons dire maintenant comment on détermine le paramrlre A".

Deux cas peuvent se présenter : si les mesures ont porté sur une grandeur exactement mesurée avant ou après les observations qu'on discute, toutes les erreurs sont connues avec certitude. Si,

au coniraire, les mesures ont été prises sur une grandeur qui n'est j connue que par elles, les erreurs sont inccriaines comme la grandeur elle-même; el, en donnant ce nom ô." erreur à la différence entre chaque valeur observée et la moyenne, on ne peut avoir qu'une évaluation viaisemblable et approchée.

jNous Iraiterons d'abord le premier cas, auquel se ramène le second.

I^a délerniination approchée de k peut se faire d'un grand nombre de manières. Il suffit, eu effet, de calculer la valeur probable d'une fonction quelconque de l'erreur commise dans une observation. La moyenne des valeurs de celte fonction, dans une

série suffisamment nombreuse, en vertu du théorème de BeruouUi, différera peu de la valeur probable. En les égalant, on obtiendra la valeur de k.

On peut ainsi déduire la valeur approchée de k de la valeur probable de l'erreur prise en valeur absolue, du carré de l'erreur, du cube et, en général, d'une puissance quelconque de l'erreur.

La probabilité d'une erreur z étant

la valeur probable de z^ considéré comme essentiellement positif, est

\Jt. Jq k /tt

La valeur probable de z^ est

ik r

celles de z"^ et de ^",

— / e-'^^-^z^dz — — ;

V t: c/q k^ Jt.

s/ T. Jq k^ ^1

^izJ^ ^k^

En admettant que, sur un grand nombre d'épreuves, la moyenne des valeurs d'une grandeur diffère peu de la valeur probable, en

CHAP. Mil. — LOI DES ERREURS d'oRSERVATIO.N. 1 85

nommant <?,, 62-, •••, 6,1 le^» erreurs siiccessiveinenl commises dans n observations, on pourra écrire

e\—el^.

.^el

■ik-^'

/-Vi

.-+- ej',

Si

iA^

loO. Chacune de ces équations donne une valeur de k; elles doivent s'accorder et s'accordent, en effet, dans les a|)[]lications, d'une manière très satisfaisante. On en déduit ces relations remarquables. S), Sa, S3, S4 désignant la somme des erreurs, prises en viileur absolue, la somme des carrés, la somme des cubes, la somme des quatrièmes puissances, on doit avoir approximativement

Ces formules singulières, dont le premier membre est fourni par le hasard, méritent tant de confiance qu'un calculateur à qui des observations sont remises et qui trouve ces égalités en défaut j)ent tenir pour certain qu'on a relouché et altéré les résultais immédiats de l'expérience.

151. Il importe d'évaluer la confiance méritée j)ar les valeurs de la constante k que nous venons d'obtenir. Cette appréciation

consistera dans le calcul de la valeur probable de l'erreur commise en adoptant une des équations précédentes. Lorsque nous écrivons, par exemple,

, , ei-h eo-l-- ..-4- e„ I

l'équation n'est pas rigoureuse. Nous savons que, pour de grandes valeurs de /i, la moyenne des erreurs diffère peu de -, qui est

la valeur |)robable. Quel que soit /i, une grande différence est /?05sible, cela est évident; mais elle est peu probable.

Nous aurons une appréciation de la confiance méritée par l'équation (i i) en cherchant la valeur probable de

On comprend la nécessité d'élever l'expression au carré. Elle peut être posilive ou négative : sa valeur probable est nulle, cela ne prouve nullement la précision des mesures; les grandes valeurs peuvent être détruites dans la somme par des termes de signes contraires.

On a

La valeur probable de chacun des termes du second membre est connue.

Le carré d'une erreur e." a pour valeur probable — ,— ; l'erreur e^-,

qui est prise ici en valeur absolue, a pour valeur probable »

ct le produit e,e/' de deux erreurs a, par conséquent (48), pour valeur probable — r^- La valeur probable de l'expression (12) se réduit, en avant égard au nombre des termes de chaque somme, à

elle tend vers zéro lorsque n augmente.

CHAP. Mil. — LOI DKS CKUKLUS d'oBSERVATIOX.

lo!2. Cherchons la valeur probable de

/el^el-^-...-hef, i_Y

celle valeur étant calculée, bien entendu, de même que la précédente, avant les 0|)érations faites et sans qu'on puisse prévoir ni présumer quelles sont les plus grandes erreurs. L'expression (i3) peut s'écrire

La valeur probable s'obtiendra en rem[)laçant e^', quel (|ue soit ?,

par sa valeur probable —j^, e'j e'-- par — rr et e'j par —r-- On a ainsi ' !\k* ^ 1^ ^ \k* ' ' •2/1-

pour valeur probable de (12)

3 n.n — Il I I I

'\nk* n- f^k'* xk* 4 A» -'.nk^

L'iâ. On peut se demander quelle est, entre ces deux évaluations d'erreur à craindre, celle qui justifie le mieux la formule coriespondanle.

Il ne laul n;is se borner à comparer les résultats j- i i '-]

^ i/ik- \ -/

et -^^yr pour donner l'avantage au |)lus |)etit. En admettant que

ces expressions donnent une appréciation de l'erreur à craindre, ces erreurs ne portent pas sur la même inconnue. La première est commise dans l'évaluation de — —; l'autre, dans celle de — ,-• Ce

qu il faut assurer évidemment, c'est la |)etilesse de l'erreur commise sur k. Soit y celte erreur, l'erreur sur y sera — 71 J% et sur T^ elle sera, en négligeant bien entendu y-^ — Ti}"'^ ^e carré de l'erreur commise sur — — est donc — jrV-, et le carré de l'erreur

commise sur —p- est ,- r-.

Les résultats obtenus doivent donc s'énoncer de la manière suivante :

La valeur probable de —rrV'- est — j- (i — -'); ■, . . Tzk*'^ iiik- \ T. I

CALCLL DES PROBAIULITES.

La valeur piobable de t; y- est — r--

Par conséquent, en adoplant la première formule, celle qui déduit A* de la moyenne des erreurs, la valeur probable de y'^ est

et, en adoplant la seconde, c'esl-à-dire en déduisant k de la moyenne des carrés des erreurs, la valeur probable de y- est

•xn La seconde formule doit être préférée.

153. Les formules })récédentes peuvent être remplacées par d'autres qui donnent une plus grande chance d'exactitude. JNous résoudrons d'abord le problème suivant : Déterminer la valeur de)> qui rend minima la valeur probable de

(ri) Q_x£-ilf^^tl^l±^)^

Cette expression peut s'écrire

En remplaçant les erreurs e, et leurs carrés par les valeurs probables, on a, pour valeur probable de (i5),

_i a)- X')^(ii — \) I

k- k'^^ïi xk-ii n k^Ti

OU

Le minimum correspond à

Il convient donc, pour diminuer les chances d'erreur, de rem-

CHAP. Mil. — LOI DES ERREURS DOBSERVATIOX. 189

placer la formule

par

•irt

loi. Nous déterminerons le facteur À par la condition que la valeur probable de l'expression

soit la plus petite possible.

Cette expression peut s'écrire

k* nk- II- n-

En faisant le calcul comme au n" 133, on trouve []Our valeur probable de cette expression

A'» k* nk* \ 2 4

Le minimum correspond à

I II \ n -{- •>.

On diminuera donc la valeur probable du carré de l'erreur à craindre, en substituant à la formule

j_ _ -J-jel — ej -4-. . .-4- ep k^ " Il

la formule, probablement plus exacte,

1 9.(ef -+- e| -4-. . .4- e,i;

igo CALCUL DES PROBABILITES.

150. Les déterminations de]a valeur approeliée de k sont en nombre infini.

On peut poser le problème d'une manière différente.

Les observations sont faites, on connaît les erreurs, quelle est la valeur la plus probable de k, la valeur probable de k et celle de/»-?

On sait que la valeur la plus probable n'est pas la valeur probable et que la valeur probable du caiié n'est nullement è^ale au carré de la valeur probable.

Soient e,, e^, ..., e,i les erreurs successivement commises, k la valeur inconnue du paramètre caractéristifjue de la série d'observations.

L'événement observe étant l'arrivée successive de a erreurs e,, eo, ••-, <?//i la probabilité de cet événement était, avant l'épreuve, proportionnelle au produit

des probabilités simples.

r^a valeur de k la plus probable est celle qui rend ce produit maximum.

Le maximum correspond à celui du logarithme

nlk — k'^{e\-\- e'I-^ . . .-h ej,), c'est-à-dire à la valeur de k qui annule la dérivée

I _ c\ -\- e'I -T- . . . -+- e}, ik'^ n

C'est une des formules déjà obtenues.

A.U lieu de la valeur la plus probable de k, on peut chercher la valeur probable, qui doit, en général, être préférée; la valeur probable est l'espérance mathématique de celui qui, après les mesures prises, attendrait une somme égale à k.

La probabilité d'une valeur de k est proportionnelle à

En désignant la somme des carrés des erreurs par So, on peut

la représenter par

On déterminera G par la condition

qui exprime (]ue la probabilité pour que k soit compris entre o et 00 est égale à l'unité. On a

r" A-" e-^^s^ dk = par conséquent,

■iS.,-

La probabilité d'une valeur A du paramètre est

^-/ig-S,A-\

La valeur probable de k est la somme des produits obtenus en multipliant chaque valeur de A- par la probabilité qui lui

correspond

"-±1 ^ lY--')

_J£2 / ^.,,+1 ^-sM dk = '- -7^T-T '

lui se réduit à

iâ-^}

Si l'on suppose n très grand, en remplaçant la fonction r(^) par sa valeur approchée

on trouvera

W-Ci

- peut, Il étant très grand, être remplacé par l'unité

et, en sa|)priinant le l'acteur coninuin e " ^, on peut écrire

Le produit e "(i 4- j~-;) a pour limite l'unité, et l'on voit aisément que, pour de grandes valeurs de «, le rapport

a pour limite — ^•

La formule nouvelle est donc d'accord avec celles qui donnent

2 /i 2 li -i- -2 '

lorsque n devient très grand.

lo6. La loi de probabilité étant admise, on peut chercher à l'avance la probabilité d'une combinaison quelconque des résultats des mesures. La valeur moyenne de la quantité calculée, si le nombre des mesures devient grand, différera peu de sa valeur probable. ^

Nous résoudrons quelques problèmes dont les solutions, remarquables par leur simplicité, permettent d'élégantes vérifications.

Si, après avoir fait un grand nombre d'observations, on les groupe deux par deux en cliargeant le hasard de les associer, et

([lie, diins clK..|iie i^roiipe, on choisisse la plus giamle des deux erreurs, la valeur |)robable de celle erreur peut se calculer : elle est le produit |)ai- y/a de la valeur probable d'une erreur prise au hasard. La probabililé pour (pie, sur deux erreurs prises au hasard, ■'une soit comprise entre 5 el ^ -+- d:- et l'autre plus petite que :;

'^e-^^'^^dz f-^e «^-dz.

Le premier l'acteur est, en efTet, la probal)llilé |)our (pie l'erreur, positive ou négative, soii com|)rise entre ^ et ^5 + ^/3; le second, la probabilité pour (pie la seconde erreur soit |)bis petite que z. On multiplie par a, parce que l'une ou l'autre des erreurs cherchées peut être la plus grande et égale à :;.

La valeur probable de :; s'obtiendra en inultiplla iit la probabililé par ; et iaisant la somme [)Our toutes les valeurs de ;

En intégrant par parties et remarquant (pie le Ioiiik; intégré dispaïaîl aux deux limiles, cette expression devient

/ e--"-dz= - — :

v/tt./o A^/^.

c'est le produit par y/a de la valeur [)robable d'une erreur.

La valeur probable d'une grandeur (pielconque diirérant peu, sur un grand nombre d'épreuves, de la mojenne ariihim'tique des valeurs fournies |)ar le hasard, l'application de ce théorème à une série de mesures d'une grandeur connue donnera et a donné à plusieurs re|)rises une vérliication des formules.

io7. Le théorème précédent, remarqué expérimentalement par AL le commandant D(daunej, peut s'obtenir plus direclement.

Soient X, et Xo deux mesures prises successivement,

peut être considéré comme une mesure.

En nommant e, et 6-2 les erreurs commises sur e^ et e^, le carré B. i3

de l'erreur sur celte mesure nouvelle sera

e'i -+- es -t- 2^1 <?9 ('9) - -

La valeur probable de GiC, est nulle, puisque les valeurs positives de <?) et de e^ ont même probabilité que les valeurs négatives. La valeur probable de (19) est donc

c'est précisément la valeur probable du carré de l'erreur pour un système de mesures dans lequel le paramètre caractéristique k serait remplacé par A'\/2.

La valeur nrohable de l'erreur commise sui' - — '-^— est donc

Mais cette erreur peut être la somme ou la diftérence des

deux erreurs commises sur Xt et X2 '• la somme, si ces erreurs sont de même signe; la diflerence, si elles sont de signes

contraires. Les deux suppositions ont chacune pour probabilité |; on a donc, en nommant G et P la valeur probable de la plus grande et celle de la plus pclilc des deux.

c'est-à-dire

On a aussi

par conséquent,

V/Ï/.VS

lirj-"^-

158. On peut, en chargeant le hasard de grouper les erreurs deux à deux comme dans le calcul précédent, calculer la valeur probable du carré de la plus grande,.

L'expression de cette valeur, obtenue par un raisonueroent tout

CIIAP. VIU. — LOI DES KURKl US DOBSKUVATION'. \(.)1

semblable, est

En inlégranl par parties, faisant porter l'intégration sur ze"""^' dz et remarquant que le terme inlégrë disparaît aux limites, celte expression devient

e~""" dz étant la différentielle de l'intégrale par laquelle il est niiilliplié dans le premier terme. On a

on a aussi

et la valeur probable du carré de la {)liis grande erreur est

lo9. On peut grouper les erreurs trois par trois, en chargeant le hasard de les associer, et chercher la valeur probable du carré de la plus grande des trois.

Un raisonnement identicpie aux précédents donne pour cette valeur probable

^ Hz^e-'^^^^dzf Te-'^^^^dzY.

Intégrons par parties, en faisant porter l'intégration sur ze~"^^^ dz; en posant, pour simplifier l'écriture,

et n'écrivant pas le terme intégré, qui s'annule aux deux limites.

nous aurons

CALCUL DES PHUllAUlLITEP.

mais on a

m(zy'

f^e-""-'-Tn(z)^dz =

/ zTl^(z)w'{z)e-'^"-'"dz= / e-2^"-^-^ra(ô)= / — -p- to (:;

)dz

•î/rV'î

La siihsiiliilion de ces résultais dans l'expression (20) donne, pour la valeur probable cberchée,

160. Dans I ou les les formules précédentes, que les observations soient faites ou projetées seulement, ce sont les erreurs véritables qui sont introduites.

Il arrivera très souvent (dans l'immense majorité des cas, on peut le dire) que, la grandeur étant déterminée par les observalions seulement, les erreurs, évaluées par la différence de cba(|ue mesure avec la moyenne, différeront des erreurs véritables (pii restent inconnues.

En remplaçant l'erreur véritable par l'erreur présumée, on obtiendra une valeur approchée de la constante /r. On a proposé, d.ms ce cas, des règles de correctioti fort simples, dont la démonstration, malheureusement, peut laisser des doutes.

Le |)r(jblème est celui-ci :

.r,, a?o, ..., x,i étant les mesures successivement prises d'une grandeur X, si l'on adopte la valeur

Xi -T- T-i -t- . . . -i- X II \ = j

l'erreur probable est d'autant moindre que 11 est plus grand,

pourvu que l'on ail pu, comme nous le supposons loujotirs dans ce Cliapilre, écarter les erreurs conslanles.

La formule

(•ir)

■ik^

sera remplacée par

Celle valeur de -^r ii'<^'sl pas, ie n'ose pas dire exacte (il ne faul espérer dans aucun cas qu'elle le soit), mais conforme à la formule qu'on voudrail ap|)liquer.

La formule (22) donnera -^-r toujours plus pelil que -j-, déduit de (21). La correction la plus plausible consiste, nous allons le montrer, à multiplier la formule (22) par —3-: <'e qui, lorsque n est iiiand. en changera très peu la valeur.

L'expression (22) proposé(; pour représenter ;-p peut être transformée par l'introfluclion de l'erreur E commise en adoptant la movenne X. pour valeur de la oraiuleur mesiir("e.

Les différences X — .r,, X — .37,, ..., X — .r,, soni rigoureusement ('gales aux différences E — <?i , E — ('■2-, . . . , E — e„, et la lormule (22) peut s'écrire

(E — g,)^ -f- (E — go)^ -r- ■ . . -I- (K — g ■■ '- ^

n identique à

mais E, étant l'erreur commise sur la moyenne, est égale à la moyenne des erreurs, et la somme e, + e^ +. . .+ e« est égale à / îE; l'expression (22) se réduit donc à

1 el^el^...-hef,

TT

Le premier terme re|)résenle la valeur de -^ telle que la foi-

mule (21) doit la donnei-. (!i(!lle valeur est diminuée de M-; par conséquent, k] est plus giand que/:-, et la substitution des erreurs présumées aux erreurs véritables, en accroissant la valeur df,' /»-, conduit à attribuer aux observalions une précision plus grande qu'il ne faut.

On a exactement

par conséquent,

(.5) E^^"^'^-^:--^"^2.^e^er.

Les erreurs e/, ei sont les unes [)ositives, les autres négatives, et, les mesures n'exposant, c'est l'iijpothèse, à aucune erreur constante, la valeur probable du produit <?/e,' est nulle. On se permet pour cette raison de supprimer le second ternie de la (ormule (ao). Jl |)eut en résulter une erreur notable; une grandeur dont la valeur probable est petite est certainement petite elle-même, quand elle est essentiellement positive; mais, (piand elle peut, comme ici, changer de signe, la valeur probable étant nulle, cela prouve seulement que les valeurs positives ont même probal)ilité que les négatives. Elles peuvent être fort grandes. Quoi qu'il en soit, les observateurs, sur le conseil et à l'exemple

de Gauss, suppriment le second terme de {'>.'^^) et — ^ devient

•xk\ ik-^ ■i.nk'^ ik^

on conseille, en conséquence, pour calculer —p^, de diviser la

somme des carrés des erreurs présumées par n — i et non par n, dénominateur prescrit pour la sonnne des carrés des erreurs réelles.

I6J. La formule précédente prend, dans un cas plus général, une forme différente, très élégante et très souvent appliquée.

Soient X,, Xo, ..., X^, p grandeurs de même espèce mesurées par les mêmes |)rocédés, avec le même instrument et les mêmes chances d'erreur. Chaque mesure a été rej^roduite pkisieurs fois :

la première, /?, fois; la deuxième, n.^ ibis, . . . ; la dernière, Hp Ibis, les erreurs successivemenl commises étante',, e^, ..., e'„ pour la première mesure; e% e\, ..., e"^ pour la deuxième-, éP\ ef\ .. ., c^r P^i'ï" 'a dernière. La formule (21), évidemment applicable, donnera

I ^ V + ef ^ • • • ^ ««' + «? -^ '^"■i +•••-+- <?«! + • . • + «"T' + •• -^'"jl

Supposons (|ue, les valeurs véritables des grandeurs mesurées restant inconnues, on remplace chacune d'elles par la moyenne des résultats obtenus en la mesurant. Si E^'^ est l'erreur ainsi commise sur l'une d'elles, les erreurs apparentes seront

et la substitution de ces erreurs apparentes aux erreurs véritables remplacera, comme on l'a vu (160), la formule (26) par

Mais e' e!,, .., e', étant les erreurs commises dans la mesure d'une même grandeur et le paramètre de précision étant A", on a approximativement

La même réduction peut se faire pour les fractions relatives aux autres grandeurs, et la formule (27) devient

N désignant le nombre total /«, + /i2 +• • •+ '*/; <^'es mesures prises.

La formule conseillée dans ce cas est, d'après cela,

^C^i — ^i)- étanl la somme des carrés de lotUes les erreurs pj'ésiimées et N — p l'excès du nombre lotal des mesures sur le nombre des grandeurs niesiir(>es.

Si les erreurs réellemenl commises étaient connues, il faudrait diviser la somme de leurs carrés par N et non j^ai- N — yo.

La démonstration suppose, malheureusement, que Ton puisse regarder comme nulle la somme des produits des erreurs considérées deux à deux.

162. j.es erreurs e,, e-i, ..., e„ étant appioximativement connues dans chaque application de la méthode, on pourra, dans chaque cas, vérifier a])pro\imativement aussi l'exactitude de l'hypothèse faile en sup|)rimant le terme Se^e/'.

Cette vérification, si ji est grand, entraînerait, il est vrai, des calculs hors de proportion avec l'importance du résultat.

Il est digne de remarque que, dans l'expression

dont les termes, les uns positifs, les autres négatifs, ont tous, a priori, si on les considère isolément, même valeur probable, le nombre des termes négatifs doit, le plus souvent, l'emporter sur celui des termes positifs.

Soit 2[j. le nombre des épreuves. Le cas le plus probable est celui où, parmi les erreurs, il s'en trouverait ijl positives et fx né-

gatives; le nombre des produits C/C/- dont le signe est négatif se trouve alors égal à \j.- et le nombre des produits positifs est p.(u — i). La diflerence est p.. C'est une raison, dans ce cas, si I on ne sait rien de plus, pour présumer que cette somme arbitrairement négligée sera négative.

Si l'on nomme [j. — a le nombre des erreurs positives et a + a celui des erreurs négatives, le nombre des produits e/e,- obtenus en multipliant une erreur positive par une erreur négative sera

celui des produits positifs est

- (;a -I- a) ([j. -f- a — I) -f- - (jJL — a) (jj. — a — i) = u^ -+- a^ — a.

Le nombre des prodiiils négatifs sera le plus grand, si l'on a

a- < tji — a-,

La probabilité pour qu'une erreur soil positive est !^; par consé- (pienl, la probabilité pour que, sur i^x erreurs prises au liasard, Vécai't, dillerence entre le nombre des erreurs positives et le

nombre le plus probable pi, soit plus petit que 1 /^ est (60)

dt = 0.68.

La probabilité pour que le nombre des produits négatifs l'emporte sur celui des produits positifs est donc plus grande que |.

La formule

caractérise la précision d'un système de mesures dans lesquelles une grandeur a été successivement liouvée égale à x^^ x-j, ... x,^. On peut lui donner une forme plus élégante et j)lus commode. Xi et Xi' étant deux quelconques de n mesures, l'expression est identiquement égale à

—;I.{CPi— X,

Les deux formules (28) et (29) sont composées des mêmes termes.

On a, identiquement aussi,

— \{Xi — xry-= -! -~

La valeur de — r- est donc donnée par la dififérence entre la moyenne des carrés des mesures prises et le carré de leur moyenne. Si toutes les mesures sont égales, l'expression se léduit à zéro. La précision doit être supposée infinie.

164. Lorsqu'on a pris plusieurs mesures d'une même grandeur, calculé la moyenne, déterminé la valeur de la conslaiiie spécifique A-, cette constante est souvent nommée la précision et k- le poids de chaque observation.

Il importe d'expliquer ces locutions.

La précision d'une mesure est dite a fois plus grande que celle d'une autre mesure, lorsque la probabilité d'une erreur comprise entre z et z -^ dz pour une mesure du premier systènte est la

même que celle d'une erreur comprise entre 7.z et (f.{z + dz) pour le second. Si, par exemple, les erreurs commises sur les minutes, en mesurant un angle, ont mêmes probabilités (pie les erreurs sur les secondes commises en se servant d'un aulre instrument, la précision du second système de mesures est dite 60 fois plus grande que celle du premier.

Le poids d'une observation est dit "^ fois plus grand que celui d'une autre observation, lors(pie les conséquences que l'on peut déduire sur la valeur de la grandeur mesurée par une observation du premier sjslème équivalent à celles que l'on peut déduire de [3 observations du second système donnant toutes le même résultat.

Si [3 n'est pas entier et qu'il soit égal à une fraction —, il faudra

que m observations concordantes du premier système puissent être remplacées par n observations identiques du second.

Le système d'observations qui donne à l'erreur z une probabilité proportionnelle à

aura k pour précision et A- pour poids, si l'on prend pour unités la précision et le poids d'une observation d'un système dans lequel la probabilité d'une erreur z serait proportionnelle à e~'^\

La probabilité d'une erreur comprise entre ^ et ; -f- dz étant, en effet, supposée égale à

en remplaçant z par kz, la probabilité d'une erreur comprise entre

kz et kz + k clz sera

c'est précisément celle d'une erreur comprise entre z et z -^ dz dans le premier système.

