



Complément à l'analysis situs

Henri Poincaré

LIREGRATUITEMENT.COM

Complément à l'analysis situs

Henri Poincaré

LU AVEC LIREGRATUITEMENT.COM

Livre libre de droits, lisible gratuitement en ligne et en quinze minutes par jour.

Complément à l'analysis situs

Dans le Journal de l'École Polytechnique (volume du centenaire de la fondation de l'École, 1894) j'ai public un mémoire intitulé Analysis situs, où j'étudie les variétés de l'espace à plus de trois dimensions et les propriétés des nombres de Betti. C'est à ce mémoire que se rapporteront les renvois que je serai amené à faire fréquemment dans la suite, en mentionnant seulement le titre Analysis situs.

Dans ce mémoire se trouve énoncé le théorème suivant : Pour toute variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes, sont égaux.

Le même théorème a été énoncé par M. Picard dans Théorie des fonctions algébriques de deux variables.

M. Heegaard vient de revenir sur ce même problème dans un travail très remarquable, publié en langue danoise, sous le titre *Farstudier til en topologisk teori for de algebraiske Sammenhæng* » (C hague, det Nordiske Forlag Ernst Bojesen, 1898). D'après lui, le théorème en question est inexact et les démonstrations sont sans valeur.

2 H. POINCARÉ.

Avant d'examiner les objections de M. Heegaard, il convient de faire une distinction. Il y a deux manières de définir les nombres de Betti.

Considérons une variété V que je supposerai, par exemple, fermée; soient $v_1, v_2, \dots, v_n$, n variétés à p dimensions, faisant partie de V . Je suppose qu'on ne puisse pas trouver de variété à $p - j - i$ dimensions, faisant partie de V et dont $v_1, v_2, \dots, v_n$ constituent la frontière complète; mais que, si on leur adjoint une $(w - j - i)$ ème variété à p dimensions, que j'appellerai v_{n+1} et qui fera partie de V , on puisse trouver une variété à $p - j - i$ dimensions, faisant partie de V , dont $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ constituent la frontière complète et cela de quelque manière que V ait choisi la $(w - j - i)$ ème variété v_{n+1} . Dans ce cas, on dit que le nombre de Betti est égal $k - j - i$ pour les variétés à p dimensions.

C'est la définition adoptée par Betti.

Mais on peut donner une seconde définition.

Supposons que l'on puisse trouver dans V une variété à $p - j - i$ dimensions, dont $v_1, v_2, \dots, v_n$ constituent la frontière complète; j'exprimerai ce fait par la relation suivante :

que j'appellerai une homologie.

Il pourra se faire que sur la frontière complète de notre variété à $p - j - i$ dimensions, une même variété v_i se retrouve plusieurs fois; dans ce cas, elle figurera dans le premier membre de l'homologie avec un coefficient, qui devra être un nombre entier.

D'après cette définition, on peut additionner les homologies, les soustraire les unes des autres, les multiplier par un nombre entier.

Nous conviendrons également qu'il est permis de diviser une homologie par un nombre entier, quand tous les coefficients sont divisibles par cet entier. Par conséquent, s'il y a une variété à $p - j - i$

i dimensions, dont la frontière complète sera constituée par 4 fois la variété v_i , nous conviendrons qu'on peut écrire non seulement l'homologie :

[PLEMBNT À L'aUI TUS. 3

niais encore l'homologic :

vt rvj o;

de sorte que cette homologie signifie qu'il y a des variétés à $p - f - i$ dimensions, qui admettent pour frontière complète la variété v ou un certain nombre de lois cette variété.

L'homologie

rifle qu'il y a des variétés à $p - f - 1$ dimensions, qui ont pour frontière complète 2 fois v_i et 3 fois v , ou 4 fois v_i et 6 fois V , ou 6 fois v_i et 9 fois v^2 , etc.

Telles sont les conventions que j'ai adoptées dans YAnalysis situs, page 19.

Je dirai que plusieurs variétés sont indépendantes, si elles ne sont pas liées par aucune homologie à coefficients entiers.

Si alors il y a 11 variétés indépendantes à p dimensions, le nombre de Betti, d'après la seconde définition, est égal à » $-f - 1$.

Cette seconde définition, qui est celle que j'ai adoptée dans YAnalysis situs, ne concorde pas avec la première.

Le théorème énoncé plus haut, et critiqué par M. Heegaard, est vrai pour les nombres de Betti, définis de la seconde manière, et faux pour les nombres de Betti, définis de la première manière.

C'est ce que prouve l'exemple cité par M. Heegaard, page S6.

Si l'on adopte la première définition, on a :

et par conséquent

$$P_2 < P_s$$

Si l'on adopte, au contraire, la seconde définition, on trouve :
 $P_2 = P_s$, $P_a = I$,

et par conséquent

conformément au théorème énoncé.