Si l'on suppose /i-= —, la probabilité d'une erreur z étant proportionnelle à

celle de m erreurs éf^ales à ::, commises dans m observations successives, sera proportionnelle à

La probabilité de n erreurs égales à s, commises dans n observations successives faites dans le second S3'slème de mesures, sera proportionnelle à

Les probabilités des deux systèmes d'erreurs sont donc proportionnelles et par conséquent égales pour toutes valeurs de z^ si

l'on a

nk- = m ; par conséquent,

n Le poids du premier système d'observations, celui du second étant pris pour unité, est donc égal à — > c'est-à-dire a /.-.

160. Il est intéressant de remarquer que, si la loi de probabilité n'avait pas une forme toute spéciale, les mol?, poids et précision, dont les pbysiciens font souvent usage, ne pourraient pas avoir de sens exact et précis.

Supposons deux systèmes d'observations. S(tient, dans le premier, 'f{z)dz la probabilité pour que l'erreur commise soit com-

prise entre :; et :; -h <i:; et à{z)dz la probabilité d'une même erreur dans le second système. Pour que le rapport des précisions

'■^^^ CALCLI, |)|.;s l'KOlUBILITKS.

soil h, Il faut et il suftiL que le rnp,),„i 2^ soit constant, et,

pour que Je rapport des poids d'une observation dans les deux systèmes soit égal à k, il faut que le rapport

soil constant.

Pour que le système caractérisé par la fonction cp(s) donne, par rapport à un autre système quel qu'il soit, caractérisé par 'l(z.), un poids déterminé et une précision définie, il faut que ie rapport

(i(hz)

soit indépendant de z.

Posons donc

oihz) = Go(zy^;

G étant indépendant de z, et déterminons les formes p..ssible. de la fonction 0(5).

On peut remplacer l'équation (30) par

i^{hz) = IG-^ ld<:^{z)

et aussi, en prenant les dérivées, par

ho'(hz) __ /:cp'(^) o(/iz) ~ o{z) E'ii posant

la fonction F est définie par la condition

F(Az) = aF(3),

A représentant le rapport ^• Soit A = h\>-.

On aura

(30 F(hz) = hi'-F(z).

La fonction F est donc multipliée par hy- quand la variable est

CHAI'. VIII. — 1,01 DKS lillHKl lis DOItSICHVATION. 9,05

multipliée par A. On aperroil la solution H étant une conslanle; on en dédiiil

-U.-l-l /cp(5) = H ^ ^C.

'^(:;) devant rester invariable quand on change z eu — :;, l'exposant u. + I doit être pair.

Le cas de a= i correspond à la loi de Gauss.

On a dans ce cas

Le poids A- est le carré de la précision A. l^'é(piatloii (^3 i) n'admet pas d'antres solutions; mais l;i démonstration, d'iillleurs facile, est sans intérêt pour le (Calcul des Prohahilllés.

16G. Entre plusieurs mesures d'un(> même j^randeur, celles qui s'écartent le plus de la nio\enne sont []ri'sumée> avec raison, presque avec certitude, être moins bonnes (pie les autres : il semble naturel de les écarter.

La question est délicate. Les observateurs ne se permettent une telle suppression qu'après avoir reconnu une cause vraisemblable et intriiisè(|ue à rinférlnrlié de la mesure suspecte. On croirait manquer à la sincérité due en omeitant une mesure,

d'ailleurs irréprochable, par cela seul qu'elle s'écarte du résultat présumé.

Il est inconteslable (|ue, si l'on est certain d'avoir opéré de la même manière et avec le même soin, toutes les observations ont le même dioit à exercer leur influence sur la inovenne adoptée. Mais, si l'on opérait toujours de la même manière, on obtiendrait toujours le même résultat.

L'assimilation des erreurs fortuites à des tirages au sort dans une urne composée de manière à donner à chacpie erreur la probabilité qui lui convient est une fiction, non une réalité. Si l'urne

existait et qu'elle fût composée avec une perfeclion infinie, s'il arrivait qu'une série de tirages faits dans les conditions normales démentissent l'ensemble des autres, il faudrait les conserver assurément. Mais, si celui (|ui tirait les boules vient déclarer qu'il a négligé de les agiter, peut-être aussi de plonger la main dans les parties inférieiu'cs ; s'il a pris et remis sa boule toujours à la surface, les tirages ainsi faits seront à rejeter. Ils le seront éga- 1 lement si, le tireur n'avouant pas sa négligence, on le soupçonne d'être peu soigneux; peut-être aussi, la question est délicate je le répète, si la seule raison de le soupçonner est l'écart observé (juand il a lire les boules.

Chercbons les conséquences de l'abandon des mesures présumées les inoins bonnes.

La question se pose de la manière suivante :

On a pris /i mesures d'une même grandeur; tout semble régulier, la movenne est obtenue; la constante caracléristic|ue /c, dé-

duite d(; toutes les observations, a une valeur très grande; aucun indice n'éveille la défiance. On est en droit de regarder comme très pro- J bable la valeur de la moyenne; comme très probable aussi la valeur obtenue pour k. La probabilité d'une erreur z est regardée avec confiance comme égale à

Dans ces conditions, je calcule l'erreur À, telle que la probabilité pour qu'une erreur soit inférieure à "k ait une valeur p arbitrairement choisie. 11 suffit de résoudre l'équation

(32) p = -— e-"dt = *d{k\).

\ étant ainsi déterminé, je supprime parmi les n observations celles dont la dififérence avec la moyenne est plus grande que \\ il en restera np à peu près, dont une moitié environ sera plus grande, l'autre moitié plus petite que la moyenne. On recommencera les calculs en considérant ces observations comme les seules.

Supposons, pour justifier la hardiesse de ce parti, que, dans le

lahinalou'c où les mesures soiil prises, se trouve un surveilhinl (l'une rare habileté qui, sans obserxer lui-même, suive des jeux les observateurs, et qui, très au eouranl des méthodes, très instruit des détails relatifs à clnuiue instrument, des erreurs de division, des inégalités des pas de vis, des petites imperfeetions des poids, de l'inrtuenee de la température, etc., déclare, après eha(|ue mesure, son opinion en un seid mol : bien ou mal.

Personne ne contestera que, si ce surveillant est, comme nous l'avons supposé, très habile, la su[q)ression des mesures qu'il a

condamnées accroîtrait d'autant plus la confiance qu'il en aurait écarté davantage.

Quoi qu'il en soit, acceptant le principe, nous renq)lacerons les observations X,, a?2, •••, ^« P^^'J^i» Ja, • • • > ^'//o ^« différant peu de np. Si ces m observations sont données à un calculateur soigneux, il n'aura pas besoin d'en connaître l'origine pour les déclarer suspectes. Le rapport de la mo venue du carré des erreurs

au carré de la moyenne pourra dilférer beaucoup de - (149).

Pour aucune valeur de A', les erreurs des observations maintenues ne s'accorderont avec la formule

v/tt

Le calculateur prévenu renoncera à la formule et prendra la

mosenne

JKl-^-.7^1l + •••-^-r/^^ m

pour représenter la grandeur inconnue.

Soient £,, £0, • "î ^/i 'es erreurs successives. La valeur du carré de l'erreur commise sur la movenne sera

/£i-h£.,-F-.. .-f- £/»y_ £f H- £| -^. . ■-^- sj„ _^ ;i5ii!i'.

Négligeons e«e,', dont la valeur probable est nulle. La valeur probable du carré de l'erreur moyenne s'obtiendra en d'yisant par m la moyenne

peu ilidcrenle, 1res piobnhleinent, de la valem- probable du carré des erreurs maintenues.

Celle moyenne sera phis pelile évidemment f|u'avaut la suppression des observations rejelées; mais il faudra, pour obtenir le carré de l'erreur probable, la diviser par /;?, cl la fraction qu'elle remplace devait être divisée par n.

La valeur probable du carré z- d'une erreur plus petite que À est, lors(pie les autres ont été écartées,

Le nombre des erreurs ayant été jnultiplié par la fraction />, la probabilité de chacune d'elles, dans l'intervalle où elles sont commises, est divisée par/?. Le numérateur de la fraction qui représente la probabilité nsie le même, en effet, et le dénominateur, nombre des erreurs commises, est multiplié par p. En intégrant par parties, l'expression (33) devient

'ik^ '

c'est-à-dire, d'après l'équalion (32) (jui détinit À,

k-^p sjr.

En divisant par /??, égal approximativement à ///j, on a, pour représenter le carré de l'erreur à craindre,

I / ■ik\e->'^^i^^\

en posant, seton la notation habituelle,

^ / e-'"- fh = <d{t).

o(A-À) est, par déhnition, égal à /?, et la valeur probable du carré de l'erreur devient

1 nk

^{khy^

La fonclion

CHAP. vin. — LOI DES ERREURS d'oBSERVATION. 20O

ÏHtW

est nulle pour ^ = o; elle augmente avec t et devient égale à Tunité pour une valeur infinie de /.

Voici quelques-unes de ses valeurs :

Le multiplicateur de ^_, évalué approximativement, peut diminuer sans limite. Ou ne doit pas oublier que, pour appliquer la formule, il faut que les observations conservées, de même que les observations faites, soient en grand nombre.

167. La loi de probabilité- des erreurs dont l'exactitude a été vérifiée expérimentalement en quelcpie sorte (140) permet de prévoir, lorsque les épreuves sont nombreuses, tous les détails relatifs à la série des erreurs commises.

Nous donnerons un dernier exemple en cherchant la valeur probable de la plus petite des erreurs commises dans un grand nombre de mesures successives.

Soit z la plus petite des erreurs commises sur n mesures. La probabilité pour qu'une erreur désignée soit égale à z et soit la plus petite de toutes est

Le premier facteur exprime la probabilité pour que l'erreur

soit z\ le second, pour que toutes les autres soient plus grandes

que z. Chacune des n mesures pouvant produire celte erreur miniina, il faut multiplier l'expression parn; puis, pour avoir la valeur probable de l'erreur z dont elle représente la probabilité, il faut multiplier |)ar z et inté>;rer entre o et co.

La valeur- probable de la plus petite des n erreurs est donc

(34) ^ r " -^ ^~'"" dz(x-'-^ fe-"-'^-' dz] " ' .

Intégrons par parties, en faisant porter l'intégialion sur le facteur qui multiplie 2, dont l'intégrale est

et, en remarquant que le terme intégré est nul aux deux limites, l'expression (34) devient

Lorsque z est petit, — z / e' '"" dz diffère peu de kz, et, lorsque

z cesse d'être petit, la j)uissance n placée sous le signe d'intégration est négligeable. On peut donc, en désignant par \ une valeur arbitraire de 2, remplacer (34') par

il — kz)" dz = ! rfi — (i — AÀV'+n.

n étant grand et X n'étant pas très petit, le second terme de la païen ihèse est négligeable, et la valeur probable approchée de la plus petite erreur est

168. Si l'on calcule par une méthode semblable la valeur probable de la seconde des erreurs classées par ordre de grandeui-, on la trouve double de la plus petite; la troisième est triple, et ainsi de suite, tant que les formules d'approximation sont appli-

cables. Il peut sembler étrange que, en classant les erreurs par ordre de

grandeur absolue, la valeur probable de la seconde ne soit pas égale à celle de la première. TouL est symétrique, en eflTet, entre les erreurs positives et les erreurs négatives. Pour<|uoi la valeur probable de la plus petite erreur négative ditlére-t-elle de celle de Ja plus petite erreur positive?

Elle n'en dinére pas.

La singularité apparente provient d'une confusion qui s'établit «ntre la valeur piobable d'une grandeur et la valeur qu'il est probable de lui voir piendre.

Pierre et Paul doivent se partager un héritage. On sait que l'une des parts, on ignore laquelle, sera double de l'autre.

Les deux parts ont même valeur probable, égale pour chacune à la moitié de la somme totale.

La valeur probable de la plus grande part est double de la valeur probable de la plus petite.

La valeur probable ; r de la plus petite erreur est

plus petite que la valeur pioi)able de l'erreur commise sur la moyenne.

La valeur probable du carié de l'erreur commise sur la moyenne

égale à la valeur probable de

e| -H e| -H. . .-i- ef,

est, en eflet

Le carré de l'erreur commise sur la moyenne étant de même

ordre que —, celle de l'erreur est de l'ordre -— > beaucoup plus

grande [):ir conséquent que la valeur probable des plus petites •erreurs.

On accroîtrait beaucoup la précision d'une mesure si l'on pouvait découvrir les évaluations les lueilleures et les adopter de prélérence à la moyenne générale; il en serait de même si l'on

pouvait prendre la moyenne des observations les meilleures. Elles sont malheureusement confondues avec les autres sans que rien les décèle avec certitude.

170. La règle acceptée comme poslulatum prescrit, entre plusieurs mesures d'une même grandeur, d'adopter la moyenne. Celte règle suppose deux hypothèses : la première, que nous avons faite conslammenl dans l'étude de la théorie des erreurs, est l'absence de toute erreur constante; la seconde, que toutes les observations méritent la même confiance et qu'elles aient été faites, par exemple, par le même observateur, suivant la même méthode, avec le même instrument.

Lorsque cette seconde condition n'est pas remplie, i,l faut a|)précier ces valeurs relatives.

Supposons que les constantes caractéristiques de chaque système de mesures soient connues : soient A,, A-^, ..., ku ces constantes, les poids des observations sont k]^ A'!;, ... A;;.

Supposons que l'on ait a, mesures prises dans le premier système, a.j dans le deuxième, ..., a„ dans le n'"""".

Ramenons toutes ces mesures à d'autres dont le poids soit l'unité et supposons cette unité choisie de telle sorte que A:,, k\^ ..., k'^^ S()i(Mit des nombres etitiers.

Chaque mesure de poids A? sera remplacée par le système équivalent de kj mesures avant chacune un poids égal à l'unité. Toutes les \aleurs mises en présence ayant ainsi même poids, il suffira de prendre la moyenne. a« désignant le nombre des mesures de poids A;, et ;r, la moyenne de ces mesures, on obtiendra ainsi la valeur

ai k] 37] -+- g.; /cl 3-2 -t- • . . + a,, k\ Xn

On peut énoncer ce résultat en disant que chaque mesure est. multipliée par le poids de l'observation correspondante et que la somme des produits est divisée par la somme des multiplicateurs.

Le poids de la valeur (35) est

aiAf H-ajA-l +. ..-1- a„A-2.

La moyenne entre plusieurs observations équivaut à une obser-

valion unique avant pour poids la somme des poids des obser-va- (ions pariielles.

171. Il arrive quelquefois que, pour mesurer une grandeur, on la partage en plusieurs parties «,, a^, ...^a^; on mesure cliacune d'elles et l'on fait la somme.

Supposons que toutes ces mesures aient le même poids k"^.

Quel est le poids de la somme «, + «0 + . . .-f- «,^7

Soient £(. £0, ..., t,t les erreurs, inconnues bien entendu, commises sur chacune des mesures, l'erreur sur la somme est

on a

Glieichons la valeur probable des deux membres. Celle des produits tels que £,£;•' est nulle, puisque les erreurs |)osilives ont, par hypothèse, mêuie probabilité que les erreurs négatives.

Les valeurs probables des termes tels que {'■ sont égales (li8) à —j^^ et, par conséquent, puisqu'il j a /^ termes, la valeur j)robable du carré de l'erreur commise est

Si la probabilité d'une erreur z commise sur la somme était

re])résentée par

la valeur probable du carré d'une erreur serait

Si donc nous posons

>/ Il

k' est la |)récision d'une mesure qui donnerait au carré de l'erreur commise même valeur probable que la somme étudiée.

La confiance méritée par la moyenne de n mesures est inversement proportionnelle à \J n.

172. L'armée française, pendant l'expédition d'Egypte, voulut déterminer la hauteur de la pyramide de Chéops. Les assises successives, formant pour ainsi dire les 203 marches d'un gigantesque escalier par lequel on s'élève au sommet, furent mesurées successivement par les soldats du Génie. L'erreur commise 203 fois, disait-on, sera niuiliplиée par 203. L'erreur à craindre, répondit Fourier, est multipliée par i4, racitie carrée de 203. On ignore sur quels principes l'illustre savant faisait reposer cette règle, que personne avant lui n'avait proposée.

173. Je terminerai ce Chapitre par l'examen d'une question très délicate. On a pris plusieurs mesures d'une même grandeur J7,, x.,^ ..., x,i\ elles ne s'accordent pas. Une formule démontrée (103) fait connaître l'évaluation de la précision des observations, déduite de la somme des carrés des difierences entie les valeurs obtenues ou, ce qui revient au même, de l'excès de la moyenne de la somme des carrés sur le carré de la moyenne. Il faut appliquer cette règle avec beaucoup de prudence; elle suppose, en effet, que le mérite des observations soit, a priori, inconnu et que la discordance qu'elles présentent soit le seul indice dont on dispose pour leur appréciation.

Il en sera très rarement ainsi. Si les observations sont faites par un observateur habile avec un instrument excellent, elles méritent plus de conliance, lors même qu'elles s'accorderaient moins, que des observations plus concordantes d'un observateur

médiocre. 11 n'est pas admissible, par exemple, qu'en détachant sur les registres de Bessel quelques observations d'une même étoile on prétende en déduire une appréciation de son habileté et du mérite de son instrument.

La constante désignée par k^ prise pour inconnue dans les formules trouvées (163), est souvent assez bien connue à l'avance pour que des renseignements nouveaux n'autorisent pas à en changer la valeur.

Le problème alors devient très didërent.

La constante qui caractérise la précision du système d'observa-

lions élanl connue, quelle doit être rinHiience de l'accord plus ou moins grand des mesures sur la confiance méritée par la moyenne?

Si, par exemple, on a mesuré les trois angles d'un triangle indépendamment les uns des autres, leur somme se trouvant exactement égale à deux droits, faut-il, pour cette raison, accorder plus de confiance aux mesures que si la somme avait surpassé de o,a5 la valeur qu'elle doit avoir?

La réponse doit varier suivant les cas. Si l'observateur est inconnu aussi bien que l'instrument, on devra appli([uer la (ormule trouvée (163), et la concordance des mesures déterminera la précision présumée des observations.

Si la constante appelée A-^ est assez l)ien connue, a priori, pour qu'on écarte l'idée d'en changer la valeur, la concordance

des observations ne doit pas accroître la confiance qu'elles inspirent.

La conclusion semble inacceptable.

Si les observations sont discordantes, si leuis différences dépassent l'erreur probable de rinstrument, pent-on leur accorder autant de confiance f|u'avant cet indice défavorable?

Si un observateur, quelle que soit son habileté reconnue, donne du même angle trois mesures très tlifTéi entes, on n'échappera pas à l'idée que, ce jour-là, soit fatigue, soit oubli d'une précaution nécessaire, il a moins bien observé (|ue de contume. C est sur cette conviction que repose la défiance éveillée par le résultat, et c'est elle, précisément, que nous écartons dans l'énoncé du problème.

L'application du Calcul des probabilités à l'étude des erreurs d'observation repose sur une fiction dont il ne faudrait pas faire une réalité. Les erreurs sont supposées tirées au sort dans une urne dont la composition est définie par la loi de probabilité acceptée.

Si l'observateur est malade, si l'on a dérangé les fils de sa lunette, exposé à l'humidité les poids de sa balance, changé son thermomètre habituel, il fait, ce jour-là, le tirage dans une autre urne, les résultats écha|)pent à toute théorie.

Nous écartons, dans le calcul suivant, toutes les suppositions de ce genre. L'observateur s'est appliqué comme de coutume, son instrument est en bon étal, les erreurs sont soumises aux chances

h:il)iiiielles; la constat)le k est connue et ne peut être changée par Je succès de quelques observations nouvelles.

Il faut admettre, en outre, |)our que les hypothèses n'impliquent pas contradiction, (pie les éc;irts n'aient rien d'exceptionnel.

174. Le calcul, lorsque ces réserves sont légitimes, justifie les conclusions qui précèdent.

Sup|)osons que n mesures d'une même grandeur aient été prises. Soient j,,j2, •••» J^« les erreurs commises successivement. Chacune d'elles est inconnue, bien entendu.

La probabilué d'une erreur comprise entre z el z -\- dz étant, |jour l'observation de rang /,

-— e-/',- dz,

et les valeurs de ki étant connues, la probabilité du concours des erreurs supposées sera

Soit z la movenne des diverses mesures, prise eu ajant égard à l'erreur probable de chacune d'elles, c'est-à-dire (171) en attribuant à chaque détermination de la même grandeur un poids inversement proportionnel à la valeur probable du carré de l'erreur.

On

aura

(37) z = ^^y^-^^ly^-^-'-^^^iyn

Posons

71=2 -4- a,, jK-2 = 2 -+- a2,

JK;, = -s -t- a„

et substituons dans l'expression de la probabilité (36), considérée comme un élément d'intégrale multiple, les variables z, a,, ^•11 •••, y-n-i ^ yii y-i, ...,y,i; a« n'est pas une variable indépen-

L -.ai^j. . .a„_, J

,-, y\y-i---yn

^.aiao. . .a„„,

étant le déterminant fonctionnel des variables j'(, r^, rapport à celles qu'on leur substitue.

Ce déterminant est

yn pc

kl

-kl W

--kl

kl

les dérivées de z -\- Xn qui forment la dernière lii^ne étant déduites de la relation (3^).

Le déterminant est égal à

kl

k'h La probabilité (36) peut donc être rem|)lacée par k\ki. . . k„

,-l3-(A-|H-Ai-i-...+A-2)H-A-îa?+A-5a|+...+/.;,ai)

dz doi, d%.^ . . . di„ , , „ , , , , ,

X rr (/'i -H A| -t- . . . -h k,-,).

Le leinie du premier degré en 5, dans l'exposant de e, disparaît de l'expression (38), à cause de la relation (37).

Lorsque ai, x-,, ••., a«_) sont donnés, la probabilité est de la

forme

(39) Ge-(^?+/-1+-+n)z'rf^,

et comme il faut bien que, dans cette hypothèse, z ait une valeur comprise entre — 00 et +00, Téqualion

donne

La valeur probable du carré de l'erreur commise sur 5, déduite de la formide (39), est

indépendante des valeurs supposées connues de a,, X2, . ■ ., Xn-

Dans le plus grand nombre des cas, quand on entreprend une série de mesures, l'habileté de l'observateur n'est ni parfaitement connue, comme nous venons de le supposer, ni complètement inconnue, comme on l'a admis (148); ce sont deux cas extrêmes. Il arrivera presque toujours que, toutes les valeurs de k étant possibles, elles seront, a priori, inégalement vraisemblables. Si la loi

de leurs probabilités avant l'épreuve est inconnue, le problème est insoluble.

ERREURS DE SITUATION D'UN POINT

Sit p loeus ol)jPcti alicujus ex oliseivatione piinia dcnnitiis. q,r..'!, ... ejusdem objecli loia in ()l)sorvalionibus scquenlihiis; sint insuper 1', U, U, S pondéra recipioce proportionalia spaliis cvajïationuni, per <\u!V se dilTunderc possinl errores ex ol>servati()nil)US singulis pi-odeuntes, (|UiC dantur ex datis oirorum limitihn*; et ad puncla /), 1/, r, .1. ... p(isil,i irUellisçantur pondéra P, y. II. S, ..., el iiivciiiatiir eoniin Kravilalis cenlruni 7. : diio puncluni Z fore locuni olijecii, qui pro vci-o ejus loco tulissinie lial)eii polest.

UocEii Cotes.

175. Confiance de Bravais dans la loi élémenlairc de la pi()l);ibilité des erreurs proposée et abandonnée par Gauss. — 17(j. Conséquence (hms le cas où l'erreur sur chaiiue coordonnée est la résultante de deux erreurs élénienlaires. — 177. Formule de Bravais déduite d'un postulatum. — 178. Détermination du facteur que la démonstration laisse indéterminé. — 179. Probahiliié des écarts dans le tir à la cible. — 180- Ellipse <lans l'intérieur de laquelle il y a probabilité donnée de voir la balle se placer. — 181. Moyenne probable des valeurs de la constante. — 182, 183. Quelle est la mesure de l'Iiabileté d'un tireur. Difficulté d'une réponse précise. — 184. Vérifications de la formule. — 185. Erreur à

craindre sur la moyenne des valeurs de la constante. - 186. Valeur probable du carré de l'erreur commise dans l'évaluation du nombre des balles intérieures à une certaine ellipse. — 187. Calculs relatifs à 1000 balles tirées dans une même cible.

175. Lorsque les coordonnées d'un point sont déterminées indirectement par l'ohservylion de grandeurs dont elles dépendent, Terreur commise sur sa véritable place et la probabililé d'un écart donné dépendent de la loi de probabilité des erreurs commises dans les diverses mesures.

Les études faites sur cette question, particulièrement par Bravais dans un Mémoire remarqué, supposent une confiance absolue dans la loi pro|)Osée |)ar Gauss sur la probabilité des erreurs élémentaires ; la piobabilité d'une erreur z est proportionnelle à e~"^^\ la constante k variant seule avec la précision des mesures.

Les formules déduites de cette hj'pothèse sont confirmées par les laits connus.

Bravais exprime les coordonnées du point observé en fonction linéaire des grandeurs mesurées; cela revient à prendre pour variables les difiérences entre les grandeurs mesurées et les valeurs observées, en supposant ces dilTérences assez petites pour qu'il soit permis d'en négliger le carré.

176. Supposons, par exemple, que, x eV y étant les coordonnées d'un point inconnu dans un plan, on ait

iP =: X H- au -j- bv^ y = Y -h a' u -^ b' v^

X et Y étant les valeurs approchées obtenues en acceptant les mesures comme exactes et u et ç les erreurs commises sur ces mesures.

La probabilité pour que l'erreur m soit comprise entre «et (x-{-dx étant

et celle pour que l'erreur v soit comprise entre 3 et [5 + d'^,

v/tt

la probabilité pour que le point dont les coordonnées sont x qI y se trouve dans la partie du plan qui correspond aux limites indiquées est

On peut, dans cet élément d'intégrale double, substituer aux variables a et [3 les difiérences

X — X = xi.

Le [)rodiiil dy.d[tj, d'aprè-s la théorie de la Iransformalion des iDléf^rales, sera remplacé par

dxx dy^ dxx dyi

dxy dyi dx^ dy^ ~ ab' — ha!^ ofa "t/p' ~ ~d^ lu

et la probabilité pour que le point soit compris dans le rectangle infiniment petit <ia;, dy ^ prendra la forme

Qg_^j^a_2X^y,-^ljî dx^ dy^,

l'exposant de e étant la somme — k-x- — A'- 3- exprimée en fonction de x^ et de y^ .

177. La méthode peut être étendue au cas d'un nombre quelconque de variables élémentaires. On transformera, dans tous les cas, la probabilité d'un système d'erreurs mis sous la forme d'un élément d'intégrale multiple, en introduisant au nombre des variables les coordonnées du point étudié aux(|uelles il faudra, dans le cas général, associer d'autres variables. Ces variables, arbitrairement choisies, disparaissent à la fin du calcid; mais les transformations intermédiaires sont fort compliquées.

On obtient très simplement le même r(';sultat en acceptant un postulatum é(piivalent à celui de Gauss (138), énoncé par Cotes, en 170g, et employé ingénieusement par M. Schols pour démontrer le théorème de Bravais.

Si plusieurs positions d'un même point ont été successivement obtenues et méritent la même confiance, la position la plus probable est le centre de gravité du système des différents points considérés comme de même masse.

Soit c3(a, ^)dxd^p la probabilité pour que l'erreur commise sur l'abscisse du point inconnu soit comprise entre a et a -)- t/a et l'erreur sur l'ordonnée entre [^ et [^ + <r/|S, le point se trouvant compris, par conséquent, dans un rectangle infiniment petit de surface dxd^.

Si ^ijKi , x->yi^ • .., Xny,i sont les coordonnées des positions présumées d'un même point et x^y les coordonnées véritables, les erreurs successivement commises dans les diverses déterminalions des coordonnées inconnues sont représentées par x — X(,

y — Vi, • •., et la probabilité de leur concours est proportionnelle au produit

(i) ?(^ — ^i,r— ri)?C^ — ^2, JK— JK2)...o(a- — :r„, j— jK„).

La position la plus probable a pour coordonnées, d'après le poslulatum,

X^-h To-h. .

r,-+-jK2-f-.

(>es valeurs de x et de y doivent rendre le produit (i) maximum cl, par conséquent, annuler les dérivées de ce produit par rapport aux variables X et y.

Si l'on pose

les coordonnées x el y définies par les équations (2) doivent satisfaire aux équations

F, (^ — ^1 , jK — JKî) + Fi (a- — ^2, JK — ^2) -t- . • . + Fi (^ — ^,i, 7 — JK„) = o, ^■i{or — Xu y—yi) + ^2{x — Xi, y — y^)- ^...-+-¥i(x — Xn, y — yn) = o.

La somme des variables 37 — 57,. x — X2, ..., x — Xn est, en vertu des équations (2), égale à zéro, ainsi que celle des variablesjK — y\'> y —y-i, •••, JK — JK« ; aucune autre condition ne leur est imposée. Les fonctions F, et F2 sont donc définies par les conditions que les équations

^\{ih, ^^i) + Fi(m2, (^2) -4-. . .-H Fi(«,j, Vn) = o,

FaC"!, <^l) + F2(M2, P2)+...-+-F2(m„, Vn) = O

soient les conséquences nécessaires des relations

Ml -H «2 H- ... -1- U,i = O, Vi -h i>i^.. .^Vn = O

entre les variables.

En réduisant à deux le nombre des variables, la condition se

CHAP. IX. — ERREURS DE SITUATION DUN POINT

l'édiiit à

Fi("i, t-i) -+- Fi(— Ml, — Pi) = o;

la fonclioi) F, change de signe quand les deux variables changent de signe.

Si Ton suppose trois variables, on obtiendra, en tenant compte du résultat précédent,

U) F,(ai, Vi)-+- Fi(w2, ('2) = F,(w,-h u., t^i + t's),

quelles que soient les variables m,, t',, u^, t'o. On en déduit, en

posant --JLl=,,^^^x,y),

<pl("2, 1^2) = 9l(i<l -H «2, <'l -+- 1^2);

par conséquent,

La dérivée de F, par rapport à x est donc une constante. En dilTérentiaut l'équation (4) par rapport à t^, et à v^, on verra qu'il en est de même de la dérivée par rapport à y. Les dérivées de la (onction F, étant constantes, cette fonction est linéaire par rapport aux deux variables; il en sera de même de F^, et nous pou-

vons poser, en remplaçant F< et F2 par les dérivées qui les définissent (3),

dl t3(.r, y)

dlo(x. y) , ,,

dy =«^ + ^r;

ax + by et a' x + b'y étant les dérivées d'une même fonction, on doit avoir

d{ax ^ by) _ d{a' x -^ b' y) ^ dy dx '

par conséquent, b =: a' . La fonction l'f{x,y) définie par ses deux dérivées est nécessairement de la forme

l <f{x, y)^ -— + bxy 4- -^ -4- G,

a, è, 6' et C étant des constantes.

Les erreurs infinies étant impossibles, cp(;r,y) doit s'annuler quand oc el y sont infinis, les constantes a et b' seront négatives.

La probabilité d'une erreur comprise entre m et w + du pour x el ç et V -\- dv pour y est donc de la forme

G étant une constante et X, constant aussi, pouvant être positif ou négatif.

Les points d'égale probabilité sont sur une même ellipse ajant pour équation

k^u'^-+-yAuv + k'^v'^= H,

Il et V désignant les différences entre les coordonnées du point considéré et la position véritable, centre commun de toutes

les ellipses semblables entre elles dont les dimensions sont proportionnelles à y/H,

d78. Les quatre constantes G, a, k, k' sont liées dans tous les cas par la relation nécessaire

(5) ^ f f ^~'''''~'''^''~ ''''''''' du dv = i.

Il faut bien, en effet, que les erreurs aient des valeurs comprises entre — ooel +00, et la somme des probabilités relatives à toutes les erreurs possibles est égale à l'unité. Posons

k'^u^-^iXuv-^ k'-iv^= H;

à chaque valeur de H correspond une ellipse dont la surface est

TlH

Qç^k'^—l^

Tous les points de la couronne comprise entre les ellipses correspondant aux valeurs H et H + dtl du paramètre ont même probabilité, et la somme des probabilités relatives aux. éléments de

celle couronne est

Je liiclenr representanl la surface de la couronne.

La condition (5) devient Gr

et, comme

on déduil de (5)

Gr C"

C e-"r/II = i,

La probabilité pour que le point se trouve entre les deux ellipses qui correspondent aux paramètres H et H'+ d\\ est

170. La formule précédente s'af)plique cà la probabilité des écarts dans le tir à la cible.

La première question à résoudre dans l'étude des questions relatives à une arme donnée et à un tireur (pii en fait usa"e est de déterminer pour cette; arme et pour ce tireur les constantes caractéristiques A-, k' et A. iSous cliercherons pour cela, en considérant ces constantes comme connues, les valeurs probables de u- r^ et «r, u et v désignant les coordonnées du point où frappe la balle par rapport à deux axes passant p;ir le centre de "-ravité de tous les points frappés, supposés, bien entendu, très nombreux.

Les valeurs probables, en vertu du théorème de l^ernoulli, doivent différer très peu des valeurs données aux moyennes par le hasard.

Les coordonnées du point où frappe la balle par rapport aux axes dont l'origine est au centre de gravité des points frappés étant désignées par u et r, la probabilité pour (|ue ce point se

trouve dans le rectangle du dv élanl la valeur probable de u"^ est

Ou peut l'écrire

on a

-^■^(-fer..._/-

el l'expression (-j) devient

(8) — i^/X-^A'^— â2 / ,<2e~i^'~^'^""«fM.

A-'v/- J-oc

La formule

donne pour (8) la valeur (9)

z'-e-V'-' dz =

Telle est la valeur probable de u'-.

La valeur probable de av est exprimée par

on a

Posons

"ku t

CHAI'. IX. — KKKELRS DE SITf VTIOX U LN POINT.

(lO)

/ ve V "^Z dv ^ e-" jr-, df = — -— v/-:r.

La valeur probable de av se réduil donc à

— -î^ — a/ M2^we V ^"":= -— f^ ^

La valeur probable de t^-, calculée comme celle de a-, est

En égalant les valeurs probables aux valeurs moyennes données par l'ensemble des résultats obtenus, on obliendia des équa-

tions dont les deux membres, si les observations sont nombreuses, différeront probablement très peu. Posons donc

rj^ fj — . ..— Vj,

llX ('i — U-i V-i

Nous aurons, |)Our déterminer A", k' et a, les é(|uations

on en déduit

- = 4(AB — Cî).

AB — C

-G •i(AB — C^)'

180. Les constantes k, k' et \ élant connues pour une certaine ainie et pour un certain tireur, si l'on pose

A-2 m2 4_ ., X uv -h k'^ v^-=H,

la probabilité pour que Ja balle soit j)lacéi' entre les deux ellipses qui correspondent aux valeurs H et H + dH sera (178)

La probabilité pour que la balle frappe en dehors de l'ellipse correspondant à une valeur H, du paramètre est

dU = e-»i.

Si l'on pose

la probabilité sera ^. L'ellipse correspondant à cette valeur de H, contiendra, si les coups sont nombreux, la moitié des points frappés à très peu \)vès.

Si 1 on donne successivement à H les valeurs

0, io5'3G,

les neuf ellipses semblables corresjiondant à ces valeui-s du paramètre parlageront le plan en dix régions contenant chacune, vraisemblablement sur un très grand nombre de coups, la dixième partie à peu [)rès du nombre des halles. La première de ces régions est la plus petite des elli|)ses; la dernière est la portion du plan située au delà de la plus grande

181. A chaque point frappé par la balle correspond une valeur

(le H. La valeur probable de H est

He-"^H =1,

Telle doit donc être, avec une probabilité d'autant plus grande que les épreuves seront pbis nombreuses, la movenne des valeurs de H correspondant aux points frappés.

182. Une question fort importante doit rester indécise. Quelle est, dans un concours de tir, la règle à conseiller pour juger les tireurs? Le problème ne me semble pas comporter de solution absolue.

Si les balles tirées par deux concurrents peuvent être classées de telle sorte que cbaque point frappé par le premier soit plus près du centre que le point co,rrespondant frappé par le second,

la décision semble facile. IJans ce cas-là même, si les différences sont petites, le tireur dont les balles sont moins approchées du but peut quelquefois prétendre au premier rang, en alléguant l'imporlance d'un écart horizontal plus grande que celle d'un écart qui laisse la balle dans l'alignement vertical.

Il semble naturel, à première vue, de mesurer le mérite d'un tireur par la siiiface de l'ellipse à l'intérieur de laquelle il y a probabilité donnée de voir la balle se placer. La valeur de la diflférence

représenterait alors le mérite de chacun.

Cette appréciation peut, dans des cas extrêmes, qui, très probablement, ne se sont jamais présentés et ne se présenteront jamais, donner des conséquences inacceptables.

Si l'un des tireurs plaçait toutes ses balles sur une ligne droite passant par l'origine des coordonnées qui sert de but, la règle proposée lui assignerait le premier rang, quelle que fût la dislance de ses balles au centre de la cible. La surface de l'ellipse caractéristique serait nulle, en en'et, dans ce cas qui, véritablement, n est pas à craindre. Il suffit qu'il soit possible pour condamner la règle. La théorie n'en reçoit aucune atteinte.

183. Si l'on regardait a priori toutes les directions comme indin'érenles, il faudrait supposer a = 0, k=ik'\ la probabilité pour frapper la cible à une distance comprise entre R et R + dW seiait

La valeur probable de R et celle de R- seraient ^ et — r^ : elles ' ik 1 k-

représentent, pour un giand nombre d'épreuves, la valeur moyenne

des dislances au centre de la cible et celle de leurs carrés.

Si dans un concours de tir on accorde le premier rang au tireur pour lequel une des deux moyennes désignée à l'avance a la plus petite valeur, les de-ux règles, si les épreuves sont nombreuses, donneront le même résultat; celui des tireurs pour lequel A" a la plus grande valeur sera certainement vainqueur.

Si les épreuves sont peu nombreuses, le concours devient un jeu de hasard dans lequel, comme il est juste, un avantage est fait au plus adroit. I.a valeur de A', déduite de la moyenne des distances au centre de la cible, mérite moins de confiance que celle qui résulte des cariés. Le rap|)ort des carrés des erreurs à craindre sur /r, dans les deux hypothèses, se calculera comme (lo2); il est égal à i6 — 4"^-

184. La difficulté, on peut dire même l'impossibilité de donner une règle précise de préférence entre deux séries de coups résulte d'une autre circonstance encore. Les formules précédentes supposent que, sur un grand nombre de coups, le centre de gravité des points frappés coïncide avec le centre de la cible. Nous avons écarté, en un mot, les erreurs constantes. Elles ne sont jamais nulles cependant, et, quand un grand nombre d'épreuves auront été faites, l'examen du mériîc de leur ensemble devra commencer par la détermination du centre de gravité du système des points frappés. La dislance de ce centre à celui de la cible représentera avec une grande probabilité la partie constante de l'écart. Pour déterminer les constantes caractéristiques A", k' et a, on devra rapporter les coordonnées des points frappés à deux axes ayant

pour origine le centre de gravité. Le mérite d'un tireur se trouvera ainsi défini par cin{| paramètres : les deux coordonnées a et b

du centre de gravité G de l'ensemble des points frappés et les constantes k, k\ a, déterminées au moyen des coordonnées prises par rapport à des axes passant par le point G. La somme «^ + b^ pourrait mesurer l'imperfection systématique de l'arme employée ou le défaut constant du tireur dans sa manière de viser, et la dil-Térence A- A'- — A- représenterait la précision. Le tireur est d'autant plus habile que ces quantités sont plus petites, mais il est impossible de leur assigner une importance relative.

Supposons deux tireurs, Pierre et Paul, ayant tiré chacun loo balles. Les balles de Pierre sont toutes à o"\ i du centre de la cible dans un cercle de o'",o5 de rayon. Il y a dans sa manière de tirer une cause d'erreur commune à tous les coups; à cela près, son tir approche de la perfection.

Paul, au contraire, n'a pas dans son tir d'erreur systématique. Les points frappés par ses balles entourent le centre de la cible; ils sont tous dans un cercle de o'",i5 de rayon.

Entre ces deux tireurs, dont l'un tire avec plus de précision, mais dont Taulre est exempt de toute erreur systématique, quel est le plus habile? La question ne peut être résolue. On pourrait la com|)arer à la suivante : Deux chronomètres ont été étudiés. Lors(|ue la température est constante, la marche du premier est plus régulière; mais, si l'on écliaulTe ou refroidit l'enceinte, il subit une influence plus considérable. Comment décider la préférence méritée par l'un d'eux?

Le problème est évidemment impossible à résoudre.

185. J'ai appliqué les résultats précédents à l'examen de 1000 coups tirés par des tireurs habiles h 200'" de distance avec dix armes de même modèle, (>.haque tireur tirant dix coups avec chaque arme.

Le centre de gravité des 1000 points frap()és avait pour coordonnées

on a trouvé, en nommant u et v les coordonnées par rapporta des axes passant par ce centre de gravité, pour l'ensemble des points

frappés,

= 03,22i = Li.

Les équations

donnent

•2(kU'^-l^)-

'■ = 0,00(i8825,

L'équation d'une ellipse d'égale probabilité est

A-2 z<2 _^_ 2 X iw -+- A'2 k-2 = H ;

à chaque point du plan correspond une valeur de H. En faisant le calcul pour les 1000 points frappés par les balles, on a formé le Tableau suivant :

ID

7Vt

23 j CALCUL DES PROBABILITÉS.

Tm DE 1000 BALLES. — Valeurs de H. (Suite.)

■4^' 0,016 0,i50 0,:>87 0,4io 0,589 0,770 i,o'j:'t 1,370 i ,885 3,ii'f

'i~ 0)047 O'iSo 0)387 0,4io 0,589 0,771 i,044 1,875 i,885 3,i25

^8 0,0',7 0,i53 0,087 0,4io 0,596 0,777 i.053 1,376 1,888 3,i45

^9 0>050 0,i54 0,:î88 0,4ii 0,597 "'779 i,0ô5 1,377 1,891 3, 168

50 0,050 0,i54 8,288 0,4ii 0,598 0,779 i,056 i ,384 1,895 3,225

ôl 0,054 0,i54 0,288 0,'(i2 0,602 0,780 1,057 "'389 i.Qoi 3,270

57 0,06> 0,159 0,296 0,425 0,609 0,800 1,069 iî4i5 1,970 3,392

5" 0,06't 0,161 0,296 0,427 0,6io 0,804 1,069 1,426 1,981 3,402

61 0,06>! 0,161 0,298 Oj-JoS 0,6i'j 0,806 i,08i i,430 1,999 3,502

68 0,072 0,170 0,3io 0,445 0,637 0.821 1,109 1,454 2.048 3,716

6" 0,072 0,174 0,3io 0,447 0,640 0,823 1,116 1,459 2,055 3,740

~0 0,070 0,17't 0,3io 0,4'|8 0,64i 0,823 1,118 1,462 2,081 3,787

~l 0,070 0,174 0,3io 0,4f8 0,643 0,825 1,122 1,475 2,085 3,795

~'^ 0,07') 0,176 0,3ii 0,449 0,643 0,826 1,124 1,48-2 2,086 3,806

~3 0,075 0,176 0,3ii 0,451 0,6')5 0,827 i,i30 1,486 2,107 3,924

~5 0,077 0,178 0,3i8 0,45s 0,646 0,836 i,i45 1,490 2,ii5 3,946

"6 0,077 0,178 0,319 0,461 0,649 0,836 1,147 "500 2,117 3,949

CHÀP. IX. — ERiuans de situation d'un point. "235

Tir de 1000 balles. — Valeurs de H. (Fin.)

93 0,097 0,300 0,346 0.486 0,670 (),S65 // i,Go3 // 7,609

98 0,102 0.208 0,356 o.'jÇ)! 0,687 ".870 " " " (')

103 '/ 0.2i5 // 0,50i // 0,888 // " " "

104 // 0,2i5 fi 0,503 // 0,893 // f " "

107 // " " 0,5io // 0,1^97 '/ " " "

108 '/ " " 0,5io // 0,899 " " " "

109 Il " " " " 0,900 // '/ " "

113 // // Il II II 0,906 // " " "

114 Il " Il II " 0-9"9 " " " "

115 // Il I' " " ",ni3

Les nombres de halles plaeées dans les divers inlcrvalles auxquels correspondent des prol)al)ililés égales à ~ sont, d après ce Tableau, 99, 106, 100, 108, 100, i i5, 89, 94, 90, ();.

Aucun d'eux ne s'écarte assez, du nombre le plus probable 100 pour démentir la théorie.

A chacune des limites adopt<'-es pour H correspond, nous l'avons dit, une probabilité -j^, et 100 balles par intervalle représenteraient Tévénement le plus probable. L'événement le plus probable se présente rarement, il j a toujours un écart. La valeur probable du carré de l'écart calculée plus loin (187) est

(') Plus deux balles mises hors la cible.

La somme des carrés des écarts observés est

I -H 36 -H 64 -H '2-25 -h 121 -H 36 -4- loo -h i

la moyenne est 62,4-

Le carré de l'écart moyen est donc inférieur à sa valeur probable, et l'accord de la théorie avec les faits est aussi satisfaisant que possible.

La valeur probable de H est, nous l'avons démontré, égale à l'unité. La valeur moyenne des 998 valeurs données par le hasard est 0,981. L'accord, on le voit, est de nouveau très satisfaisant.

186. Nous avons trouvé (181) la valeur probable du paramètre H, caractéristique des ellipses de probabilité donnée, égale à

l'unité. Il est intéressant de chercher la valeur probable du carré de l'erreur commise en égalant à l'unité la moyenne des valeurs de H, c'està-dire de calculer la valeur probable avant l'épreuve de

Hi -^11, -+.... ^-H„

H,, Ho, ..., R,i étant les valeurs de H relatives aux diverses épreuves.

On a

La valeur probable de H^^ est

celle de H, est l'unité, et la somme (i i). en ayant égard au nombre de termes compris dans chaque somme S, est

Telle est la valeur probable du carré de l'erreur commise en égalant la moyenne des valeurs de H à l'unité.

CHAP. IX. — EHREURS DE SITUATION DLN POINT

187. Nous avons irouvé la valeur de H pour la(iuelle la prol.abililé de voir la balle se placer à l'iiilérieur de l'ellipse correspondanle est -^.

Soient N le nombre des balles (pii frappeionl dans l'inléricur de l'ellipse, n celui des balles lirées; la dilTerence

sera petite si n est grand. Cherchons la valeur probable du carré

on a

' 70 / ^ lO lOO

li\

La valeur probable de X est -^^ : par consé(pienl, celle de — esi —, et l'expression ^12) peut être remplacée par

— est donné, puisciue n est le nombre des balles qui ont été

tirées; nous devons chercher seulement la valeur probable de ,N-.

N est le nombre de balles placées dans l'intérieur de l'ellipse. Le i)roblème est donc celui-ci :

Un événement a pour probabilité :^/, <pielle est la valeur probable du carré du nombre de lois qu'il se présentera sur n épreuves?

Soient /> la probabilité de l'événement (/> est ici égal à ^) cl q la probabilité de l'événement contraire.

Le développement

donne, par ses différents termes, les probabilités des combinaisons qui peuvent se produire.

Si donc on représente cette somme par

la valeur probable du carré du nombre m d'arrivées de Tévénemenl dont la probabilité est p est

on a

En prenant la dérivée par rapport à /? et multipliant par /?, n(p-hq)"-'p = X m X,np"' ;

prenant de nouveau la dérivée par rapport à /? et multipliant pai/>,

et, puisque p -{- q = i,

i: m- A„p"' = iip -^- n{ji — I)/?2 = n-p^+ npq .

p est Yjj, q esl ~; la valeur probable de N- est donc

n- ()n I oo 1 oo

net, par conséquent, celle de N- est

' lOO

lOO

La différence N doit très probablement augmenter indéfiniment, comme le font toujours les valeurs des différences absolues entre les grandeurs dont les valeurs probables sont égales; mais la diderence des valeuis relatives

n lo tendra vers zéro, car la valeur probable de

est

I / gn

Le rapport du nombre N des balles qui se placeront dans l'intérieur de la petite elMpse, au nombre total n des balles tirées, tend Yei>s _L quand n augmente, puisque la valeur probable du carré de

la dilFérence avec -7^ ^^^ — '

240 CALCUL DES PROHABILITKS.

LA. THÉORIE DES MOYENNES

Erroruiu rogularium consideralio proprie ab inslitulo nosiro excluditur.

Gauss.