C'est ce que prouvait également un exemple que j'ai cité, moi-même, dans YAnalysis situs. C'est le 3ème exemple, page 51. Mais en renvoyant à cet exemple et à cette page de YAnalysis situs, je dois signaler une faute d'impression, qui pourrait gêner le lecteur (*).

Au lieu de

il faut lire au lieu de il faut lire

$$ABB'A' = DD'C'C, \quad ABB'A' = C'CDD'; \quad AB = B'D' = e = C'A', \\ AB = B'D' = C'C.$$

Nous avons formé (page 66) les équivalences fondamentales, qui s'écrivent de la façon suivante :

$$2 C_x = 2 C_2 = 2 C_3 = 0, \quad 4 C_I = 0;$$

nous pouvons en déduire les homologies :

Comme, d'après notre convention, on peut diviser ces homologies par 4, nous arrivons au système suivant d'homologies fon-

damentales :

$C \cap C = C \cap C$.

Si alors P_1 et P_2 sont les nombres de Betti, définis de la seconde manière, on trouve

(*) Je profite de l'occasion pour signaler un autre erratum de *YAnalysis situs*. Au bas de la page 102, il faut lire: « ou plus précisément les deux $v + 1$, auxquelles v appartiendra, appartiendront aux mêmes $v + 1$, aux mêmes $vq + 1$, ..., aux mêmes Vp ; de telle façon que la suppression de v et l'annexion mutuelle des deux $v + 1$, ne changera rien aux $v + 2$, aux $v + 3$, ..., aux Vp ».

$COMW.L' MI.VI \setminus 'TUS$.

Mais l'égalité entre les P_1 et P_2 n'est

pas adoptée la première définition, qui est celle de Betti toujours $P_2 = P_1$, mais nous n'aurions $P_2 = P_1$.

En effet, il n'y a pas de variété à deux dimensions qui ait pour

frontière complète la ligne fermée C , mais nous aurions l'équivalence $C = 0$.

Ce qui est vrai seulement, c'est qu'il y a une variété à deux dimensions, admettant pour frontière 4 fois la ligne C . Donc P_2 n'est pas égal à 1.

Revenons au théorème d'après lequel les nombres de Betti, lement distants des extrêmes, sont égaux.

La démonstration que j'en ai donnée dans *YAnalysis situs*, semble s'appliquer également bien aux deux définitions des

nombres de Betti; elle doit donc avoir un point faible, puisque les exemples qui précèdent, montrent suffisamment que le théorème n'est pas vrai pour la première définition.

M. Heegaard s'en est bien rendu compte; mais je ne crois pas que sa première objection soit fondée.

Après avoir cité la façon dont je définis les variétés $\hat{V}_1, V_2, \dots, V$ (Analysis situs, page 43), par les équations $\langle \hat{V} \rangle = 0, F' = 0$, il ajoute (page 70) « Enhver af Mangfoldighederne V skulde aitsaa kunne være af den fulstændige Skøring mellem p Mangfoldigheder af $h - 1$ Dimensioner i $[/]$ ». Cela n'est pas exact, car, outre mes égalités, j'ai un certain nombre d'inégalités, que j'ai introduites au début du mémoire et que j'ai négligé d'écrire de nouveau dans la suite; mes variétés ne sont donc pas des intersections complètes.

La seconde objection est, au contraire, fondée. « Naar otværdigt, dit

M. Heegaard, Homologien $T^h V$. 00 0 ikke finder Sied, saa i U' kan

hænge en lukket Kurve V , saa al

$yN(v, r.)^0$

men det er ikke sikkert, at den samme Kurve kan udskeeres af nogen Mangfoldighed V ». C'est là, en effet, le véritable point faible de la démonstration,

6 H. POINCARÉ.

Il est donc nécessaire de revenir sur la question, et c'est l'objet du présent travail.

Souvent, pour simplifier les démonstrations, j'ai envisagé seulement le cas des variétés fermées à 3 dimensions, contenues dans l'espace à 4 dimensions. On pourrait facilement les étendre au cas général.

J'envisage, donc, dans la suite, une variété V fermée, mais pour calculer ses nombres de Betti, je la suppose divisée en variétés plus petites, de façon à former un polyèdre, au sens donné à ce mot à la page 100 de YAnalysis situs.

Schéma d'un polyèdre.

Considérons, donc, comme à la page 100 de YAnalysis situs, un polyèdre à p dimensions, c'est-à-dire une variété V à p dimensions, divisée en variétés v ; les frontières des v seront les v , celles des v seront les v , . . . , celles des v_x (arêtes) seront les v_o (sommets).

J'appellerai χ le nombre des v_v

Soient $a_1, a_2, \dots, a_i$ les différentes v .

Soit a_i une des variétés v et a_{i+1} une des variétés v_x qui lui sert de frontière. Étudions les rapports de a_i et de a_{i+1}

Soient

$$(1) F_1 = F_2 = \dots = F_{n-q} = F_{n-q+1} = 0, \chi > 0$$

les égalités et les inégalités qui définissent a_{i+1} , d'après la première définition des variétés (YAnalysis situs, page 4).

Les relations qui définissent a_i pourront se mettre sous la forme :

$$(2) F_1 = F_2 = \dots = F_{n-q} = 0, F_{n-q+1} > 0, \chi > 0.$$

Dans ce cas, nous dirons que la relation de $a \setminus$ et de $a \setminus \sim x$ est directe.

Cette relation deviendrait inverse, si l'une de ces deux variétés était remplacée par la variété opposée; elle redeviendrait directe, si chacune des deux variétés était remplacée par la variété opposée.

COMW.l'.MI.NI .. !.' | .ALYSIS Si: 7

On suit qu'une variété est retnpl céc par l.i variété opposée (-/ Jyjt Wfetf, page 15), quand on permute deux de. fou jUÎ,

égalées a zéro, donnent les (• qui définissent la variété), ou qu'on change le signe de l'une d'elles.

Ainsi les deux variété',

$F, = F, = FjS=05 Ft = F2 = 0, /->0; F, = F, = F^* = 0; F, s F, = 0, F, < 0; F.^F.^F, = 0; F, = F, = 0, F,>0\hat{}$

sont en relation directe; tandis que les deux variétés

$Fi = F2 = F3 = 0; F, = Fa = 0, i \setminus < 0; F, = F2 = F, = 0; F, es F, := 0, F2 > 0;$

sont en relation inverse.

Cela posé, soit $e?$. un nombre qui sera égal à 0, si $a \setminus \sim l$ n'est pas frontière de $a \setminus$ à $-j$ - I, si $aV \sim l$ est frontière de $a \setminus$ et en relation directe avec $fl?j$ et, enfin, à $- i$, si $aq \sim l$ est frontière de $ff\hat{}$, mais en relation inverse avec $\#?$.

Nous conviendrons d'écrire la çongmence

(3) $aJfaXtf/flJ-S$

qui nous fait connaître les frontières de a ?

L'ensemble des congruences (3), relatives aux différentes $v_{i-1} > \dots > v_0 \wedge Q y >$ constitue ce qu'on peut appeler le schéma d'un polyèdre.

On peut se poser deux questions :

1° Un schéma étant donné, existera-t-il toujours un polyèdre, qui y corresponde ?

2° Deux polyèdres qui ont même schéma, sont-ils homéomorphe'.

Sans aborder, pour le moment, ces deux questions, cherchons

ô H. POINCARÉ.

quelques-unes des conditions auxquelles doit satisfaire un schéma, pour qu'un polyèdre y puisse correspondre.

Considérons l'une des v , $a_{p \sim z}$ par exemple; cette variété devra séparer, l'une de l'autre, deux des v_b et deux seulement; de sorte que, parmi les nombres

il y en aura un qui sera égal à $-j-i$, un qui sera égal à $-i$ et tous les autres seront égaux à 0.

Ce n'est pas tout; envisageons l'une quelconque des v_t , $a_{\setminus}$ par exemple, et une quelconque des v , $a_{q \sim 2}$ par exemple.

De deux choses, l'une : ou bien $a_{l \sim 2}$ n'appartiendra pas à $a_{\setminus}$, et dans ce cas tous les produits

seront nuls, car si a_{qrx} n'appartient pas à a_{qiz} le premier facteur est nul; si, au contraire, a_{y1} appartient à $a_{\setminus}$, la variété $a_{\setminus \sim 2}$

ne peut pas appartenir à $aq \sim x$ (sans quoi, elle appartiendrait à $a?$, contrairement à l'hypothèse), et le second facteur doit être nul.

Ou bien $a \setminus r_2$ appartiendra à $a \setminus \setminus$ mais alors nous pourrions raisonner sur la variété $a \setminus y$ comme nous raisonnions tout à l'heure sur la variété V , et nous concluons que $a \setminus \sim 2$ doit séparer, l'une de l'autre, deux des variétés $v _x$, qui appartiennent à $a?$, et deux seulement : soient $a \setminus \sim 1$ et $aq \setminus$

Parmi les produits (4) il n'y en aura que deux qui ne seront pas nuls, à savoir

$$E? S_5^{-1}, E? Zq \setminus$$

Pour tous les autres, en effet, ou bien $a?^{-1}$ n'appartiendra pas à $a \setminus$, ou bien $a \setminus \sim 2$ n'appartiendra pas à $aq \setminus$

Ces deux produits sont d'ailleurs égaux : l'un à $-J^{-1}$, l'autre à -1 . On aura donc dans tous les cas :

$$coMFL \& knn \ 9$$

Nous avons de même

et, plus généralement, quel que soit k :

$$(5_{bio} \ Z < i = o -$$

La relation (5_{his}) peut être regardée, à un certain point de vue, comme un cas particulier de la relation (5).