188. Abandon nécessaire de la loi de Gauss. — 1S9. Conditions imposées à la loi inconnue qui devrait la remplacer. — 190. Détermination expérimentale de la partie constante de Terreur. — Evaluation de l'erreur à craindre. — 191. La moyenne des mesures converge vers la valeur véritable augmentée de l'erreur constante. — 19'2. Valeur probable de la constante caractéristique désignée par w^. L'évaluation de l'erreur à craindre dépend d'une constante nouvelle. — 193. La constante m} diminue quand on retranche l'erreur constante. — 194. Importance de la valeur de m-; insuffisance de la formule la plus simple. Correction proposée sans preuve bien satisfaisante. — 195. Observations de mérite inégal. — Poids d'une observation. — 196. Objection de Poisson à la théorie des moyennes. — Cause de l'exception.

188. Ni le succès près des observateurs de sa loi de probabilité des erretirs, ni la simplicité des conséquences, ni leur accord constant avec les faits n'ont décidé son illustre inventeur à y voir une vérité démontrée. Nous avons indiqué les graves objections que laisse subsister (138) la démonstration. Jamais Gauss ne les a proposées, mais l'abandon de sa première théorie permet de croire qu'elles s'étaient présentées à son es|)rit.

Sans renoncer aux méthodes déduites de cette théorie et devenues indispensables, Gauss a voulu les établir sur des |)rincipes plus certains.

La recherche d'une loi rigoureuse pour représenter la probabi-

lilé des erreurs ne semble laisser aucun espoir de succès : les plus illustres y ont échoué el les données du problème ne semblent donner prise à aucune recherche théorique.

Gauss, sans chercher cette loi inaccessible, variable sans aucun doute d'un cas à l'autre, a su, tout en laissant la fonction indéterminée, résoudre rigoureusement le problème.

La fonction inconnue, d'après l'ingénieuse manière dont il pose la question, figure seulement dans des intégrales définies dont les valeurs numériques deviennent les constantes caractéristicpies d'un système d'observations.

189. Supposons cpi'en mesurant une grandeur la probabilité d'une erreur comprise entre :; et z -i- dz soit représentée par

(^(z)dz. La fonction inconnue '-^(z) doit satisfaire à cpielcpies conditions qu'il faut dire :

On a rigoureusement

(i) f ':;{z)dz=^i.

Il faut bien, en elFet, que l'erreur ait une valeur, et la somme des probabilités pour tous les cas possibles, entre — x et -h x, représentant la certitude, doit être égale à l'unité.

Si les mesures n'ont []as d'erreur systématique et que I instrument rende les erreurs positives aussi probables, exactement, que les erreurs négatives, on aura

C'est ce que nous avons supposé juscpi'ici, admettant cjuavant l'étude d'un cas particulier on ait déterminé l'erreur constante; de l'instrument, pour la faire disparaître ou pour en corriger les résultats.

Ne faisons pas d'abord cette hypothèse, et posons

/ zo{z) dz = a\

a sera une constante que l'on peut appeler Verreur probable.

Gituss la nomme la partie constante de L'erreur. Quand on l'aura

déterminée pour un inslrument donné et un observateur désigné, on la retrancliera de chaque mesure; l'eireur, qui était ^, deviendra z — a. En posant

z — « = y, la probabilité de l'erreury sera toujours 'f (-3) dz-^ si on la nomme

/ yf^y)^fy= f {z-a)^{z)dz

et, à cause des conditions (i) et (2),

/ yJ'iy)dy = o.

J^a valeur probable des erreurs corri<;ées est donc égale à zéro et, ce qui revient au même, leur partie constante est-nulle. i

Nous parlons de la diflerence entre la valeur exacte et la valeur observée, qui peut être positive ou négative, et non de l'erreur absolue, toujours positive, dont la valeur probable, évidemment, ne saurait être nulle.

190. La détermination de la constante a sera facile, en général : on mesurera un grand nombre de Ibis une grandeur bien connue.

Soient (?,, Co, ..., e„ les erreurs successivement commises, on piendra

La valeur probable de l'erreur doit, en effet, d'après le théorème de BernouUi, différer peu de la moyenne des erreurs.

On peut aller plus loin et donner une appréciation de l'erreur à craindre, en acceptant l'équation (3).

Posons

^4) J z'-'^{z)dz = m\

La constante m- est déterminée pour chaque système d'expé-

nence. On en irouvera la valeur approchée, expérimentalement comme on a trouvé celle de a.

Cherchons la valeur probable de

e,— a-^. . .— Ca

elle donnera, évidemment, une indication de l'erreur à craindre quand on accepte comme nulle la grandeur positive qu'elle représent<'.

Cette expression (5) peut s'écrire

— '■ --^z -+■ Cl'-.

n- n- Il

I^a valeur probable de ej est, quel que soit /,

;-'i(z) dz = m- ;

celle de <?/,

z ^{z) dz = a

el, par conséquent, celle île e,e/' est a'-.

Ces valeurs sont les mêmes pour toutes les valeurs de i, car l'appréciation de l'erreur à crciindre est supposée faite à l'avance : elle est relative aux instruments dont on dispose, aux méthodes employées et à l'habileté connue» de l'observateur. Sa valeur n'a rien de fortuit.

L'expression (5) devient, en ayant éi^ard au nombre des termes de cha(|ue somme,

m- ni n — i)a^ ■>.na-

c'est-à-dire

La valeur probable du carré de l'erreur commise en prenant pour a la moyenne des erreurs tend donc vers zéro lorsque n augmente.

19L La moyenne d'un nombre de inesures de plus en plus

o^iand convergera vers la valeur véritable augmentée de l'erreur constante a.

On aura, en effet, en nommant x^. x-^,..., Xn les évaluations successives d'une même grandeur z et <?,, e-2, •••, e« les erreuis

correspondantes,

x'i = z -{- ei,

372 = s H- go,

et, puisque la moyenne des erreurs diflère peu de a quand n est srand, la moyenne des valeurs de x dillerera peu de z-\- a\ et, si a a été donné par l'étude préalable de l'inslrumenl et de la méthode, en le retranchant de la moyenne, on aura une évaluation de la grandeur mesurée d'autant plus certaine que les mesures seront plus nombreuses.

L'erreur commise sera exactement

la valeur probable de son carré est inversement (190) proportionnelle à n : on peut donc la regarder elle-même comme de

l'ordre — =;•

La conliance méritée par la moyenne d'une série de mesures s'accroît comme la racine carrée de leur nombre.

192. Pour obtenir, dans un système donné d'observations, la valeur probable de la constante nï-^ on fera une série de mesures X\^ iPo, ..., Xn d'ime grandeur bien connue à l'avance, e,, go, ..., 6,1 étant les erreurs successivement commises, on |)ourra prendre

ef -1- ei -i-. . .+ el

L'erreur à craindre en adoptant cette équation sera d'autan! moindre quelle nombre n des mesures sera plus grand. Il faut,

C.HW. \. — LA THÉORIE DES MOYENNES

pour l'évaluer-, chercher la valeur probable de

Posons

z'*o{z)dz — /(*;

h sera une nouvelle constante liée à la perfection du système d'observation et, comme m, d'autant plus petite que le système de mesures sera meilleur.

A* esl la valeur |)robable de la quatrième puissance de l'erreur commise dans une observation.

On a

(7) [— : -~m-\ =— jIe;-4- -^ 1 <?; + /«*.

La valeur probable de e] est h'\ quel que soit i; celle de ej est m- et celle de e^- e^,, par conséquent, w'*. La valeur probable de (j) esl, par conséquent,

h* ni n — I) , :>. r}} ^ n

n c'est-à-dire

elle tend vers zéro lorscpie ii augmente.

193. Lorsque l'on étudie un instrument, si l'on ne peut pas faire disparaître les erreurs constantes, le premier soin doit être de déterminer l'erreur probable a; elle sera retranchée de chaque résultat donné par l'instrument, la différence devenant l'évaluation acceptée.

La valeur de m-, relative aux mesures ainsi prises, est toujours plus petite qu'avant la correction ; plus petite même que si, au lieu de retrancher «, on faisait une autre correction constante, quelle qu'elle (ùt.

Lorsque z est remplacé par [z — a), la valeur probable du carré

de l'erreur devient

/ {z — a)^^(z)dz= z^f(z)dz — 2a f z '^{z) dz-^a"- l o{z)dz

el, à cause des équations

/ cp(z)rfz = i, / z^{z)dz = a,

/ {z — aY'o{z)dz = m'^— a"-,

plus petite que m^. Il n'y a pas à craindre que a- soit plus grand que m^, car le premier membre est essentiellement positif.

Si, au lieu de a, on retranchait de z une autre constante a, on aurait

j {z-o.Y'o{z)dz

— I z^'^(z) dz — 9.0L I z'j>(z) dz -h y.- I ^(z)dz = m- — 1 a Ci - \- y.^ = /n^ — a^-\- (a — a)2, plus grande que m- — a'-.

194. La valeur de /«-, quand on la calcule, comme on doit le faire, après avoir corrigé chaque observation de sa partie constante, est la mesure du degré de confiance à accorder au système ' considéré.

Si m'^ est petit, toute erreur qui n'est pas très petite en valeur absolue a une probabilité très petite. La valeur probable du carré de l'erreur ne pourrait pas évidemment, sans cela, être très petite.

Si m- est grand, on peut craindre de grandes erreurs; leur probabilité ne peut pas être petite.

La détermination de m^ est donc importante. La règle donnée la fait dépendre de l'équation

e? +el—...^ef,

et, pour connaître m, il faul, par conséquent, connaître d'abord les erreurs commises dans une série de mesures.

Si celle condition n'est pas remplie, on procédera comme on a fait (160) pour un prt)blrme semblable, ou, phi lot, pour résoudre le même problème que nous avons déjà rencontré. Nous avions trouvé, en étudiant une loi de probabilité d'erreurs,

e,, e.y (-"/t étant les erreurs successivement commises. C'est

précisément la même formide, démontrée de la même manière,

dans laquelle —p; représente Tinlégrale

)lace

— z-^ e-'^"-'" dz

z-^o(z)dz, lorsque la probabilité d'une erreur ^, au lieu d'être 'f (^), est

Nous pourrons, comme nous l'avons fait (100), remplacer les erreurs e,,^^ e„. si elles ne sont pas connues, par leuis valeurs approchées, qui seront les dllférences entre chaque mesure et la moyenne, et l'on devra, comme il a été expliqué, remplacer après cette substitution le dénominateur n par n — i.

La démonstration, nous l'avons vu, suppose que l'on néglige un terme dont la petitesse nécessaire est très imparfaitement démontrée.

195. Lorsqu'une même grandeur X a été mesurée par des procédés difierents, ou par divers observateurs avec des instruments de mérite inégal, on ne doit pas prendre la moyenne. Les observations les plus dignes de confiance doivent garder une influence plus grande.

Soient .r,, x^, • .., ^« n évaluations d'une même grandeur.

Supposons t\ue chacune des évaluations soit corrigée de la partie

constante, de telle sorte que la valeur probable de l'erreur ait été rendue nulle.

Soient m'-;, ml, ..., m^ les valeurs supposées connues de la constante m pour chacun des systèmes de mesures qui ont fourni ces n valeurs. Si l'on fait entrer dans la détermination plusieurs mesures prises dans les mêmes circonstances, on supposera les valeurs de m égales.

Clierchons parmi les expressions de la forme

(9) X := À|a-, -H Xa^-s-i-. . .-HX„a7„

celle qui doit inspirer le plus de confiance. Lh valeur à adopter est celle, évidemment, qui rendra mininia la valeur probable du carré de l'erreur commise.

On doit avoir nécessairement

car, sans cela, toutes les mesures étant supposées exactes, la valeur qu'on en déduit ne le serait pas.

L'erreur commise dans l'évaluation (9) sera

XiCi-t-Xies-h.. .-(- X„e„;

elle a pour carré

SX? ef -;-2i:X,X/e,e,'.

La valeur probable de ei est nulle; par conséquent aussi, celle de Cier; celle de ef est m'j. La valeur probable du carré de l'erreur commise est, par conséqu(>nt,

Xfmf + X|m|4-...H-X2m;2.

Il faut choisir les valeurs de X., Xo,...,).„ qui rendent cette somme minima en satisfaisante l'équation (10). Il laut égaler à zéro les deux dilTérentielles

dX I -+- d}..2 -1- . . . -t- <YX„ = 0, a m f Xi dli -+- 1 m-, X, d\.2 -F- ...-+- 2 m„ l^ dl,, — 0.

La seconde de ces équations doit être la conséquence nécessaire de la première. 11 faut pour cela que les coefficients des dilFéren-

CIIAP. X. — LV TllKORIK DES MOYENNES. 24q

tielles soient égaux el que l'on ait on en déduit, à cause de (lo),

et la valeur de X qu'il faut adopter est

m f ' nt I

C est la moyenne des valeurs successivement obtenues après que chacune a été midtipjiée par un facteur égal à l'inverse de la valeur correspondante m-.

Ce l'acteur —, d'autant plus grand que m- est plus petit el que,

par conséquent, la mesure mérite plus de confiance, se nomme le poids de l'observation.

/ ■ observations semblables équivalent, d'après la formule, à une seule qui aurait un poids /• fois plus grand.

Si la probabilité d'une erreur z est

on a

Le poids d'une observation est proportionnel à k-.

La définition nouvelle se trouve d'accord avec celle qui a été donnée.

Le mot précision ne peut pas (160), dans le cas général, être défini avec la même rigueur.

196. La règle relative aux moyennes, et la sécurité qui en résulte, est démontrée indépendamment de toute hypothèse sur la loi de |)robabililé des erreurs.

Poisson a signalé comme une objeclion le cas où la fonction '■:>(z) serait proporlionnelle à

in la représ

entant

pai

Gdz

doit avoir

C^ Gdz

en déduil

La probabilité d'une erreur comprise entre z et z -^ dz est alors

k dz

Dans ce cas, l'intégrale

32 dz

désignée dans la démonstration nar m'-, est infinie. Le poids — d'uni; observation est nul.

Jl n'v a pas lieu de s'étonner si la conclusion est en défaut.

L'iijpollièse est réalisée par une girouette qui tourne librement sans que rien la dirige. Considérée comme un instrument destiné à montrer une direction, celle du norrl par exemple, elle donnera précisément la probabilité d'erreur exprimée par la formule (11).

Nommons ^, en ellet, la dislance à laquelle la direction prolongée de la girouette coupera une perpendiculaire à la ligne (|ue l'on prétend délerminer, si la girouette fait avec cette ligne un angle o, on aura

(12) cp=r: arc tang -r-

CHAP. \. — LA THÉORIE DES MOYENNES

Toutes les valeurs de o comprises enlre — ^ ^^ "*" ï *^"" ^^"~ lemeiit probables.

La probabilité pour (pie l'angle désigné par le hasard tombe entre o et cp + do est

L'équation (12) donne

kdz dz

La probabilité d'une erreur, sur :;, comprise entre :; et c — ^/j

est donc

/.- dz

C'est précisément la formule (1 i).

aS** CALCUL DES PROBABILITÉS.

CHAPITRE XI

Nachdem dcr Observator das Seinige gethan hat, ist es an dem GooniPter die Unsicherlicit dor Beobachtungen uihI der Rpctinung daraiis al)g('leilelon (Irôsscn, narh streng matlicmatisclicn Principien zu wiirdigen.

Gauss.

107. La théorie de? moyennes n'est pas applicable, en général, à la détermination siinullanéc de plusieurs grandeurs. — 198.

Lorsque plusieurs valeurs d'une même inconnue sont indépendantes, on peut prendre la moyenne en ayant égard à leur poids; premier exemple. — 199. Deuxième exemple. 200. Troisième exemple. — 201, 202. Problème dans lequel les valeurs d'une même inconnue ne sont pas indépendantes, résolu en suivant le principe de la démonstration, dont il faut changer le détail. — 203. Problème général; première solution de Gauss. — 204. En ne faisant, en apparence, aucune hypothèse sur la loi de probabilité, on ne change pas essentiellement les conditions de l'énoncé. — 205. Substitution de la plus petite valeur probable du carré de l'erreur à l'erreur la plus probable. — 206. Lorsque le nombre des équations surpasse celui des inconnues, il existe entre les erreurs des relations nécessaires qui ne sont pas satisfaites. — 207. Expression adoptée pour l'une des inconnues; on rend le carré de la valeur probable de l'erreur minimum. — 208. Les erreurs étant très petites, la solution est la plus générale. — 209. Valeur probable du carré de l'erreur à craindre. — 219. Premier exemple. — 211. Second exemple. — 212. Les valeurs probables des carrés des erreurs commises sont indépendantes de la concordance des résultais; explication de ce paradoxe. — 213. Les formules sont démontrées pour des observations qui ne sont pas encore faites. — 214. On peut se placer à un point de vue très différent: le problème devient insoluble. — Développement sur un exemple. La valeur probable a priori de l'inconnue que l'on veut calculer a posteriori est un élément nécessaire de la solution. — 215. La question appartient à la théorie de la probabilité des causes; faute de l'une des données indispensables, la solution est impossible. — 216. Discussion d'un problème analogue. — 217. Élude du problême général; les solutions sont en nombre infini. — 218. Premier exemple. — 219. Second

exemple. — -210. Évahialinn, clans un cas très simple, de l'erreur à craindre en égalant la valeur vraie à la valeur prohable. — Calculs numériques. — 221. Théorème des moindres carrés. — 222. Simplification des calculs. -- 223. Exemple. — 224. Théorie de Gauss. — 225. Objections de Bienaymé. — 226. Les corrections prescrites par la méthode des moindres carrés sont des fonctions déterminées des erreurs réellement commises. — 227. Expression de la somme des carrés de ces corrections. — 228. Valeur probable de cette somme. — 22U. Exemple. — 230. Incertitude de quelques assertions compromellanles pour la théorie.

197. Lorsqu'une même grandeur a été mesurée plusieurs fois et que les résultats ne s'accordent pas, s'ils inspirent une égale confiance, il faut en prendre la moyenne; si leurs poû/s sont inégaux, on tient compte (195) dans le calcul de leurs valeurs relatives.

Lorsque plusieurs grandeurs ont été mesurées et qu'elles doivent servir à déterminer des inconnues jtar des équations plus nombreuses qu'il n'est nécessaire, le problème semble de même sorte. On possède, en edet, autant d'aitpréciations dilFérentes de chaque grandeur que de groupes d'équations pouvant les déterminer; mais ces appréciations ne sont pas indépendantes : cela exige un changement de méthode.

Si l'on a, par exemple, mesuré les trois angles \, B, C et les trois côtes «, b, c d'un même triangle, on pourra adopter comme valeur de l'angle A, soit la mesure A directement obtenue, soit le supplément de la somme B -H C, soit celle que l'on obtient en associant B ou C à deux quelconques des côtés, soit enfin prendre pour données les trois côtés.

Lors même que l'on aurait évalué les poids relatifs de ces neuf valeurs de l'angle A, la théorie des moyennes ne serait pas applicable. La combinaison qu'elle prescrit vaudrait mieux, peut-être, que l'une des mesures adoptée sans correction, mais elle n'est pas la plus plausible entre toutes. La théorie des moyennes suppose, en effet, l'indépendance des mesures associées. La valeur probable de chaque erreur est supposée nulle, ainsi que celle des produits de deux erreurs. Les erreurs positives, en d'autres termes, ont, par hypothèse, même probabilité que les erreurs négatives : celte condition n'est pas remplie dans le cas qui nous occupe. Si l'on s'est trompé, par exemple, en mesurant un angle, et cela est inévitable, les calculs par lesquels on fera servir cet angle a deux

(léteiminalioiis d'un autre anijle donneront, vraisemblablement, des erreurs de signes contraires à celles du |)remier. La valeur probable du produit de ces deux erreurs sera positive.

198. Lorsque la dépendance des erreurs n'existe pas, on peut appliquer Ja théorie des moyennes. Nous en donnerons quelques à exemples. 1

On veut déterminer la direction d'une ligne droite partant d'un point pris |)Our origine des coordonnées. On mesure pour cela les .j ordonnées y t, y 2i ■•■■>yn de n points de cette droite correspon- ' dani à n abscisses connues .a?,, .ro, . . ., Xn- Quelle valeur faut-il adopter pour le coefficient angulaire de la droite? Les mesures prises donnent, en désignant ce coefficient par a,

Ces déleiminations indépendantes ont des poids inégaux qu'il faut calculer.

Si l'on nomme m] la valeur probable du carré de l'erreur commise sur jKo ^6 carré de l'erreur commise sur — ? xi étant exacte-

ment connu, a pour valeur probable ~; le poids de la valeur

correspondante de a est, par conséquent, — ^- On doit, avant de

prendre la moyenne, multiplier chaque valeur de a par son poids.

On aura

y,x^ y^x^ ynXn

Si les mesures des ordonnées inspirent toutes la même confiance, l'expression se réduit à

199. Prenons pour inconnues, dans un second exemple, les trois angles directement mesurés d'un triangle. La somme des trois

inesiiies ne se Irouvanl pus égale à deux angles droits, quelles coi-reclions faut-il adopter?

Eu uonimant les angles A, B, C, on a deux mesures de l'augle A :

A et i8()"— B - C.

Ces mesures sont indépendantes ; on peut donc en prendre la moyenne, mais il faut calculer leur poids.

Soient m- le carré de l'erreur à craindre sur chacune des trois mesures; d. e^^ e^ les erreurs réellement commises. L'erreur sur

i8o" — B — C est Co+ <?;! ; elle a pour carré

e'I -f- e| -+- '-leoes,

dont la valeur probable est 2 m-. Les poids des deux déterminations de l'angle A sont donc -^ cl r,' et l'on adopteia la valeur

L'erreur commise est

La valeur probable du carré de celte erreur est

Î200. Le calcul précédent suppose les chances d'erreur dans la esure d'un angle indépendantes de la grandeur de l'angle. Quand les mesures sont prises dans les mêmes conditions, cela est, eu effet, presque absolument vrai.

Si, au lieu de mesurer les trois angles d'un triangle, on mesurait les irois parties d'une ligne très bien connue par des mesures antérieures, le problème, en apparence identique, serait, en réalité, très différent.

Soit / la longueur, supposée parfaitement connue, d'une ligne dont les trois parties «, b, c sont directement mesurées; on

trouve

Comment doit-on répartir l'erreur a entre les trois mesures? On a deux évaluations de a : a et i — b — c.

Si e,, 6-2, 63 sont les erreurs commises sur a, b, c, les erreurs commises sur les deux mesures sont e, et Co + e^ ; mais les valeurs probables de e;,^^, el sont inégales : c'est ce qui dislingue ce problème du précédent. Soient m;, m;, mj les valeurs probables de e-^^ el, e'i; on a

(e-y-h 63)"^— el -h e^ -+- 16263.

La valeur probable de eo e^ est nulle s'il n'y a pas d'erreur constante; les carrés des erreurs commises sur les valeurs de a ont donc pour valeurs probables m; et m': + m^ et les poids des

deux déterminations sont — r et

mj m| -1- ml

On devra prendre pour valeur de a

= a -\- il — a — b — c) -

La difficulté est d'évaluer les erreurs probables.

Si les mesures ont été prises en portant sur cliaque ligne une unité de longueur, la valeur probable du carré de l'erreur commise, dont chaque partie peut être positive ou négative, est pro-] portioiinelle (171) au nombre des unités; ou prendra donc m'-^ = a, ni^ = 6, ml = c, et la valeur la plus plausible de a est

201. Résolvons un problème très simple auquel la théorie des moyennes n'est pas applicable.

Supposons que, d'une station O, ou ait observé quatre points A,, Ao, Ag, Aj. On a mesuré, en les réduisant à l'horizon, les angles sous lesquels sont vues les cinq distances A, A2, A, «3, A, A4, A2A4, A3 Ai. Soient /,, /a, /g, /.j, ^5 les cinq valeurs

.)l)teniies; elles donnent évidemment trois mesures de l'angle A.OA, ^

Ces valeurs ne sont pas indépendantes. Les erreurs commises sur Is — l, et sur /,+ l,— l, sont liées l'une et l'autre à l'exactitude de /,. La probabilité pour qu'elles soient de mêmes signes est

plus grande que pour qu'elles soient de signes contraires. La théorie des moyennes n'est pas applicable.

Cherchons sans changer de méthode, en modifiant seulement la démonstration, la meilleure (combinaison à adopter.

Nous résoudrons deux problèmes :

Quelle est la meilleure combinaison des deux mesures I3— l, et /oH- l„ — /* qui ne sont pas indépendantes?

Quelle est la meilleure combinaison de /, avec la valeur déduite des deux autres mesures?

Pour déduire de l, — l, et de L+ L,~ l, la valeur la plus plausible de l'angle dont ces expressions représentent deux valeurs approchées, nous prendrons pour cet angle

avec la condition nécessaire

car il faut bien que, dans le cas où les deux évaluations s'accorderaient, leur moyenne soit égale à leur valeur commune.

En nommant e,, e-,. 63, e^, e-^ les erreurs commises sur les cinq mesures, l'erreur commise en adoptant (i) est

^1 («3— e^j-i- Ao (62— «3— e^; = Àsej-i- Aie,, — (Àj -t- l.^)e^-^ l^e-,.

La valeur probable du carré de l'erreur commise, en nommant m- la valeur probable des carrés e^, e.; , ... ei, est

//i^[X| ^X2^(À, + x, ^2^X2j ^^^2,2X2 -^3X2 -HaX.Xa). Il faut déterminer À, et À. de telle sorte que, en supposant

Xi^Xj^i, la somme

aXx -t- 3X| ^ aAiX2 soit miniina.

( )n trouve et la valeur la plus plausible est

Le carré de l'erreur commise sur cette détermination a pour valeur probable

m- (aXf + 3X| H- 2X1 Xj) = - m-.

La valeur probable du carré de l'erreur commise sur /, étant

m-, le poids de cette détermination sera ■ — -; celui de l'expres- ' r f,ii 1

sion (2).- — : ces deux valeurs du même ansle sont indépen-

danles. On prendra donc, enfin, pour valeur la plus plausible déduite de l'ensemble des mesures,

D \ 3) 3 / oli-h 1-2 ^ lli—^h-h h

L'erreur commise sera

dont le carré a pour valeur probable

202. Si, oubliant que les évaluations ne sont pas indépendantes, on avait cherché les poids des trois mesures

ils sont

on aurait adopté pour valeur de l'angle •i. 3

Le carré de l'erreur aurait ijour valeur probable -^-^ni-, c'est-

à-dire o^ô.i^m- au lieu de 0,62,5 ///*.

!20t^. Le problème général qu'il faut résoudre est le suivant :

On a fait, pour déterminer n grandeurs inconnues, n -r- p mesures, dont les résultats s'y rattachent par des équations nécessaires. Les écpiations se trouvent incompatibles; quel est le meilleur système de valeurs à adopter?

Si l'on accepte pour loi de probabilité des erreurs la formule

, --^e~ " dz^ en supposant à la constante k une même valeur pour

Vr '

toutes les grandeurs directement mesurées, la théorie devient fort simple.

Les mesures obtenues étant /,, Z^,, . . ., lu+p, on devra, pour rendre les équations compatibles, leur faire subir des corrections e,, 62, ..., e,ijf.p. La probabilité pour que ces erreurs supposées aient été réellement commises est proportionnelle au produit

elle sera maxima quand la somme des carrés des corrections sera la plus petite possible.

Le meilleur système de corrections est celui pour lequel la somme des carrés des erreurs supposées commises est un minimum.

'2.04. Après avoir proposé le théorème précédent, dont il a suivi les conséquences avec une merveilleuse habileté, Gauss, dans ses derniers Mémoires sur la combinaison des observations, a voulu s'affranchir de toute hypothèse sur la loi de probabilité des erreurs.

Les règles prescrites n'ont pas changé pour cela.

Il doit sembler étrange que la loi de probabilité des erreurs soit sans influence sur les conclusions d'une théorie dans laquelle elle joue un si grand rôle.

L'explication est simple : une hypothèse, compatible en apparence avec toutes les lois, est introduite dans la démonstration ; elle impose en réalité la même forme à toutes.

Nous supposons, dit Gauss, les observations assez, exactes pour que les carrés et les produits des erreurs soient négligeables.

Toutes les équations se trouvent par là réduites au premier degré, et toutes les lois sont équivalentes.

Si l'on nomme '^ (z) dz la probabilité pour qu'une erreur d'observation soit comprise entie z et z-\-dz^ on peut, z étant très petit, remplacer '^ {z) par le développement

(3) cf(2;=.o(o) + ^cp'(o)^-j^cç"(o)-^ _f__c,"'(o) + -^-^-? iv(o). Les erreurs constantes étant écartées, on doit a\oir

Çf (s) = ^{— Z)\

cp'(o) et o'" {o) sont donc nuls.

Le droit de négliger z"^ devant z donne, a fortiori, celui de négliger ;;* devant z'^ et de réduire l'équation (3) à

^{z) = ci(o) -t- --s2cp"(oj; mais on a, en négligeant toujours z" devant z^,

a -+- bz'^ = ae " .

La fonction '^{z) est donc, en réalité, assimilée à une exponentielle de la forme

205. Gauss, on le voit, aurait pu, dans les conditions où il se place, conserver sa théorie primitive. Il a fait beaucoup mieux. Cette théorie conseille, en effet, l'adoption du système de corrections dont la probabilité est maxinin. La théorie nouvelle semble préférable. La valeur probable du carré de l'erreur commise est

rendue mininia. Les deux conditions s'accordent, mais les principes sont très différents. Il aurait pu arriver que les corrections les plus probables eussent accru, dans le cas où elles ne sont pas les véritables, les chances de commettre de très grandes erreurs. Toutes les probabilités doivent intervenir pour décider le meilleur choix à faire.

Soient

/ 'îi(T,y. z. .. .) = /i.

les équations qui rattachent n inconnues x, y, z, ... à n -\- p i;randeurs mesurées /, , L, ..., Inj^p- Elles sont incompatibles el donneront seulement une valeur approchée de chaque inconnue. Nous supposerons les carrés des erreurs commises dans cette première approximation négligeables. La théorie, sans cette simplification, serait inextricable.

Le théorème de Taylor peimettra d'exprimer '^, , 'jo, . . ., '^uj^p ^"^ fonction linéaire des accroissements dont on néglige

les carrés. En éliminant entre les n -^ p équations ainsi transformées les erreurs commises sur Xjy, z. ... dans la première approximation, on obtiendra, entre les erreurs e^, e^ e,,^p commises sur les grandeurs directement mesurées /, , Z^, ..., ln+pi p écpiations du premier degré de la forme

Qiei-r-Q.e, — . . .^ Qn+pe,,^,, = h>,

,j •) Qiei-r-Q.e, — . . .^Q,;-H/,«?„^/; = /<.,

207. Pour ne pas compliquer les calculs, nous supposerons six grandeurs observées et trois inconnues, dont elles sont des fonctions déterminées ; les équations (5) seront alors au nombre de trois et n -\- p sera égal à six.

Nous adopterons, pour représenter la grandeur dont la mesure a été trouvée égale à /, , la somme

<(i) li-^-lihi^l-ihi—l^hs.

L'expression (6) se réduirait à /, si les mesures étaient parfaites ; mais de petites erreurs ayant été commises, en les nommant e, , e^, e^j es,, 65, Ce, celle qui en résulte pour (6) est

/ -f- >v2(Qiei-+- Q2e2-i-- ••+ Q«ef,)-(- À3(R,e,-4- R2e2 + -- . + R6efi).

[1 faut choisir X), Xo, X3 de manière à rendre luinima la valeur probable du carré de celte erreur.

En supposant les mesures dignes d'une égale confiance, et nommant m^ la valeur probable du carré e'f de l'erreur commise sur l'une quelconque d'entre elles, les valeurs probables de e, et

de eiCi' étant nulles par hjpolhrse, la valeur probable du carré de (^) est

\ m2(i+Xf SP2+X|ZQ2-4- X2 vB2+2À,X2SPQ

I +2X2X3:SQR + -2X3X,lRP+2X,Pi+2X2Qi- 2X:iRi).

Pour rendre cette expression minima, il faut éi;aler à zéro les dérivées par rapport aux facteurs arbitraires X,, X27 ^^3 J <>" écrira donc les éipiations

I X,:iP2 H-XaSPQ + XsSPR + Pj^o,

(9) XiSPQ + X^EQ'- +X35:QR-hQ, = o, (X1SPR + X2SQR + X32R2 ^R, = o.

Les facteurs A,, À21 ^3 étant déterminés par ces équations, l'expression

(10) /, -h XiA,-i- X2/(2-+- X3A3

sera la meilleure valeur à adopter pour /, .

208. Une objection se présente. L'expiession (n), dans laquelle les indéterminées À,, Ao,)>3 ont été choisies le plus avantageusement possible, n'est pas la plus générale parmi celles qui, si les mesures étaient exactes, se réduiraient à /, . On pourrait obtenir d'autres valeurs approchées en nombre infini. Pourquoi ne pas chercher entre toutes celle qui donne la plus petite erreur probable?

Si les erreurs n'étaient pas très petites, l'objection serait fondée

mais, les carrés étant néglii^eables par hypothèse, toute fonction qui se réduit à zéro quand ^, , hy, • • . sont nuls peut être

supposée du premier degré par rapport à ces quantités.

1209. Les équations (9) font connaître les coefficients les meilleurs à adopter pour la formule (10). La valeur probable du carré de l'erreur est rendue minima ; elle est représentée par la somme (8), dans laquelle A), Ao, X3 seront déduits des équations (9).

L'ex|)ression (8) peut s'exprimer plus simplement. Si l'on ajoute les équations (9) après avoir multiplié la première par A,, la deuxième par Ao ^t la troisième par A3, en retranchant du coefficient de m- dans (8) la somme ([ui est égale à zéro, la valeur probable du carré de l'erreur commise sur /, prend la forme

/n2(i -t- PiXi-H QiXj-h H1X3);

elle est proportionnelle à m-. Les valeurs de P), (^,, Il|, X(,)v2, A3 ne dépendent nullement de la concordance plus ou moins parfaite des observations, n'vélée par les valeurs /i,, h^, /13 des fonctions qui devraient être nulles.

210. Supposons, pour donner un exemple très simple, que x, y, z, u soient les quatre angles d'un quadrilatère. On a trouvé pour ces angles, directement mesurés,

Si les mesures étaient exactes, on aurait

/,^/,-^/.,-^ /, = 3<io'.

Cette condition n'est pas remplie; ou a

II— h-^ /.j— h — 36o"== h, h élant supposé très petit.

On adoptera alors pour l'angle ;r la valeur

Si 64, 621 ^3i 64 sont les erreurs respectivement commises sur les quatie mesures, l'erreur E commise sur X sera

En nommant m^ la valeur probable du carré de chacime des erreurs de mesure, la valeur probable du carré de E est

Elle est minima pour la valeur

et l'on doit prendre

La valeur probable du carré de l'erreur est donnée par l'expression (i i) quand on y suppose À = — ~- Elle est donc J

3/n2 indépendante, on doit le remarquer, de la valeur de h.

211. Supposons, pour donner un second exemple, que, d'une même station O, on ait observé quatre points A< , A2, A3, A^. On a mesuré, en les réduisant à l'horizon, les angles sous lesquels les distances A, Ao, A< A3, A, A,., A2A4 et A3 A., sont vues du point O, en désignant par /, , Lj, /g, Z^, /g les valeurs trouvées. On veut en déduire les valeurs les plus plausibles des angles x, j\ z formés par OA, avec les trois autres directions OAo, OA3, OA^.

On aurait, si les mesures étaient parfaites,

(12) X = II, y=h, s = /a, z — x = l,, z-y = h et, par conséquent,

Les équations (i3) ne sont pas satisfaites et, à cause des erreurs d'observation, on a

On prendra pourx la valeur

(l5) X = /, -r- Xi/(i-f- Ao//^.

Si e,, ^2. e.j. e, . ^5 sont les erreurs commises sur les quatre mesures, l'erreur commise sur X sera

Si m^ désigne la valeur probable du carré de chaque erreur de mesure e,, €■>, e^, 64, 65, la valeur probable de E- est

(17) m-{\ — 3Àj -h 3)J -h 2X1 — 'rAiX-j). Le minimum de cette expression correspond à

Nous adopterons donc, pour Tangle x^ la valeur

Elle s'accorde, on le voit en rem|)laçant h^ et h^ par leurs valeurs (i4); avec la solution obtenue (201) par une voie différente.

Le carré de l'erreur commise en adoptant l'expression (18) e>l |/?î2; elle est indépendante de h^ et de h^, par conséquent de l'exactitude des mesures.

On trouverait, par des calculs semblables,

5m* Les carrés des erreurs commises ajant pour valeurs probables — r—

et ^-— » les valeurs les plus plausibles des angles ^4 et l^ sont

U^ 4— - A, -H -/?2, L.;= lr,-\- g ^1 — g ^2-

212. Les valeurs probables des carrés des erreurs commises sont, dans tous les cas, indépendantes de l'accord plus ou moins parfait des observations. Les quantités désignées par ll^, h^^ ..., qui seraient nulles si les observations étaient parfaites, ne figurent pas dans l'évaluation de l'erreur à craindre.

Nous avons déjà (173) rencontré et expliqué ce paradoxe. Il n'est pas inutile d'j revenir.

Dans la détermination de l'erreur probable, la précision des observations a été supposée connue. Le facteur m- représente la valeur probable du carré de l'erreur commise sur chaque mesure.

En supposant ainsi l'habileté de l'observareur évaluée à l'avance, sans qu'il soit tenu compte dans cette appréciation des discordances révélées par la comparaison des mesures, il ne faut pas s étonner de ne pas voir figurer ces discordances dans le calcul de l'erreur à craindre.

On mesure, par exemple, les trois angles d'un triangle; on a vu déjà l'observateur à l'œuvre, il fait usage d'excellents instruments; on apprécie en conséquence la constante m- : l'erreur probable est o ,5o. La somme des angles obtenus sur|)asse cependant 180" de 12". L'observateur ne méritait pas la confiance accordée. La valeur de m^ était très |)robablement mal choisie. Mais, pour en adopter une autre, on manque de données suffisantes.

213. Les formules démontrées sont applicables à des observations qui ne sont pas encore faites; elles indiquent les calculs par lesquels les inconnues devront se déduire des granrleurs directement mesurées. Les valeurs probables des carrés des erreurs à craindre dépendent de la |)récision espérée pour les mesures qu'on va prendre. Le cas où cette précision est assez bien connue, a priori, pour que les résultats obtenus n'y puissent rien changer, quoi qu'il arrive, est tout à fait exceptionnel.

C'est à lui que se rapportent les formules.

21 4. On s'est placé quelquefois à un point de vue absolument opposé. La précision des mesures est supposée inconnue; la concordance plus on moins parfaite des observations est le seul renseignement d'après lequel on puisse l'apprécier.

Ce problème est le contraire du précédent. Nous supposions la précision connue a priori; le résultat plus ou moins heureux des

observations n'y pouvait rien changer; pour rendre cette hypothèse acceptable, nous supposions même que les observations ne fussent pas faites encore.

On suppose, au contraire, dan> le nouveau problème, la précision complètement inconnue. Il faut la calculer d'après les résultats, qui sont, cette ("ois, la seule donnée.

Gauss a fait reposer la solution de ce problème sur une formule très élégante, qui sei'a démont lée à la fin de ce Chapitre.

La formule est irréprochable; mais l'application est rarement permise.

Le problème nVst pas nettement posé.

Quelques exemples rendront la difliculté très claire.

Un a mesuré les trois angles d'un triangle; l'excès de leur somme sur deux angles droits peut-il faire connaître, indépendamment de tout autre renseignement, la valeur probable du carré de l'erreui- commise dans la mesure de chacun des angles?

Si l'on admet, comme il est vrai, qu'à chaque instrument manié par un observateur désigné correspond, objectivement, une valeur probable déterminée du carré de l'erreur et (pie, en donnant la somme des trois angles obtenus, on demande la valeur vraie de cette constante caractéristique de la précision, le problème est insoluble.

Une valeur vraisemblable est, évidemment, tout ce qu'il est permis d'espérer.

En réduisant le problème à ces termes très vagues, une lacune subsiste dans l'énoncé; elle doit enlever toute confiance dans le

résultat.

La connaissance de la valeur probable a priori de l'inconnue dont on veut délevn\\nvr a posteriori la valeur vraisemblable est un élément essentiel de la question; on ne donne sur lui aucune indication.

Les trois angles d'un triangle ont été mesurés par un observa-

leur très habile; il a fait usage d'un excellent instrument; chaque mesure a été prise trois fois; les résultats proposés sont les moyennes des trois observations. La somme des angles, après toutes ces précautions, surpasse i8o° de o",25.

Les mêmes angles sont mesurés par un débutant qui s'exerce; l'instrument qu'on lui a confié est médiocre. Chaque angle n'est mesuré qu'une fois^ les angles obtenus diffèrent des précédents de plusieurs secondes chacun, La somme des angles, pour ces secondes mesures, est exactement i8o".

Quels sont les résultats les plus dignes de confiance?

Les premiers, évidemment.

Les formules qui déduiront la précision des mesures de l'accord plus ou moins parfait des résultats ne peuvent manquer de donner l'avantage aux seconds.

Le cas, pourrait-on répondre, n'est pas celui qu'on a supposé. Les deux séries de mesures sont faites dans des conditions telles qu'avant d'en connaitie le résultat, sans donner la mesure numérique des deux précisions, on les propose comme très inégales. L énoncé du problème résolu par Gauss suppose, hu contraire, que l'on ne sache rien sur la précision des mesures.

Est-il possible, quand on combine des mesures, de ne rien savoir sur leur précision? Savoir, comme on l'admet, que toutes les valeurs de l'erreur probable sont a />/7'0/7 également vraisemblables serait un renseignement très précis qui, vraisemblablement, n'a dans aucun cas représenté la vérité.

Sans avoir étudié un instrument, le nom du fabricant, le prix dont on l'a pajé, la situation de l'observateur qui s'en sert, font que certaines évaluations de sa précision, sans être tenues pour impossibles, seraient accueillies avec étonnement. Cela suffit pour changer les conditions de l'énoncé.

21 o. La question appartient à la théorie de la probabilité des causes. Le désaccord entre les mesures prises est un fait observé. Les causes possibles, en nombre infini, sont la précision de chaque mesure. Quelle que soit cette précision, l'événement observé est possible. Le plus adroit peut avoir une défaillance; le plus maladroit peut, par un heureux hasard, obtenir de bons résultats : les résultats très inexacts peuvent se compenser fortuitement.

Plus la concordance est grande, assurément, plus il esL probable qu'elle a pour cause l'exactitude des mesures et que celle-ci est due à l'habileté de l'observateur.

La probabilité assij;née à chaque cause dépend (Ho) de deux facteurs : la probabilité que la cause donne à l'événement observé et la probabilité, a priori, pour que la cause ait ai^i.

On veut, d'après l'énoncé, comme on l'a fait trop souvent en

d'autres circonstances (123, 12-i, 130), se passer complètement de

la seconde donnée. C'est une faute contre les principes. La lacune

laissée dans l'énoncé sera forcément remplacée dans chaque solu-

f lion obtenue par une condition introduite arbitrairement.

216. Supposons, pour ("aire connaître le principe de la méthode adoptée, qu'on veuille déterminer la chance pour qu'une pièce de monnaie désignée retombe sur le côté face (juand on la jette en l'air.

La pièce est jetée [a (ois : elle a montré m fois face et n fois pile.

Soient p la probabilité inconnue quelle donne à l'arrivée de face, (i celle qu'elle donne à l'arrivée de pile.

L'événement le plus probable sur [ji épreuves est ul/> fois face. En égalant la valeur probable à la valeur vraie, nous aurons

\Lp = m.

La valeur vraisemblable de p serait donc — •

Le principe, appliqué à un petit nombres d'épreuves, donnerait des résultats inacceptables. Si, sur trois épreuves, la pièce a montré deux fois face, oserait-on proposer | comme valeur vraisemblable (le la probabilité qu'elle donne à l'arrivée de face?

Lorsque le nombre des épreuves est grand, le résultat cesse d'être choquant. La précision de la valeur proposée pour la probabilité p n'est pas pour cela mieux justifiée.

Une même pièce a été jetée looooo de fois : on a obtenu 500891 fois face; on en conclut que la pièce donne, vraiseinblablenienl, à la sortie de face, la probabilité

(19) * /> = 0,j0039i.

Aucune de ces six décimales ne mérite conliaiice.

La probabilité p a une valeur objective. A chaque pièce, d'après sa structure, correspond une valeur déterminée de p. Personne n'a pu croire, bien entendu, que cette valeur soit égale à (19); mais il n"est pas même très probable qu'elle soit plus grande que 0,50.

Supposons que, la pièce étant bien connue, la valeur exacte de p soit

c'est-à-dire qu'elle s'écaite de i précisément autant que la valeur (19) indiquée par le calcul, mais en sens inverse.

Cherchons quelle serait, dans cette hypothèse, la probabilité de l'événement observé.

Le nombre le plus probable des arrivées de face est

L'événement observé est l'arrivée de 500891 fois lace; l'écart est lySa.

La probabilité d'un écart égal à h est

■l\i.pq.

s/-l \XT. pq

on a

'i\J.pq j 00 000 La probabilité donnée par l'hypothèse à l'événement observé est

\/i-lxpq

celle que donne au même événement l'hypothèse la plus plausible pour laquelle il correspond à un écart nul est

/i \nipq Le rapport est

Le rapport des probabilités de deux causes également probables a priori est exactement celui des probabilités observées. La va-

leur (19) de p n'est donc pas quatre fois plus probable que la valeur (20), que nous avons choisie, on peut le dire, absolument contraire.

Reprenons la question générale

On a mesuré n ->r p grandeurs Z, . l,, /;,, ..., 4^,,. Elles sont liées par des équations rigoureuses à n inconnues x, y, z, ... En éliminant les inconnues, on obtient p équations nécessaires entre les n -h p grandeurs mesurées :

Les mesures n'étant pas parfaites, ces équations ne seront pas satisfaites : les premiers membres auront de petites valeurs — /i,, — /ia. •••. — fi/i qui seront exactement connues, puisque les mesures /, , /o, ..., l/i+p le sont.

Si l'on nomme e,, e^, ..., e„+p les erreurs commises sur ces mesures et qu'on en néglige les carrés, la fonction F,, qui est égale

à — A) et qui doit être nulle après les corrections, recevra un accroissement ^, ; on obtiendra ainsi p équations du premier

degré

/i,, I12, ..., Il,, étant des nombres connus dans chaque problème.

Le principe admis est celui-ci :

Il est permis, à titre d'approximation, d'égaler une fonction des premiers membres de (21), dont la valeur est exactement connue, à la valeur probable calculée avant l'épreuve.

Cette égalité, bien entendu, n'a jamais été proposée comme certaine : Valor verus, dit Gauss, prout fors errores obluiil, major minorve medii fieri potest.

Ces deux grandeurs, la valeur véritable et la valeur probable, que le hasard peut faire plus grandes ou plus petites l'une que

l'autre dans une proportion inconnue, sont égalées cependant pour former l'équation dont la solution est déduite.

La critique est rendue difficile. Quand on a dit : le second membre de l'équation prof)Osée peut être, suivant la décision du hasard, plus grand ou plus petit cjue le premier, on s'est mis en règle avec la rigueur : le lecteur averti sait qu'on n'y prétend pas. De quel droit reprocher une cause d'erreur nettement signalée?

Le résultat est donné comme une approximation; il est tout naturel, au contraire, de chercher quelle confiance mérite le principe sur lequel elle repose. Nous montrerons que, le principe étant admis, on peut en déduire, pour la précision, des valeurs

très différentes et dont aucune, par conséquent, ne mérite confiance.

Formons un poljnome

(ri) XiA'ï -i-XoAIh-. . .-H Xph^-Jr-'kp^ihih^-h. . .,

homogène et du second degré par rapport aux seconds membres, numériquement connus, des équations (21). Quels que soient les coefficients choisis. À, , A2, ••., l'expression (22) est connue.

On peut en déterminer la valeur probable, avant les épreuves faites, en fonction de la valeur probable m^ du carré de l'erreur commise sur chaque mesure.

A(, Ao, . . . , A^ sont exprimés par les équations (21) en fonction des erreurs e,, Co, ..., e,ij^p. Le polynôme (22) est donc une fonction connue des erreurs commises dans les mesures; on en peut former la valeur probable en remarquant que celle de ej est m- et que celle de e/e/ est nulle, quels que soient i et i' . La valeur probable du polynôme (22) sera donc de la forme Gm-, G étant connu. En l'égalant à sa valeur vraie, puisque tel est le principe accepté, on obtiendra une valeur de m- dans laquelle figureront les facteurs arbitraires désignés par k.

Il ne sera pas inutile de donner une application

On a mesuré les trois angles d'un triangle; les erreurs com- I mises e,, e-^-, e^ sont inconnues, mais leur somme est exacte-

ment connue ; on a

ei-h 62-^ 63= /îi,

A, étant l'excès de la somme des angles mesurés sur deux andes droits. °

On en déduit

II] = e\^ e\^ el -^ ., g^ ^^ _^ ,^ ^^ ^^ _i_ .^ ^^ ^^ ^

Si m2 est la valeur probable du carré de chacune des erreurs e,, e-i, e^, la valeur probable du second membre est 3/;?^ et l'on écrira, en égalant cette valeur probable à La valeur vraie,

h- = 5 //i- ; par conséquent,

Comme il n'j a qu'une seule équation entre les erreurs, il n y a pas, dans ce cas, de choix ù Caire entre les combinaisons.

219. Reprenons le problème résolu (203). On a mesuré cinq angles /, , L, /g, /,, 4, entre lesquels les conditions géométri(jues du problème ilonnenl les rebitions nécessaires

li— l-i— Aj= o.

Les mesures étant im|)arl'aites, on a trouvé

H h— h= lu_

En désignant les erreurs réellement commises par ^,, e. g., e. o on a donc

Quels que soient les facteurs À,, Ao, A3, le trinôme

(2û) X, /«jf -r- X2//I ^ Xs/tlAj

est connu.

Ce trinôme est une fonction homogène du second degré des erreurs e,, eo, ^3, e^, e,,, et, si l'on nomme m^ la valeur probable du carré de Tune de ces erreurs, celle du produit de deux d'entre

elles étant nulle, on trouvera pour valeur probable de l'expression (23), calculée avant les mesures prises,

En égalant cette valeur probable à la valeur vraie, on aura

(-^^ """= 3Xf-^3À, + X:. -

}., , Â2, X3 sont arbitraires.

Si l'on voulait choisir entre les valeurs en nombre infini représentées par la formule (24), '1 faudrait chercher la valeur probable du carré de la difTérence des deux membres et disposer de X, , Ao, A3 de manière à la rendre minima.

Mais la formule (24)5 ^1^" peut évidemment donner des valeurs (le m'^ très inégales, reste, quels que soient les facteurs A,, X^,).3, la conséquence de l'égalité admise entre la valeur vraie d'une grandeur et la valeur probable.

220. Il est aisé de prouver par un exemple combien sont grandes les erreurs à craindre en égalant les valeurs vraies aux valeurs probables.

Un observateur mesure les trois angles d'un triangle; la probabilité d'une erreur comprise entre z et z-\-clz est, pour lui, — e~"^^'dz. Quelle est la probabilité d'une erreur j^ sur la somme

des trois angles?

On peut dire :

La valeur probable du carré de Terreur commise sur chaque ani^le est —7-:

La valenr probable du carré de l'erreur commise sur la somme des trois angles est y-^-

Si donc on représente la probabilité d'une erreur j^ sui- la somme des trois angles par ^e~*"^', il faudra supposer

y/TC

■ik'-

La prohabilité d'une erreur plus petite que a sur la somme des trois angles est donc

La démonstration peut laisser un doute. En acceptant la loi représentée par e"^°=^' pour les prohabilités d'erreurs partielles sur chaque angle, est-il permis d'en conclure une expression de même forme pour l'erreur totale? L'assertion n'est pas évidente; on peu! la démontrer.

Soient X, y, z les erreurs commises sur les trois angles d'un triangle; posons

a- -t-jK -^ s = a.

La probabilité du concours des trois erreurs ("tait, a priori,

/,■■' e-*^P' dx dy dz ;

«Ile est le produit de — —e'^""^" par l'élément de volume dx dydz,

en considérant X, j^, c comme des coordonnées rectanguhiires. La probabilité pour que, x -\~ y y- z étant compris entre a et

a + â?a, p le soit entre p et p y- d-j sera le [jroduit de ^-^e"^"""^'

par le volume compris entre les deux sphères qui correspondent aux rayons p et p -h <ip et les plans dont les équations sont

a" -H_7 -i- 2 = a, x-^y-\-z^=^y. — dt.

■Ce volume est

, . iTTO d'j d-x

La probabilité a priori pour que, la somme des erreurs étant comprise entre a et 0.-^(1%^ celle de leurs carrés le soit entre p^

et (p -h d^)- est égale à

, ,. 'i.k^ e-^'P'o do d%

La probabilité pour que la somme des trois erreurs soit comprise entre a et a + ofa est la somme des valeurs de (26) pour toutes les valeurs possibles de p qui sont comprises entre — et 00.

La probabilité pour que la somme des trois erreurs soit conqjrise entre a et a -+- <ia est donc

•i/r^ d% C^ ,.^, , (27) —=— \ e-'^-9'pclp;

on a

?dp =

La

for mu

le (2

se réduit à k

précisément celle que nous avions admise.

221. Supposons, pour entrer au détail, qu'en mesurant les trois angles d'un trianj^le l'erreur probable sur chaque mesure soit égale à 2", la valeur correspondante de k est — — •

■>. sJt.

La probabilité d'une erreur plus petite que i" sur la somme des trois angles est, dans ce cas.

ID

L'événement n'a rien d'invraiseniblable.

S'il arrive cependant qu'en mesurant les trois angles d'un triangle, on trouve une somme d'erreurs égale à i", la théorie adoptée donnera, pour déterminer la valeur vraisemblable du carré de l'erieur sur chaque mesure, la relation acceptée

par conséquent.

ce qui correspond à une erreur prol)al)le de chaque mesure

Lors(|ue, dans une seule épreuve, l'erreur coriimise sur la somme des angles d'un triangle est égale à i", est-il possible de proposer avec confiance o", - comme la valeur vraisemhiable de l'erreur probable sur chaque observation?

La valeur probable, pour l'observateur qui a mesuré les angles, est un nombre parfaitement déterminé; en la sup|)osant égale à 2", c'est-à-dire triple de la solution |)roposée, la probabilité d'une erreur moindre que celle qui s'esl produite serait 0,1 5.

La valeur o", - adoptée pour l'erreur probable donnerait à l'événement observé, c esL-à-dire à une somme d'erreurs moindre que 1", une probabilité plus petite que r, égale à

La probabilité pour qu'en ado|)tanl o". 7 pour valeur j)rol);d)le de l'erreur on s'écarte |)eu de la vérité est, on le voit, fort éloignée de la certitude.

222. Pour explicpier plus clairement les principes théoriques de la méthode des moindres carrés, nous n'avons tenu aucun compte de la longueur des calculs. On peut, dans presque tous les cas, les abiéger considérablement.

Les corrections prescrites par la méthode exposée (210) pour les grandeurs directement mesurées /,, /j. ..., InjrP satisfont à une condition remarquable qui peut servir de base à une détermination plus rapide des inconnues.

La somme des carrés des corrections faites aux mesures est un minimum.

Reprenons pour le démontrer la question déjà résolue (210), en supposant toujours, pour éviter la longueur des formules, trois inconnues seulement, entre lesquelles on a six équations.

En nommant /, , /,, ...,/o 'es grandeurs mesurées et e,, e2,...,^o les erreurs très petites commises dans leur évaluation, les condi-

lions du problème donneront trois éqnations du premier degré entre les six erreurs

I Pi ei -t- P2 éi -+- P3 63 + P; ev -H P5 63 -

(•28) { Qie^-^ q,e^^ q,es+ Q,e^-i- q,e,-

(R, ei-h R^go-^- R3<?.-5-l- R^e-v-H Rjej

Nous allons chercher à déterminer entre les solutions de ces équations le système pour lequel la somme

est minima. Nous constaterons l'identité des corrections ainsi déterminées avec celles qui résultent des conditions adoptées (210).

Pour rendre la somme (29) minima, il faut égaler sa différentielle à zéro en même temps que celle des expressions (28).

Nous aurons ainsi les équations

(30) eide^-h e^de^-h e^dez-h ei^dei^-h- e^de^^ e^ de^,— o; (P) dei -+- P, de-2 -+- Pi de:^ -t- P4 de^^ -+- V„ de-, + P,; de^, — o,

(3 1) Qi des, -i- Q2 de^_ + Q;, de^ -f- Q4. de^^ -t- Q5 de-^ + Qg de^, — o,

' R| dei -t- R2 det-^ R3 de^-^ Ri de,^-^ R.5 de^-t- Rg de^, = o.

On ajoutera, conformément à la méthode de i-iagran^e, ces (juatre équations, après avoir multiplié trois d'entre elles par des facteurs [jL|, (j.^- H"-:)? et l'on égalera à zéro les coefficients des six difiérenlielles. Les équations

^6 H- \M Pr, -+- \i-i Qg -h ^^3 Re = o,

jointes aux trois é(piations (28), détermineront les corrections e^^ 6-2, 63, e.r,, e^, Ce et 'es multiplicateurs uij, '^21 [-"-s-

Eri ajoutant les équations (32) après les avoir multipliées par les coefficients de chacune des inconnues [i.,, txo, tj.3, et en ayant égard aux relations (28), on formera les équations

, JJLlfP?) +f^2^P,Qi)+,j,3(P,R,) = A,,

(33) I .ai(PiQi)+[Ji2(Q!) +[a3(R,Q,) = /;,,

ei-+-

I-ii

[Jl;

= Qi

,Ri

IQ2

ez^

Pa

tQ3

(;H\P. \l. — COMIUNAISON DKS OBSKRV V TIONS. 279

OÙ (P^^\ (1^1 Qi •- ••• l'eprésentenl les sonimes P| +P^ -PI,

PiQi— P:Qo-^ P3Q3,

Les f"qiialions 1^33) tVroiil connaître u.,, Uo, a.,. On déduira ensuite de (Sa) e(, f;., t?:;

Les corrections ainsi obtenues sont identiques à celles qui ont été déduites (209) du Calcul des probabilités. Reprenons, en et-Fet, les équations (-) qui font connaître X,, Ao, At ; elles ne diffèrent de (33) que par le changement des termes indépendants des inconr)ues.

Ciherchons par les d«Mix méthodes la correction désignée |)ar C) .

Les valeurs de À,, Ao? A:! étant données [)ar les ('(juations

i A, (P?) + À, (Pi Q, ; -n l, (P, R,) = - P, .

(34) >MiPiQi)->^-2tQf) --X3(Q,H,)=~Q,,

(À,(R,P,)--X,(R,Q,)^X3(Rf) =- R,,

la coirection prescrite est

La condition dn minimum donne

c'i = — a, P; — u,, Q, — IJ.J R|.

En ajoutant les équations (33) multipliées par A,, Ao, Au et les é(|uations (9) multipliées par 'jL|, Uo, 'JL:,, on constate l'identité des deux sommes.

223. Le principe des moindres carrés étant admis, on peut s'en servir pour obtenir les meilleures valeurs des inconnues, sans s'astreindi'e an calcul préalable des erreurs commises sur les grandeurs directement déterminées.

Les équations imposées aux inconnues étant

cpi(.r, r, ;;, .. .) = /,, cçoC/r, _/. z, ... 1 -— /2,

'^n-h,>(.r, y, -, . ..) = In-^p,

28o CALCUL DES PROBABILITÉS.

et leur nombre n -\- p surpassant le nombre n des inconnues, on devra d'abord déterminer des valeurs approchées X, Y, Z, ... de

x^ y^ z pour lesquelles ils subsistera entre les deux membres

des équations (35) des difFérences très petiles a,, aj, ..., 'J-u+p- Si l'on nomme x^^ fi, z^^ ... les corrections (|u'il faut faire à X, Y,

Z, . . . , et e, , 62, • • • , Cn^p celles de /, , /a 4+/>, <>» aura, en

négligeant les carrés de ces correclions, des équations nécessaires de la forme

P, .ri-uP.r,— P3Si-f-...H-a, = Cj, Q,.ri-4- Q-?ji+ Qs^i-i-. . .-H a.2= 62 Ht r, -1- R, r, ^ R3 G, -h . . . -I- a.-, = ('a,

^2^, , Qi.^i-+- Q-?.ri + Q3^i-^..--^a, = 62,

Pour rendre minima la somme

ef -H e| ^- e| -h. . ., ■

il faut, a|)rès l'avoir formée, égaler à zéro les dérivées par l'apport à .r, , jKi, G,, . . . , et l'on aura ainsi, entre les inconnues véritables de la question,

Pi(P,^,)^Qi(Qi^i)-t-Ri(Ria7i)+...+ P,a,-+-Q,a2 + ...= o, P2(Pia"i)-+- QaCQia^i) -h HaCRi^i) -H. . .-H Pîai-f- Qaao^-. ..= o, P3(P,a7,) + Q3(Qi^i)+ R3(Ri^i)+...+ P3a,-^g3a2^...= o,

(P,a;(), (Q,;ri), ... désignant l'ensemble des termes qui, dans les équations (36), précèdent a,, a^, ... On est conduit à la règle suivante :

On ajoutera les premiers membres des équations du premier degré, dont les seconds membres sont les corrections à faire subir aux grandeurs directement mesurées, après les avoir multipliées successivement par le coefficient de chaque inconnue.

Les équations ainsi formées, en nombre égal à celui des inconnues, donneront la solution du problème.

224. Supposons que cinq points A,, Ao, A3, A-,, Ag aient été visés d'une même station O. Sur les dix angles que forment deux à deux les lignes de visée, on en a mesuré huit. En nommant ^Ti , X2, ^3) Xi, les angles de la direction OA avec les quatre autres, ces angles déterminant tous les autr(!s, les mesures choisies sont

telles qu'en nommant /,. /^. /:,, /j. A;. /«. /: , U leurs valeurs exactes, on a

Les relations entre les angles mesurés doivent èlie

Ces expressions ne seront pas nulles, mais auront des valeurs très petites. Nommons ces quatre valeurs a,, a^, a.j, a.,; elles donneront, indépendammeni de tout calcul, une première idée des erreurs commises.

Pour appliquer la méthode îles moindi^es carrés, il est intildede former les équations (5); nous ajouterons les équations (H;) après avoir multiplié chacune par le coei'licient de l'une des inconnues successivement choi>>ies. JNOus aurons ainsi

3,r, ~ .r-i - r-i — /- — If, — /s.

3 .r.> — x^ — .Ti — /^ -t- /j — /;. 3 a?, — T-^ — X\ — I \ — I \ — /(;, 3.5"i - .r;j — T-2, — I \-^ /.i -^ l\-

On en déduira les valeurs des inconnues

^._ Z/,^ i/., _ J-/,_ -L/,+ 4/.+ 4/.- 4/: --/h, " ri ^^ -'Il -j •*-! - * .. Il '^ Il

^.^ ' /, ^Ll,^ 1/3^4/,- '/5+ -^7/.+ 4/:- ;^/h. j" ,5'- l3 ' 13 ^ 3 " i5 1) 13

225. Lorsque les corrections >eront calculées, on devra chercher, en tenant compte des réserves faites, la valeur prohable du carré de l'erreur à ciaindre pour chaque inconnue.

Gauss a donné pour ce calcul, comme pour tous les détails de cette théorie, une méthode devenue classique de laquelle résulte

une démonstration du principe des moindres carrés très différente de celle que nous avons adoptée. Nous la reproduisons textuellement.

Problème. — Désignons par v^ v\ v" , . . . L's fonctions linéaires suivantes des indéterminées x, y, z. ... :

V = a .r -t- by -i- c 3 -i- . . . -i- /,

Parmi tous les systèmes des coefficients x, x', x", ... qui donnent identiquement

k étant indépendant de x, yy z^ . . ., trouver celui pour lequel

X- -h x'- -î- x"- +. . . est minimum

Posons

/' av -+- a'p'-H a" v" ■ \ hv -^ b' v' ^ b' v" ■

cv -I- C P -H C P

ç, r,, V seront des fonctions linéaires dex,y, c, et l'on aura

OU

/ ; = x^a- -^ y^ab -^ z^ac -^. . .^^aly \ T, = x^ab — y-^l)'- -h zy:bc -h.. .^I.bl,

':, = x'Lac -^ y'Lbc -h z:Lc^ -h. . .-t- Se/,

S rt- = a-^ a'- H- a"- -h .

et de même pour les autres S.

Le nombre des quantités ;, r,, ^, . . . est égal au nombre nr des \ inconnues x, r, :;, ...; on pourra donc obtenir, par élimination,

une équalioii de la forme suivante (^')

.r = A — (ax) ; — (aS t r, -4- (■ x--' I ^ — . . . ,

qui sera satisfaite idenlii|uenient lorst|n'on remplacera c, r,, 't par leurs valeurs (G3). l*ar eonsecpient, si Ion pose

i a (ai » — h I ai I ■^- c i a-; ' — . . . = a.

(Gt) • rt' i aa) — 6' (ïj) -^ c' (av) — . . . = a',

' rt"(aa I — 6'i a3) — c'i ay) ^ . . . = a ,

on aur;i identiquement

(Gs) ai' ^ a'c' — ï'i' — . . . = .î" — A .

Cette équ.ilioM montre que. parmi les difTeM-ents svslèmes de coefficients x. x'. x" on doit compter le svstème

On aura d'ailleurs, pour un systt'nie (pielconque.

(x — a)f — 1 /.' — a' ic' — {•/.' — a")t" — . . . = A — k, el celle équation, étant identique, rutraîne les suivantes :

(y. — y.) rt — I y,' — a' u7 ' — /. " — a " 1 a — . . . = o. {■A — 7.)ù —(/.'— x' <b — < y. — a ' 1 //' — . . . = o,

Ajoutons ces équations apiès les avoir multipliées, respectivement, par (ax), (a3), [xy), ... nous aurons, en vertu du svstème (Gij,

c esl-à-dire

(•) On verra plus loin la raison qui a conduit à désigner les coefficient- de celte formule par la notation (aa), (ajl).

par conséquenl, la somme

y,"i — yj'i -f

aura une valeur minimiini, lorsque l'on aura

D'ailleurs, celle valeur minimum s'obliendra de la manière suivante.

L'équation (G5) montre que l'on a

Multiplions ces équations, respectivement, par (aa"), (a^), (ay), ..., et ajoutons; en a^ant égard aux relations (G^), on trouvera

a--}- a'2+ a"- — . . . . = (aa).

Lorsque les observations auront donné des équations approximatives

il faudra, pour déterminer l'inconnue x, choisir une combinaison de la forme suivante

telle que l'inconnue x acquière un coefficient égal à i et que les autres inconnues se trouvent éliminées.

Le poids de cette détermination sera

On obtiendra la délerminaiion la plus convenable en prenant

alors X aura la valeur A. On obtiendrait évidemment la même valeur sans connaître les multiplicateurs a, a', a", ..., en etïec-

tuanl rélimiiiation sur les éc|uations

; = o, ';=<), ^ = o, . . .; le poids de cette déletinination sera

(aa ; '

et l'erreur moyenne à craindre

m \/pi xa j = /n \^p' (aa) = m!' sj p" (xx) = ...

Une max'clie analoj^iie conduirait aux valeurs les plus conve-

nahles des autres inconnues i'. c (jui seront celles (jue l'on

obtiendrait en eilectuant ['("liniinalioii sur les éciuations

Si nous désignons par ii la somme

ou. ce qui revient au même,

on aura évidemment

'/o du „ c/o

«,/■ av "-

par consé(|uent, les valeurs des inconnues, déduites de la combinaison la plus convenable, et que nous pouvons appeler les valeurs les plus plausibles, sont précisément celles qui donnent à Q une valeur minimum. Or V — L représente la dilFérence entre la valeur observée et la valeur calculée; donc les valeurs les plus plausibles des inconnues sont celles (|ui rendent minimum la

somme des carrés des différences entre les valeurs calculées et observées des quantités V, V, V", . . ., ces carrés étant respectivement multipliés par le poids des observations. Ces principes ont été depuis longtemps établis |)ar d'autres considérations {Theon'a motus corporum cœtestiuni).

Si Ton veut assigner la précision relative de chacune des déler-

minalioiJS. il faut déduire des équations (G3) les valeurs de x, y, s, . . ., qui se présenleronl sous la forme suivante :

(z = C -H('Ya)f + (Y.3)-n ^- (ty) ?+••••

Les valeurs les plus plausibles des inconnues x^y^ z, ... seront A, B, C, ... Les poids de ces déterminations seront

û^)' ^' îrô' "*'

et les erreurs moyennes à craindre

Pour ,r m \/p(aa) = >n'\/p' { xa) = . , .,

Pour jK ni^pC^'^) — m'\/p' ('i'^) =. . .,

Pour z m s/ p(YY) = '" V/^'(TT) =••••>

ce qui s'accorde avec les résultats obtenus antérieurement (Theoria motus corporum cœlestium).

Le cas où il n'y a qu'une seule inconnue est le plus fréquent et le |)lus simple de tous. On a alors

\ = iT, \ ' = a?, V"=a', ...;

il sera utile d'en diie quelcpies mots. On aura

/ = — Ls/p, /' = — L' ^p', l" = — L'V/,

et, par conséquent,

d'où

p—p ^ p — ... Ainsi, si, par plusieurs observations qui n'ont pas la même pré-

cision el dont les poids respectifs soni/>, //, //. . . . , on m trouvé, pour une même quantité, une première valeur L'. une deuxième L', une troisième L", . . . , la valeur la plus plausible sera

et le poids de celte détermination sera

Si toutes les observations sont éi^alement plausibles, la valeur la plus probable sera

c'est-à-dire la movenne arillimélicpie entre les valeurs observées ; en prenant pour unité le poids d'une observation isolée, le poids de la movenne sera m.

226. Quoicpie les formules proposées |)0ur exprimer la valeur probable du carré de l'erreur à craindre, à quelrpie point de vue qu'on se place pour les obtenir, méritent peu de confiance, il n'est pas inutile de les défendre contre un reproche injustement adressé.

Bienavmé, auteur de l'objection, a pro[]Osé « une modification profonde » ; il parle de la « défectuosité du calcul ordinaire ». Le défaut qu'il signale lui paraît si simple, « qu'aux premiers mots tout le monde en reconnaîtra l'existence ». — « L'erreur consiste, dit-il, à calculer la probabilité d'une erreur commise comme si elle était la seule. Un des premiers principes de la théorie des probabilités est que, quand plusieurs événements arrivent

simultanénient, la probabilité de leur concours est le |)roduit des probabilités de chacun, de sorte que la probabilité de ce concours est inférieure à la probabilité de chaque événement pris à part; elle est d'autant plus petite qu'il y a plus d'événements. »

« Évidemment, ajoute Bienajmé, il en est de même des erreurs de plusieurs inconnues. La probabilité que ces erreurs resteront toutes à la lois dans certaines limites ne peut être que le produit

des probabilités séparées pour que chacune ne s'écarte pas de ses limites propres et, par conséquent, cette probabilité du concours des erreurs de grandeur limitée doit être notablement inférieure à la probabilité des limites de chaque errenr considérée isolément, quelles que puissent être les autres. »

L'assertion est évidente; mais le tort est d'accuser les auteurs de la théorie et des applications qu'on en a faites de l'avoir ignorée ou oubliée.

Quand on a calculé une inconnue, il importe de savoir quelle confiance mérite le résidtal. Les formules de Gauss répondent plus ou moins rigoureusement ;'i cette question. Si une seconde inconnue est calculée, le même problème sera résolu pour elle.

Si l'on connaît les probabilités pour que les erreurs commises sur deux angles soient plus petites que o'^, lo, on pourra, les deux résultats n'étant pas contestés, chercher la probabilité pour que les deux épreuves soient toutes deux plus petites que o", lo; l'intérêt de cet autre problème sera plus ou moins grand, mais c'est une étrange prétention d'accuser d^erreur ceux qui n ont pas désiré le résoudre.

Prenons un exem[)le.

On veut connaître un angle A. Cet angle fait partie d'un triangle ABC. On mesure les trois angles A, B, C et l'on prend pour A la valeur

Si ni- est la valeur probable du carré de l'erreur à craindre dans la mesure d'un angle, le carré de l'erreur à craindre en adoptant l'expression (38) est (199) l'n'-.

L'objection consiste à dire : Sur les tleux angles B el C vous avez des erreurs à craindre ; elles doivent entrer en compte; elles ont leur part nécessaire dans l'évaluation du mérite de la solution. Cela est vrai si le problème est de résoudre le triangle; mais, si le calcul est entrepris pour déterminer Tangle A, on n'aura nul souci des deux autres.

Le triangle a trois côtés; on peut y inscrire un cercle, ou le circonscrire, déterminer la surface, calculer les bissectrices, etc., et

résoudre cent problèmes difFérents pour chacun desquels, puisque le triangle est imparfaitement connu, une erreur sera à craindre. Cherchera-t-on la probabililé pour que toutes ces erreurs soient inférieures à des limiies données? Si persuadé qu'on soit ((u'il faut le faire, le nombre des grandeurs qui dépendent du triangle étant infini, d faudra s'arrêter ; où commencera la faute commise?

Ln exemple réduira l'objection à sa véritable valeur.

On construit une carte géographique. Les villes, villages et bourgades y sont inscrits par milliers. On étudie l'un des points

principaux et l'on cherche l'erreur probable à craindre sur chacune de ses coordonnées géographiques. Les calculs sont irréprochables ; l'auteur de l'objection, sans y contredire, signale une faute très grave. Votre carte, dit-il, contient mille déterminations ; \\ faliait, en vertu à' un principe dont la vérité frappera tout le monde, faire poui- les mille points mar([u('"s le calcul exécuté pour un seul et multiplier les mille probabilit("s.

Les erreurs n'étant pas indépendantes, la solution aurait le mérite d'une difficulté vaincue, mais elle condamnerait la carte la plus admirée d'autant i)lus sévèrement qu'elle serait plus riche de détails. Comment espérer que le produit de mille probabilités ne soit pas très petit?

Le produit étant supposé connu, on accueillerait certainement comme un grand progrès la recherche isolée de cha(|ue facteur. C'est elle seulement qui peut intéresser.

227. Nous terminerons ce Chapitre par la démonstration d'un élégant théorème de Gauss, annoncé (211) et dont les c-onséqiiences relatives à la détermination de la précision d'un svstème d'observations ne me |)araissent pas acce|)tables.

On a mesuré directement n + /y grandeurs. Les mesures inspirent la même confiance ; mais la valeur probable //?- du carré de l'erreur commise sur Tune d\dles est rt />/vo/7' complètement inconnue. Ces /ï -I- /> grandeurs mesurées sont liées par des équations, que renoncé du problème fait connaître, à n grandeurs inconnues. La méthode des moindres carrés détermine ces inconnues par la condition que les corrections sur les grandeurs directement mesurées, qui rendent les équations compatibles, aient une somme de carrés minima.

2 go

Les calculs font connaître exactement cette somme de carrés, plus petite par l'énoncé même de la condition imposée, que la somme des carrés des erreurs réellement commises.

i.e théorème de Gauss se compose de deux parties :

La somme des carrés des corrections prescrites par la mélliode des moindres carrés est une fonction homogène du second degré, parfailemenl déterminée, des erreurs réellement commises.

En désignant par />^- la valeur probable, a priori, du carré de l'erreur commise sur une observation, la valeur probable de In fonction qui représente la somme des carrés des corrections prescrites par la méthode, et par conséquent la valeur probable de cette somme de carrés dont la valeur numérique est connue, est égale à j>in- .

jNous allons démontrer ces deux théorèmes, sans pouvoir accepter qu"il soit permis ensuite d'égaler la valeur vraie de la somme des carrés des corrections à la valeur probable et d'en conclure pour valeur probable du carré de l'une des erreurs d'observations

e,, Co, ..., en^p é'iant les corrections faites aux grandeurs mesurées et le dénominateur /? étant l'excès du nombre /i -1- /> des mesures prises sur le nombre ii des inconnues qu'on en a déduites.

Non seulement la somme des carrés des coriections, mais chaque correction en particulier peut s'exprimer en fonction des erreurs réellement commises. Si ces erreurs, en elVet, sont connues, les équations auxquelles les inconnues satisfont, et qui

deviennent incompatibles, sont parfaitement déterminées; elles s'accorderaient si l'on ajoutait à chaque grandeur l'erreur commise en la mesurant, mais elles peuvent s'accorder d'une infinité de manières. Les corrections véritables étant inconnues, on rend la somme des carrés minima. Le calcul à faire pour cela est parfaitement déterminé, et le résultai ne peut contenir, outre le^ données de la question et les grandeurs mesurées, que les erreurs réellement commises.

La méthode exposée (207) permet de calculer cette fonction, dont l'existence est évidente a priori.

Soient

Pie,+ PoCo-t-.

Qi6'i-H Q,eo-H.

•+ Q/;-f-pe,,+;, — a,,

les éqnalions qui lient les erreurs possibles e^, e.^, . . . , Cn+p aux évaluations des grandeurs /, , /,, ..., /„^^, douta,, a,, ..., a^ sont des fonctions numériquement connues et très petites, j3uisqu'elles seraient rigoureusement nulles si les mesures étaient exactes. Les corrections e,, go, ..., Cn+p, prescrites par la méthode des moindres carrés, sont des fonctions de a, , ao, ... y.p que la méthode fait connaître. La somme de leurs carrés est une fonction homogène du second degré de a,, ao, . . . , a^. Mais les équations (Sp) sont satisfaites par tous les systèmes de corrections compatibles avec les données du problème; elles le sont donc par les corrections égales aux erreurs véritablement commises, et, en remplaçant a,, ao, . . . , -j.p par leurs valeurs données par (iJg) en fonction des erreurs véritables £,, So, . . . ,

t„^p^ on aura exprimé la somme des carrés des corrections en fonction de ces erreurs véritablement commises qui restent inconnues.

Pour obtenir les corrections prescrites par la méthode des moindres carrés, il faut rendre mininia la somme

adjoindre, par conséquent, à l'équalion

eidey^ e^_ de^ + ...-(- e,t+,,den+i, = o

les p équations obtenues en difiérentiant le système {'ig).

On devra, conformément à la théorie des maxima et minima, ajouter ces équations après les avoir multipliée.-^ par des facteurs indéterminés, et écrire le système

<?l-^ [^lPl-4- ÎJt2Ql-+-...-H ,'Jt/;T, = O,

e-i -f- rji, P, -u u. Q; -I- ... -h [Xj^T, = o.

^n+p -r- [J-i P/i-i-yj -i- [J.J Q/J+/; -r- . . . -T- '^p T,i^fj := O ;

les facteurs [ji,, [Xo, \t-p et les inconnues e,, eo, . . . , e„+p se

déduiront de ces n -{- p équations adjointes aux/? équations (89). Pour obtenir les facteurs ji.,, uo, ..., [x^, ajoutons les équations (4o), après les avoir multipliées par P,, Po, • ■ • , puis par Q,, Q2, . . . , et ainsi de suite, nous aurons

a,-+-[JL,(P2) +[jL,(PQ)+...+ ,a/.(P,T) = o,

iJL,(TP) +,a,(TQ)+...-+-iJi/.(T2)

/p2\ (PQ), ... représentant la somme des carrés des valeurs

deP'^ deP,Q,, ...

Ajoutons les équations (40), après les avoir multipliées par e,, Ci, . . ., e«+j,, nous aurons

Se? -i- [J-iXi-t- HiOii-h. . .-h V-p'i-]>= o,

et cette équation fera connaître Sej, exprimé, conmie nous l'avions annoncé, en fonction de a,, ao, . . . , rt« qui sont eux-mêmes des fonctions connues d"un système quelconque de corrections possibles et par conséquent, en particulier, des erreurs réellement commises.

228. Il nous reste à chercher la valeur probable de l'expression

(42) [^la,— ;j.2a2-l-...-H [a;;a/,.

Si £,, So, ... £«+p sont les erreurs réellement commises, la valeur probable de é\ est, quel que soit «, la quantité inconnue mqui représente la précision des observations, et, les mesures étant indépendantes, la valeur probable de £,, £/■, quels que soient iet«% est égale à zéro.

La valeur probable de (42) est donc le produit par m- de la somme des coefficients des carrés de £|, So? • • • > e«+/j-

En substituant aux a dans la somme (4^) leurs valeurs en fonction des £, données par le système (39), l'expression devient, en ayant égard aux équations (40),

(43) £ie, -h £-262+. • --^ '«^«;

Cl, comme les corrections e sont des fonctions linéaires des u. et des a, par conséquent des s, on voit que la somme des coeffi-

cients des carrés e^^ t-^i • • • ^ ^/i+p dans (42) est égale à

det (le., (len+i>

dii ' c/£, ■ ■ ■ (/tn + p

c'est-à-dire, d'après le système (39), égale, an signe près, à

ri -r h <^'i -. r-. . .-+- Il - —

d^i (/Zi (/zi

' - dz, ' ^- dz. ' -y^ 'dz.

On a, en lemarqnant que les £ satisfont au svslènie (Sg) et fjue les |jL sont des fonctions linéaires des a,

(l'M d'il dui d'il

on en déduit les équations

rtîi dt^ dx-i ^ d'j.,,

«£•2 d'j-i - dj-i ' en.,, ' '

d\J.\ _ d\J^ ., d'il d'il

La somme des premiers membres est donc égale à

c'est-à-dire à l'unité; car cette expression (44) 6st précisément le résultat de la substitution dans la valeur de jjl, déduite de (4o), des coelficients de u, aux termes tout connus ai, ao, • • • , a^.

La première colonne du Tableau est égale à l'unité.

Tl en est de même de toutes les autres, et la somme est égale kp.

Celle élégante démonstration a été donnée par M. Gnvou.

Lors donc que l'on résont un problème par la méthode des moindres carrés, n -{- p mesures ayant été prises et le carré de l'erreur à craindre sur chacune d'elles étant m^, la valeur probable de la somme des carrés des erreurs réellement commises est

mais la valeur probable, nécessairement plus petite, de la somme des carrés des corrections indiquées par la méthode comme les plus plausibles est seulement/?An-.

229. Reprenons, pour donner un exemple, le problème résolu (214). A, , A2, A3, A4 étant quatre points observés du point O, et les angles sous lesquels A, Ao, A, A3, A, A4, A4 A3 et AiAo sont vus du point O étant /, , l.,. /s, /..,, L^, en posant

a< et ao étant très petits, les corrections à faire aux angles mesurés sont

La somme de leurs carrés est

(45) 8*^^^' "^ ^^^ — 'laïaa).

On a, en nommant £,, £0, £3, £-,, £5 les erreurs réellement commises,

ai = Ej. -+- £1 — £3,

3t2= îô-^- £2— Î3-

La valeur probable de a^ est dm'-; celle de a!;, 3m- et celle de

a, ao, m- : la valeur probable de (45) 6Sl donc

c'est-à-dire, conformément au théorème de Gauss, le produit de m- par l'excès 5 — .3 du nomi)re des angles mesurés sur celui des angles inconnus réellement distincts.

En égalarU cette somme a/w- à la somme des carrés des corrections prescrites parles formules pour les huit angles directement mesurés, la valeur ainsi obtenue pour m- ne peut nullement être acceptée pour mesure certaine ou vraisemblable de l'erreur à craindre dans les observation*s.

On peut affirmer seulement, et c'est là le point important, que, si la somme des carrés des corrections est petite, la probabilité est grande pour que les observations aient été bien faites.

230. Indépendamment de l'incertitude du principe sur lequel la démonstration repose, je veux dire le droit d'égaler la somme des carrés des corrections à leur valeur probable, une autre cause, non moins grave que la première, suffirait, dans le plus giand nombre des cas, pour enlever toute confiance dans l'évaluation précise des chances d'erreur [H-oposées après chaque application de la méthode.

On suppose, a priori, toutes les mesures également précises ; il est impossible, dans la plupart des cas, de crc>ire à cette égalité : c'est faute de connaître aucune raison de préférence qu'on accepte l'équivalence des résultats. Mais, connues ou inconnues, ces raisons, si elles existent, doivent exercer une influence sur l'eireur réellement commise, et c'est celle-là dont on prétend donner les chances.

Il ne faudrait pas dire : On obtient une précision mo^'enne. Des mesures dont la précision est inégale ne donneront nulle-

ment le même résultat qu'un nombre égal de mesures prises avec une précision uniforme de quelque manière qu'on la choisisse.

Les formules, enfin, supposent pour toutes les observations les erreurs constantes absolument écartées ; c'est une condition difficilement remplie quand on combine des observations d'origine ddlérente.

29^ CALCUL DES PROHABIMTÉS.

Le calcul rie la précision d'un sjslème d'observaliotis et l'éva-Inalion quon en déduil pour la confiance méritée par le résultat ont compromis plus d'une fois la méthode des moindres carrés.

Après avoir discuté par d'immenses calculs les observations du passage de Vénus sur le Soleil en 1-61, Enckc a trouvé pour la parallaxe du Soleil 8", 49 et pour erreur probable o",06. Il y avait, en conséquence, plus de 300000 à parier contre i que l'erreur n'atteindrait pas o", 42, représentant sept fois l'erreur probable.

Les asironomes, cependant, acceptent aujourd'hui pour parallaxe 8", 91, qui correspond précisément à l'erreur o", 42.

Sur un nombre total de [49 observations, Eucke, par des raisons dont il serait difficile de donrier le détail, en avait considéré 90 comme meilleures que les 69 autres. Les premières avaient même poids dans les calculs et les secondes un poids moitié moindre. Il n'en faut p;is davantage, indépendamment de toute objection théorique, pour expliquer, j'oserai dire pour prévoir, des erreurs plus grandes encore (]iie celles qu'on a commises.

Si le résultat final est exact, l'un des observateurs, Short, s'est trompé de 20" sur l'instant du second conlact et Justander de 40" sur celui du premier.

L'un et l'autre, cependant, sont admis dans la première classe, comme Lacaille, qui se serait trompé de 2" seulement, et Lalande de i",7.

L erreur probable sur l'instant du premier conlacl, pour tous les observateurs de première classe, étant 7", il y aurait, si l'on s en rapporte aux formules, 19000 à parier contre i qu'une erreur de 40" ne sera pas commise; n'était-ce pas une raison suflisante pour faire passer Justander dans la seconde classe, peut-être même pour supprimer ses chifi'res, en voyant qu'à la sortie il » s'est trompé de 20"?

Encke, en prenant ce parti, aurait manqué, je le sais, à un principe que je n'accepte pas : les observations sont des témoins; SI elles sonl, avant l'épreuve, jugées dignes de confiance, leur déclaration, quelle qu'elle soit, doit être recueillie et conservée.

Laplace a évalué la masse de Jupiter -^ de celle du Soleil.

L'erreur commise, affirmall-il, est plus]elite (|ue jjj du nombre proposé, et le Calcul des probabilités démontre qu'il y a looooo contre i à |)arier pour qu'elle n'atteii^ne pas celte limite. La limite cependant a été dépassée : aucun astronome n'en doute aujourd'hui.

Il serait intéressant de refaire et de discuter de tels calculs. Je veux parler ici des principes seulement. Lorsque des inconnues sont déterminées par un grand nombre de mesures, les équations étant plus nombreuses qu'il ne faut, le calcul fait connaître les corrections pour lesquelles la somme des carrés est mi ni ma

Quelle est la confiance méritée par les résultais?

Nous avons résolu deux problèmes dilïerents :

Les observations n'étant pas faites encore, ou, ce qui revient au même, leur résultat étant encore inconnu, mais leur précision étant appréciée d'après l'habileté de l'observateur, quelle est la précision du résultat? La solution est irréprochable, mais sans intérêt dans la plupart des cas. l^orsque les observateurs sont différents et les observations nombreuses, il est impossible, évidemment, d'exprimer a priori par un nombre la confiance méritée par chacun, en écartant tes circonstances particulières qui ont pu le troubler, comme, par exemple, dans les observations du passage (le \ énus, ce phénomène imprévu de la goutle qui rendait les contacts incertains.

C'est après les avoir obtenus qu'il faut juger les résultais, et le véritable problème est celui-ci : J^es observations sont faites, les calculs leiminés, la somme des carrés des corrections est connue en chillVes; en déduire la précision su[]posée égale des observations combinées.

iNous devons répéter ce qui a été dit (17i) :

Quand on entreprend une série de mesures, l'habileté des observateurs n'est ni parfaitement connue ni complètement inconnue. Ce sont des cas extrêmes. Il arrivera presque toujours que, toutes les valeurs de la précision étant possibles, elles seront, a priori, inégalement vraisemblables. La loi de leurs probabilités avant l'épreuve étant inconnue, le problème est insoluble.

Si les observations étaient mal faites, les équations seraient discordantes. La probabilité pour que le hasard, et non la perfec-

tion des mesures, les rende compatibles après de petites corrections, peut être considérée comme une impossibilité. On peut, en conséquence, quand la somme des carrés des erreurs est pe-

tite, accepter sans crainte le résultat, mais il est téméraire d'évaluer en chiffres la confiance qu'il doit inspirer.

HA1.1.EY

231. Il existe plus d'une manièi'e de consulter le sort; quand la probabilité est la même, la moyenne est la même sur un grand nombre d'épreuves, mais les chances d'écart peuvent être diiïérentes. — 232. Expression algébrique du problème à résoudre. — 233. Laplace et Poisson, dans leurs étu les sur la statistique des naissances, ont négligé cette remarque. — 234. Le tirage dans plusieurs urnes donne, pour une même probabilité moyenne, une valeur plus petite au carré de l'écart. — 235. Influence de l'itriporlancc des sommes assurées sur les chances d'écart de la moyenne. La formule obtenue en supposant les tirages faits dans la même urne n'est pas acceptable. — 23G. Loi de mortalité de Gompertz.

231. Les géoinèlres ont lacilement assimilé les événements forliiits à une série de tirages au sort laits dans une urne de composition inconnue. Rien n'autorise, a priori, une telle lijpolhèse. Toutes les manières de consulter le hasard ne sont pas écpiivalentes. Sans vouloir le contester, on s'est montré souvent trop peu sévère dans le choix à faire entre elles. Une première condition est évidente, c'est l'invariabilité approchée du rapport entre le nombre des événements et celui des ('preuves.

Quand cette première vérification réussit, on s'en contente presque toujours ; le rapport constant lait connaître la composi-

lion d'une urne dans laquelle doiveat se faire les tirages fictifs; on en déduit, pour un grand nombre d'épreuves, les conséquences estimées de plus en plus probables.

Si l'on observe, par exemple, dans un pays dont la []opuIation est stationnaire, le nombre des décès, celui des naissances, le rapport du nombre des fdles à celui des garçons, le nombre des incendies, celui des jours où le vent souffle dans une direction désignée, etc., on tiouvera, avec une approximation inégale, mais toujours grande à la longue, un rapport invariable entre le nombre d'événements d'un genre désigné et le nombre des épreuves. On com|)ren(l dans quel sens est pris le mot épreuve. S'il s'agit, par exemple, des incendies, chaque maison sert d'épreuve, et le rapport dont nous parlons est celui de leur nombre total à celui des sinistres.

Chaque événement fortuit acquiert []ar ces relevés, quand ils portent sur de grands nombres, une probabilité déterminée sur laquelle, lorscpie les rapports restent constants, ne peut s'élever aucun (Joule.

Si, sur loooo individus âgés de 30 ans, 5ooo atteignent l'âge de 65 ans, on conclura, très légitimement, que pour un boinnie de 30 ans choisi au hasard la probabdité de vivre 35 ans est \.

La conclusion étant acceptée, elle n'autorise pas l'assimilation des cbances de décès des hommes de 30 ans, dans une période de 35 ans, à celles du tirage au sort dans une urne contenant I boule blanche et i boule noire.

Si dans une telle urne on fait loooo tirages, le nombre des boules blanches oljtenues sera 5ooo environ, un peu plus ou un peu moins, selon les caprices du hasard.

Si, sur loooo individus âgés de trente ans, on compte les survivants 35 ans après, ce nombre, d'après les Tables (pii sont très exactes, sera 5ooo enviion, un peu plus, un peu moins, suivant des circonstances que nul ne peut prévoir.

Les deux cas sous ce rapport sont identiques. •

Est-ce là tout ce qu'on doit demander?

J^es nombres comparés diflerent peu de 5ooo.

Mais l'écart dans un cas, celui des décès, est com[)lètement inconnu ; nous n'en pouvons rien dire, moins encore affirmer. Dans

le cas des tirages an sort, dans une urne, il est soumis à des lois précises.

i^a moyenne de ses valeurs absolues, celles des valeurs de son carré peuvent être, avec confiance, calculées à l'avance.

On peut affirmer que, dans le cas pris pour exemple, sur loooo tirages renouvelés un grand nombre de fois, la valeur inovenne de l'écart sera 4o; celle de son carré, 9,5oo.

Si, en considérant un grand nombre de groupes de lOooo hommes de 3o ans, la moyenne générale des décès en 35 ans étant égale à oooo, la movenne des écarts, au lieu d'être 4o, se trouve égale à loo, on pourra, sans en conclure rexistence d'une

cause perturbatrice, accuser de la discord;incc la prétention d'assimiler deux problèmes très différents.

11 y a, nous l'avons dit, bien des moyens de eonsullcn- le hasard; quand ils donnent le même résultat moven, ils ne donnent pas pour cela les mêmes |)robabiliLés d'écart. Au lieu de tirer des boules dans une urne de composition donnée, on peut associer plusieurs urnes de composition diOerente et puiser alli-rnalivement dans chacune d'elles : les résultats m<nens sont les mêmes que pour des tirages faits dans une urne de composition movenne, les chances d'écart ne le sont pas.

Si, pour prendre un cas extrême, au lieu de puiser loooo fois dans une urne contenant i boule noire et i boule blanche, on puisait alternativement dans deux urnes contenant, l'une la boule noire, l'autre la boule blanche, on obtiendrait avec certitude 5ooo fois la boule blanchr, et l'écart deviendrait nul.

La substitution de plusieurs urnes à une seule pour représenter les Tables de mortalité païaît, a pj-iori, très plausible. Parmi les individus d\\ même âge, il est impossible de ne pas faire des catégories pour lesquelles les chances de vie sont inégales. Elles ne sont pas les mêmes pour la ville et pour la campagne ; on doit tenir compte des habitudes d'oisiveté ou de travail, de la profession exercée, de l'intempérance ou de la sobriété, de la longévité des parents, etc. i^a s!atisti(|ue confond tous les cas et donne une moyenne; on approcherait davantage de la vérit(' en formant une Table pour chaque catégorie : chaque Table alors serait remplacée par une urne et les compositions seraient difiérenles.

SI l'événement éludié est la chute de la pluie et (|ue, dans un lieu déterminé, on observe, en moyenne, sur un grand nombre de siècles, 92 jours de pluie par an, la prohabilité sera, pour qu'il | pleuve un jour donné, ^, cela n'est pas contesté; mais, chaque année, le nombre des jours de pluie s'écartera plus ou moins de 92 : la moyenne des écarts n'a rien de commun avec celle qui se produirait si, chaque année, on faisait 365 tirages dans une urne contenant 92 boules blancbes et •i;-3 boules noires.

La cause de la différence, très probablement, est autre dans ce cas que dans le précédent. La probabilité |)Our qu'il pleuve un jour désigné longtemps à l'avance est ^; mais, pour qu'il pleuve deux jours de suite, elle est très différente de {—)-. Quand il fait mauvais temps, ce n'est pas d'habitude pour un jour seulement; la probabilité d'un tirage est influencée par celle du tirage précédent. Cela ne change rien aux. mojennes, puisque l'urne a été composée précisément pour les rendre égales; mais il n'y a plus entre les écarts, indépendamment de toute cause perturbatrice, aucune relation nécessaire.

232. La question générale semble devoir être posée de la manière suivante :

Un événement fortuit peut, sur y. épreuves, arriver un nombre inconnu de fois : la probabilité pour qu'il arrive n fois est/>„ ; le nombre probable des arrivées sera

Pi -+- 2/92 + 3/^3 + ... + .J./?y :

en le désignant par ;j./j, la statistique indiquera le nombre p comme probabilité de l'événement à chaque épreuve.

Si l'on renouvelle n fois les <^ épreuves, le nombre d'arrivées s'écartera, pour chaque série, de la valeur moyenne ixp. En nommant N,, INo, ...,]N« les nombres successifs sur ^ épreuves, la moyenne

Ni-^ N2-f-N3H-...-^N„

différera peu de u.p. Nous pouvons même la regarder comme égale à [j.yj, car c'est ce rapport seul qui nous fait connaître la probabilité moyenne désignée pav p.

L'écart dans les ix épreuves formant la série du rang i sera

La moyenne des carrés des valeurs de cette différence aiirait(62) une expression très simple, u/?(i— /?), si l'événement était le tirage au sort dans une urne ; elle pourra, sans qu'on s'en étonne, prendre dans le cas général une valeur très différente.

L'étude de ces valeurs dans tous les cas possibles serait intéressante.

La moyenne des carrés de l'expression (3) est identiquement (103)

(4) ^ ' ^ -^ ■-' ' • • — '^" /-Ni-t-^o-

Le second terme différera peu de jjl^/?^ ; cela résulte, nous l'avons dit, de la définition même de/>.

Le premier terme

n'est pas une fonction déterminée de p.

Si les nombres N,, N„ ..., N„ résultent de tirages au sort dans une urne donnant à la sortie d'une boule blanche la probabilité />, on aura approximativement, pour un grand nombre d'épreuves.

Ni-4-N,-^...+ N„

[xp.

(6) Nf + N|+...-HN^

L'équation (5) est évidente.

Le premier membre de (6) peut, si n est grand, être remplacé par la valeur probable de N^, c'est-à-dire par le carré du nombre d'arrivées sur tx épreuves de l'événement dont la probabilité est la somme des termes du développement de {p + qY multipliés chacun par le carré de l'exposant de p. Cette somme a été calculée (183).

Si l'on ne connaît sur les probabilités /?,, yOo, ■ ■ • , Pp. que la seule équation

Pi-h ipz-h 'ipî-^. . .-{- lJ.pp,= lip,

à laquelle il faut adjoindre la condition identique

P\^P'>-^P3-^'-- + Pll= l,

l'équation (6) n'est plus démontrée. Il est impossible de connaître, d'après les données, la valeur probable de

Nf + Nl+...+ N^ n égale à

et par conséquent aussi la valeur probable de l'écart représentée par l'expression (4) doit rester inconnue.

233. Lorsque Laplace et Poisson ont cherché les probabilités de certaines anomalies locales dans le rapport du nombre de naissances masculines et féminines, ils n'ont pas tenu compte des J différences très grandes que nous venons de signaler. Leurs calculs sont faits comme si, la naissance d'un garçon avant une certaine probabilité, les résultats possibles d'un nombre quelconque de naissances avaient, à moins de causes perturbatrices, les mêmes chances que si l'on tirait des boules d'une même urne convenablement préparée.

234. Lorsque la probabilité d'un événement est p, la valeur probable du nombre d'arrivées sur jx épreuves est iip, et celle du carré de l'écart entre le nombre véritable et le nombre probable a/? est (62) jU/?(i — p).

Si, à une ui^ne donnant une probabilité p à l'événement, on substitue/z urnes différentes donnant les probabilités/», , /jo, -..^pn, dans lesquelles on puisera alternativement, la probabilité moyenne étant égale à y?, la valeur moyenne du carré de l'écart sera diminuée.

Si l'on tire, en effet, successivement dans les diverses urnes et

que, le nombre lolal des tira-es étant |jl/?, on ait puisé iji fois dans chacune, le nombre probable des boules blanches sorties sera

V-{P\-^Pi-^Pz^...-^p

Sur (in même nombre u/î de tirages dans la première urne, le nombre probable des boules blaiiclies serait

\i np .

Ces nombres sont égaux, puisque, par bjpolbèse, la moyenne

P\-^P-l-^Pz^...-^ Pn

est égale à p.

Les chances d'écart sont très diiïerentes.

Dans le cas des a/? tirages faits dans l'urne (|ui donne à la sortie d'une boule blanche la probabilité p, si l'on désigne le nombre des boules blanches sorties par

\xnp -i- z,

la valeur probable de z- est (62)

^~) \J.np(i — p).

Dans le cas des /? séries de |a tirages cpii forment la seconde épreuve, les nombres de boules blanches pourront être représentés par

l'écart entre leur nombre total et le nombre le plus probable sera

dont le carré peut être rej)résenté par

(8) 'ï.zJ-^'i^ZiZi'.

La valeur probable de ZiZf est nulle, quels que soient i et i' ; celle de z'j est

La valeur probable du carré de l'écart dans l'ensemble des a/? B.

épreuves faites clans n urnes différentes est

La différence des expressions (7) et (9) est, on le voit aisément,

elle est essentiellement positive, et la valeur probable du carré de l'écart dans le cas d'une seule urne est, pour une même probabilité moyenne, plus grande que pour les urnes associées.

235. Les remarques précédentes peuvent s'appliquer à la théorie des assurances. Le bénéfice d'une Compagnie d'assurances sur la vie, par exemple, dé[]end du nombre des décès qui surviendront dans l'année parmi les assurés. Ce nombre se compose de deux parties : un terme fixe, proportionnel au nombre des assurés et donné par les Tables, et un terme aléatoire, inconnu de grandeur et de signe, que nous nommerons Vécart. Le premier terme fait connaître la valeur équitable de la prime à payer, le second représente les variations du bénéfice annuel; il est très probablement petit par rapport au premier, si le nombre des affaires est considérable.

L'appréciation réduite à ces termes vagues n'est pas contestable; mais il n'est pas permis de la réduire en formule en assimilant les écarts à ceux que peuvent produire des tirages au sort dans une urne de composition fixe.

Si l'on considère, par exemple, une Compagnie d'assurances mutuelles contre l'incendie, la part de chacun dans la répartition des sinistres variera d'autant moins, toutes choses égales d'ailleurs, d'une année à l'autre, que le nombre des assurés sera plus grand et que les sommes assurées à chacun différeront moins de l'égafité.

Soient :

UL, le nombre des assurés à qui la prime à payer en cas de sinistre

est a, ; UL2 le nombre de ceux |)our qui la prime est a,^ ;

^a le nombre de ceux pour qui elle est a„.

CHAP. XII. — LKS LOIS DE LA STATISTIQUE

Soient :

f'), <?2, •• -, e„ les écarts relatifs à cliacune de ces catégories; p la probabilité d'un sinistre.

La somme probable à pajer sera

et la part proportionnelle de celui qui doit recevoir a, est

P ^1 ('M ^1 — ;j^2 ota — ■ ■ ■ + ;JL„ t„) a, -- a, — ... -X- a,,

Vécart de la somme à payer, c'est-à-dire la dififérence entre la somme prévue et celle qui sera réellement due, est pour la Gompagtiie

a,ei-h aaCo-h-. .. + a„e„.

Les écarts e,, e., .. ., e,, ayant des valeurs probables égales à zéro, amsi que leurs produits deux à deux, le carré de celte expression a même valeur probable que

Si le sinistre dont la probabilité est /> était assimilé à un tirage au sort dans une urne de composition invariable, la valeur probable de ej serait ^,p{,-p)^ et celle de la somme (lo) aurait pour valeur

La part correspondante de l'assuré qui doit recevoir a, serait

a//>(i— /?)f;-t|af — U2a|-+-...H- [Xn^-n) a, -r- a.2 -H . . . — a„

Cette évaluation, déduite d'une assimilation que rien n'autorise, ne doit inspirer aucune confiance.

236. Je terminerai ce Chapitre en indiquant une loi remarquable de probabilité proposée par Gomperlz, et qui, dans des limites assez écartées, paraît s'approcher de la vérité.

La condition arbitrairement imposée à la fonction inconnue est

que la probabilité pour que deux individus d'âges connus vivent l'un et l'autre après un nombre donné d'années soit proportionnelle à celle pour qu'un troisième individu, d'âge convenablement choisi, vive lui-même après ce même nombre d'années.

Si o{z) désigne, pour un nombre donné de naissances, le nombre des survivants à l'âge z, la condition demandée est exprimée par l'équation

fia + ^) ^(b + x) ^ ^ y(c + ^) ^ ^^'^■> o{a) ~ o{b} o{c)

Cette équation doit avoir lieu quel que soil œ, quand on choisit pour G une fonction convenable de a et de b.

o(a^ .r^ ^^ ^^ effet, la proljain'lité pour qu'un individu dont

l'âge est a vive encore dans n années.

En prenant les iogariliimes des deux membres de (12) et posant l(o{u) = F(w), la condition devient

H étant une fonction de a et de b indépendante de x. En prenant la dérivée par rapport à x et posant

F'(u)= 'b(u), on a

(i3) 'i^ia ^ x) -h 'l>(b -^x) = '\i{c-hir);

|)ar conséquent, en faisant ^ ^ o,

on doit avoir aussi

(i5) ih(a-i- dx) -\- <\i(b -h dx) — 'bic -<^ dx)

et, en retranchant, 1

(16) 'h'ia)-i-'y{b)^'h'(c). I

Les seconds membres des équations (i4) et (i5) sont fonctions de c; ils dépendent donc Tun de l'autre. Il doit en être de même des premiers membres, et une relation doit exister entre les deux

fonctions

I.a condition nécessaire et siiHisanle pour qu'il en soil ainsi est que le déterminant fonctionnel soit nul. Écrivons donc

Telle est l'équation qui détermine 6. Si l'on suppose que ni -V ni -V' ne soient nuls, on aura

on en déduit aisément

'Viz) = Ge*^

et, successivement,

J;(C.) = Htf/- -4- Cl,

H,, C|, C-2 et k sont des constantes.

('.ette formule, plus -générale que celle de Gompertz, a été proposée |)ar Makeham.

Gompertz suppose G, et Go égaux à zéro et prend

'■i{z) = Ge»"^

J'ai déterminé les coefficients par la condition d'accorder autant que possible les coefficients avec les meilleures Tables connues. Les résultats sont donnés par le Tableau suivant :

o(z) = Ge»'-'%

cp(30)=890, cp(60) = 584, 0(90) = i6,

K= 0,071485, logK = 8,8J42i46,

H =— 0,006J46i, lo<,'H = 7,8159811,

G^ 941,160. log G = •2,9736634.

3io

CALCUL

DES PROBABILITES.

Tabl

es de

des 20 C"

de

de

Calcul.

anglaises.

Duvillard.

eparcieux.

Norihampton

oO..

Les différences entre les valeurs de '^{z) et celles que donnent les Tables des vingt Compagnies anglaises sont moindres que les différences des diverses Tables entre elles.

Cela fait, lomnipiil seiilenciez-vous. mon ani) ?

r.oiiinip yous autres, messieurs, repoiulit lirUloye, pour celuy je donne semence duquel la chance livrée par le sort des dez judiciaires premier advient.

Uabelai».

I 237. Résumé critique des tentatives faites pour appliquer le Calcul des probabilités

aux décisions judiciaires.

237, L'assimilation la pins téméraire d'un tirage au sort aux effets de causes inconnues et variables a été proposée |)ar Condorcet.

Le Livre trop longtemps admiré sur la probabilité des décisions prises à la majorité repose tout entier sur cette confusion. Aucun de ses principes n'est acceptable, aucune de ses conclusions n'approche de la vérité.

La théorie de Condorcet a été commentée, refaite même en en- [lier par des savants illustres ou célèbres; aucun progrès n'a pu en corriger l'impuissance.

Les successeurs de Condorcet, tout en le louant d'avoir porté le flambeau de la Science dans ces mystérieuses questions, ont reconnu l'insuffisance de ses formules : ils n'en ont pas proposé de meilleures.

Laplace a rejeté les résultats de Condorcet, Poisson n'a pas accepté ceux de Laplace; ni l'un ni l'autre n'a pu soumettre au

colcul ce qui v échappe essenliellemenl : Jes chances d'erreur d'un esprit plus ou moins éclairé, devant des faits mal connus et des droits imparlaitenient définis.

Dans la discussion d'une loi sur le jurj. Arago allégua l'autorité de Laplace.

On pouvait, disait-il, diminuer les erreurs judiciaires flans le rapport de 5 à 7. La théorie le démontre. Ces chitlres sont aussi certains que la parallaxe du Soleil.

Un député osa exprimer un doute, Arago le traita fort mal. Quand il parlait au nom de la Science, il n'appartenait pas à des ignorants de le contredire.

On a changé la parallaxe du Soleil pour une autre plus exacte. Les chiffres de Laplace n'ont pas à être changés, ils ne méritent que l'oubli.

L'analyse du Livre de Condorcet est diflicile à faire. Lfs erreurs j sont tellement évidentes, la confiance qu'elles inspirent tellement naïve, que l'approbation connue de juges très justement illusties rend les citations invriiisend)lables.

Comment croire qu à côté des aberrations singulières, textuellement rapportées, ne se trouve pas quelque idée de génie qu'il serait juste de produire?

Le Livre n'est pas rare, chacun peut chercher.

Tout se passe, suivant Condorcet, comme si les magistrats, imitant Bridoye, juge de Myrelingucs, senlenciaient par le sort des dés. L'assimilation de l'opinion d'.m juge au tirage d'une boule dans une urne de composilion déterminée est pour lui une identité. Si la boule es! blanche, la décision sera bonne. Le juge se tromper;! sM tire une boule noire. L'urne dans laquelle puise un juge éclairé et honnête contient beaucoup de boules blanches; les boules noires abondent dans celle d'un juge sans conscience.

Le difficile est de trouver la com[)Ositi()n de l'urne. Telle n'est pas l'opinion de Condorcet. Il suppose (pi'une même urne serve à tous les juges, pour toutes les causes et pour tous les tribunaux d'im même pajs. Le problème n'a plus (pj'une seule inconnue. Dans celte hypothèse, favorable au calcul, (Condorcet est en droit de rassurer les innocents en menaçant les coupables d'un inévitable châtiment; on doit supposer, dans l'urne dont tout rlé[)end, les boides blanches en majorité. En douter serait faire injure à la

magislrnture. Si les juges se trompaient pins d'une fois sur deux, il faudrait supprimer les procès.

On don les conserver, mais assurer de bons jugements. Rien n'est plus facile; il faut accroître le nombre des juges. Quand les boules blanches sont en plus grand nombre que les noires, leur sortie en plus grand nombre est probable; elle devient certaine si les tirages sont nombreux : la probabilité d'une décision prise par la majorité peut approcher ainsi de la certitude.

Nous supposerons, dit Goudorcet, les assemblées composées de votants avant une égale justesse d'esprit et des lumières

égales; nous supposerons qu'aucun votant n'ait d'influence sur les voix des autres et que tous opèrent de bonne foi.

Plus le nombre des votants augmentera, plus la probabilité de la décision sera grande : la limite de cette probabilité est la certitude.

Les illusions de Condorcet ne s'étendent pas à toutes les assemblées.

Une assemblée nombreuse ne peut pas, dit-il, être composée d'hommes très éclairés : il y aura un grand nombre de questions sur lesquelles la probabilité de la voix de chaque votant sera au-dessous de ^. Alors, pins l'assemblée sera nombreuse, pins elle sera exposée à rendre des décisions fausses. On peut dire pins, elle en sera certaine.

Une assemblée nombreuse, dont chaque membre se trompe plus d'une fois sur deux, se prononcera certainement contre la vérité : elle donnera un moyen sûr de la connaître. Condorcet ne l'a pas proposé, mais il résulte de ses formules; il serait injuste de lui en refuser l'honneur.

Tous les calculs ont pour base la probabilité pour qu'un juge se trompe; on ne dit ni quel juge ni dans quel procès : c'est une constante qu'il faut déterminer. Condorcet donne plusieurs solutions.

La plus assurée, malheureusement d'une exécution difficile, consisterait à réunir pour former un tribunal d'examen un assez grand nombre d'ivommes véritablement éclairés pour que leurs décisions fussent considérées comme certaines. On saurait alors combien de fois les juges se seront trompés dans leurs décisions

prises à la majorité; en admettant pour tous la même chance d'er- B.

reur on dégagera aisément des formules qui ne contiendront pas d'autre inconnue la valeur exacte de cette chance.

Cette méthode, dit Gondorcet, ne peut avoir qu'un inconvénient. Il en énumère trois cependant :

La difficulté de composer un tribunal d'examen, le long temps qui serait nécessaire pour examiner un grand nombre de décisions, les embarras qui peuveni rendre l'examen dilficile.

Gondorcet, on le voit, ne dissimule pas les difficultés. Mais, quand on les aura surmontées, quel dédommagement!

La certitude d'un bon jugement pourra croître sans limite, il n y aura qu'à choisir.

Si le risque de l'erreur, dit Gondorcet, est tel qu'on néglige un risque semblable quand il s'agit de sa propre vie, les plus exigeants devront s'en contenter.

Beaucoup de gens réputés sages prennent à Ljon le bateau pour se rendre à Avignon. Le pont Saint-Esprit cependant est sur la route.

Que faudrait-il penser d'un tribunal qui donnerait aux innocents autant de chances d'être pendus qu'un voyageur en a de se noyer au pont Saint-Esprit?

Getle idée ne lui plaît pas complètement.

Supposons, dit-il, que l'on sache combien il périt de paquebots sur le nombre de ceux qui vont de Douvres à Calais ou qui reviennent de Calais à Douvres, et qu'on n'ait égard qu'à ceux qui sont partis par un temps regardé comme bon et sûr par les hommes instruits dans la navigation. Il est clair qu'on aura ainsi la valeur d'un risque qu'on peut négliger sans imprudence.

Après de longues et consciencieuses recherches, Gondorcet se décide à accepter la fraction , ,^ ,,'- ,. ^ : C'est la dernière concession qu'il puisse faire. C'est là, dit-il, le risque le plus considérable qu'il soit permis de négliger. C'est la probabilité d'erreur <|u'une nation bien gouvernée peut laisser subsister dans les jugements et dans les décisions des assemblées délibérantes. Une erreur sur 144768 jugements est le dernier mot de Gondorcet.

Laplace promet moins, mais ne tient pas mieux sa promesse; il assimile, comme Gondorcet, l'opinion d'un juge à un tirage fait dans une urne, mais il repousse l'hypothèse d'une probabilité invariable.

Laplace suppose loutefois que, dans une même cause, tous les juges ont chance égale de se tromper; il admet aussi, supposition non moins étrange, que cette chance, à l'ouverture des débats, soit complètement inconnue.

Qu'il s'agisse d'un jury d'exi)ropriation, d'un tribunal de première instance, d'une Cour d'appel ou de la Cour de cassation, d'une question de droit ou d'une question de fait, d'un crime contre les personnes ou contre les propriétés, ses formules et ses chiffres n'en reçoivent aucun changement. Un seul renseignement figure dans ses formules : le nombre des voix émises en fa-

veur de chaque opinion. Deux jugements portés à la majorité de cinq contre trois se valent, quels que soient les juges. Si le partage se fait dans la proportion de sept conlre un, celui des juges qui s'est séparé des sept autres puise, comme eux, dans la presque unanimité la même garantie de sagacité. La chance d'erreur est la même pour tous, telle a été la base du calcul. Ces huit juges puisent dans la même urne, les boules blanches y sont en grande majorité. Si le hasard a mis une boule noire dans les mains du huitième juge, c'est un pur accident : il n'en faut rien conclure contre lui.

Les conséquences de ces hypothèses sont moins assurées, quoi qu'en ait dit Arago, (jue la théorie du Soleil.

Dans les tribunaux où cinq voix sont nécessaires pour une condamnation, la probabilité d'une erreur est j^, et cela quels que soient les juges.

Si le tribunal est réduit à six membres qui ne pourraient condamner qu'à la pluralité de quatre voix, la probabilité d'une erreur à craindre serait au-dessous de j.

Dans le jury de douze membres, si la pluralité exigée pour la condamnation est de huit voix sur douze, la probabilité de l'erreur à craindre est jtH ; elle est à peu près jj si la pluralité est de neuf voix. Dans le cas de l'unanimité, la probabilité d'une erreur est réduite à 77777.

Telle serait, suivant le calcul, la mesure de la sécurité assurée aux innocents par la loi anglaise.

Poisson n'accepte pas la solution de Laplace, il le déclare timidement.

Laplace, dil-il, fait une hypothèse qui n'est point incontestable.

L'insuccès de son maître ne le décourage pas : il fait reposer à son

lourdes calculs exacts sur des hypothèses sans fondement et propose le résultat avec la même confiance qu'un théorème de Géométrie.

Avant i83i, dit-il, et pour la France entière, la probabilité qu'un juré ne se tromperait pas dans son vote était un peu supérieure à I diins le cas des crimes contre les personnes, et à peu près égale à |y dans le cas des crimes contre les propriétés. Sans distinction de l'espèce de crimes, cette chance était très peu inférieure à j pour toute la France et un peu supérieure à cette fraction pour le département de la Seine.

La probabilité de la culpabilité de l'accusé se trouverait, pour la France entière, comprise entre 0,53 et 0,54 : elle surpasse | dans le cas des crimes contre les propriétés.

Dans les années qui ont précédé i83i et pour la France entière, la probabilité de l'erreur d'une condamnation prononcée à la majorité minima de sept voix contre cinq était, à peu près, 0,i6 ou 0,04, selon qu'il s'agissait d'un crime contre les personnes ou d'un crime contre les propriétés. Sans distinction de l'espèce de crime, elle avait pour valeur 0,06.

Que faut-il croire de tout cela?

Absolument rien.

Poisson, comme Gondorcet et comme Laplace, assimile les jurés à des urnes. Gomme Laplace, il suppose la probabilité la même pour tous ceux qui jugent une même cause; comme Gondorcet, il la suppose égale pour toutes les causes.

Il déclare formellement, il est vrai, ces hypothèses inacceptables ; elles n'en sont pas moins la base de ses calculs : il croit tout concilier en substituant dans les énoncés ce qu'il appelle une probabilité moyenne à la constante introduite dans les démonstrations, erreur de principe moins excusable peut-être que les hypothèses les plus hasardées.

Si, sur douze jurés, sept ne se trompent jamais et cinq se trompent toujours, la prol>abilité movenne d'erreur sera -p;. Elle le sera aussi si chaque juré tire sa décision bonne ou mauvaise dans une urne contenant cinc] boules noires ou sept blanches. Le jury cependant, dans le premier cas, ne se trompe jamais; les boules noires, dans le second cas, seront souvent en majorité. Poisson dans ses calculs ne distingue pas les deux hypothèses.

L'une des formes les plus étranges de l'illusion, dont on fait

lionneiir à Condorcet, a été proposée par Cournol. Il déduit des formules par un calcul très exact le mérite des trois juges qui composent un même tribunal, non seulement le mérite relatif, mais le mérile absolu, la probabilité pour chacun d'eux de ne pas se tromper dans une cause (|ui leur est soumise. On a peine à comprendre (|u'un tel résultat n'ait pas mis en défiance un esprit rigoureux et subtil.

Le tribunal se compose de trois juges. Trois inconnues seulement sont à déterminer. Gournot, qui fait un pas vers la réalité, en supposant aux juges une sagacité inégale, leur attribue la même chance d'erreur dans toutes les causes qui leur sont soumises, crovant, comme Poisson, obtenir par cette singulière livpothèse ce (|u'il nomme une probabilité moyenne ; il suppose en outre, et c'est là la moins acceptable de ses erreurs, la cluince de bien juger indépendante, pour chacjue juge, de celle des deux autres. Si chaque juge se trompe une fois sur quatre, ils se tromperont tous les trois ensemble une fois sur soixante-([u;jtre.

C'est se placer trop loin de la vérité pour que l'application des formules puisse donner même une grossière approximation. Que l'on veuille faire ou non la (îction contraire, quand un juge se tiom|)e il j a pour cela des raisons : il n'a ()as réellement mis l;i main dans une urne où le hasard l'a mal servi. 11 a ajouté foi à un (aux témoignage, le concours fortuit de plusieurs circonstances a éveillé à tort sa détiance, un avocat trop habile l'a ému, de hautes influences peut-être l'ont ébranlé. Ses collègues ont entendu les mêmes témoins, on les a instruits des mêmes circonsliiuces, le même avocat a plaidé devant eux, on a lente sur eux la même pression : la chance d'opiner dans le même sens n'est aucunement comparable à celle de tirer trois boules de même couleur dans trois tirages indépendants les uns des autres.

Si, comme le demande très sérieusement (]ournot, on invitait le gredier à noter, après chaque jugement, l'opinion d(; chacun des juges, pour appliquer, quand les chiflVes sont nombreux, la (ormule qui donne leur mérite, la perspicacité de chacun étant contrôlée par celle de ses deux collègues, le juge le mieux noté de France serait celui qui, sans discuter ni réfléchir, volerait tou-

jours comme son président : s'il faut en croire la formule, un tel juge ne se trompe jamais.

Ni Cournot ni Poisson n'ont commis la plus petite faute comme géomètres; ils traduisent rigoureusement leurs hypothèses. Mais les hypothèses n'ont pas le moindre rapport avec la situation d'un accusé devant les juges.

Ils ont aperçu les différences et croient, en les signalant, acquérir le droit de ne pas en tenir compte.

Poisson, qui, comme Gondorcet, a consacré à la théorie des jugements un volume entier rempli des plus savants calculs, croit atténuer les objections qu'il ne pouvait manquer d'apercevoir, en altérant, dans ses énoncés, la signification du mot coupable. On rendrait, dit-il, le langage plus exact en substituant le mot condamnable, qui est toute la vérité, au mot coupable qui avait besoin d'explications et que nous continuerons d'employer pour nous conformer à l'usage.

L'innocent, accablé sous des indices tronipeurs ou victime de machinations trop habiles pour qu'aucun juge puisse les soupçonner, est un accusé condamnable. Poisson, /?oi/,/' se conformer à l'usage, le classe parmi les coupables. L'erreur unanime des juges devient alors une preuve de sagacité dont l'algèbre leur tient compte en évaluant leur mérite avec son infaillible précision. Dans cette suite d(; calculs stériles, qui resteront, comme l'a dit justement Stuart Mill, le scandale des Mathématiques, Gondorcet seul a donné un sage conseil : celui de choisir pour composer les assemblées des hommes véritablement éclairés.

Sources et licence

Texte : https://archive.org/details/calculdesprobaboobertrich. Domaine public ; numérisation mise à disposition par Internet Archive. Mise en forme : liregratuitement.com. Tout ce que nous ajoutons reste libre.