Soit P la portion de l'espace à $p - f - 1$ dimensions, limitée par le polyèdre V ; alors la frontière complète de P se composera des $d_i \bullet$ variétés v , qui, par leur ensemble, forment $V \setminus$ nous pourrions donc écrire, au sens de la congruence (3),

(3bis) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

ou encore

où les nombres λ_i seront tous, par définition, égaux à 1. A ce compte, la relation (5bis), qui peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0,$$

n'est plus qu'un cas particulier de la relation (5).

Nous avons, ensuite, chaque v_i qui a pour limites deux v , et deux seulement, ce qui nous donne des congruences (5) de la forme :

et une relation analogue à (5) et (5bis) :

qui rentrerait encore dans la forme (5), en convenant de faire tous les λ_i égaux à $-\frac{1}{n}$.

10 H. POINCARÉ.

D'autre part, envisageons l'une des a_i , toutes les a_{i+1} auxquelles elle sert de frontière; toutes les a_{i+2} , auxquelles ces a_{i+1} servent de frontières et ainsi de suite. L'ensemble de toutes ces variétés constituera ce que nous avons appelé un aster (Analysis situs, page 106).

Nous avons vu (loc. cit., page 107) que le polyèdre qui correspond à un aster, doit être simplement connexe. Ainsi une condition pour qu'un polyèdre puisse correspondre à un schéma donné, c'est que les polyèdres qui correspondent aux différents asters, d'après la convention de la page 107 de Y Analysis situs, soient tous simplement connexes.

Considérons maintenant une des a_i toutes les a_{q+1} qui lui servent de frontières, les a_{q+2} qui servent de frontières à ces a_{q+1} et ainsi de suite. Cet ensemble de variétés constituera un polyèdre à q dimensions; nous supposerons que ce polyèdre soit simplement connexe.

Ce n'est plus là une condition nécessaire pour qu'un polyèdre puisse correspondre au schéma; c'est simplement une condition que, sauf avis contraire, nous supposerons remplie.

Pour éclairer ces définitions par quelques exemples, voyons d'abord quel est le schéma du tétraèdre généralisé, défini à la page 105 (Analysis situs).

Les faces de ce tétraèdre seront définies par les $n - 1$ équations :

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0 \quad (6)$$

On obtiendra les a_i en supprimant $q - 1$ de ces équations; pour définir le sens de la variété a_i , nous supposerons qu'on supprime ces $q - 1$ équations, mais sans changer l'ordre des $n - q$ équations restantes.

Cela posé, considérons la relation de a_i et de a_{q+1} et cherchons à déterminer le nombre s_i ...

D'abord, pour que a_{q+1} appartienne à a_i , il faut que a_{q+1} soit définie par les $n - q$ équations qui définissent a_i , auxquelles on devra adjoindre une $(n - q - 1)$ ème équation, prise parmi les équations (6). S'il n'est pas ainsi, le nombre s_i sera nul.

COLFLEMEin À I II

Supposons, donc, que a_i obtenu en supprimant les $q - 1$ équations

tions qui occupent Les

rangs.

Supposons que $f|$ soit obtenue en supprimant, en outre, la f_i^{**} équation; alors le nombre e_j , dont la valeur absolue sera toujours égale à i , aura même signe que le produit:

$(P-a.XP-O \dots - \langle,)$.

Il est aisé de vérifier alors que la relation (5) a lieu.

Considérons, en effet, la variété $a \sim 2$, obtenue en supprimant les équations de rang $i x_1, a_2, \dots, a$ et la variété $a] >$ obtenue en supprimant, en outre, les équations de rang $(i$ et y . (Il est clair que si $a \sim$ ne s'obtenait pas en supprimant les mêmes équations que pour $a \sim 2$, plus deux autres, tous les produits $s_j.e^1$ seraient nuls).

Dans ce cas, tous ces produits seront encore nuls, sauf deux :

qui correspondront aux deux variétés $a \sim 1$ et $a \sim 2$, obtenues respectivement en supprimant les équations de rang $\langle, x, \dots, \langle, i$ et celles de rang $xx, aa, \dots, o^{\wedge}, y$.

Alors les quatre nombres

» $I > I, f c' 1, 2 > 2, J t$

auront respectivement même signe que :

$(i-PXy-O (y - \langle) \dots (i-vA (y - \langle,) (i - aJ \dots (y - \langle, _ ,) \bullet$

12 H. PO INC A RÉ.

On vérifie ainsi que les deux produits, qui ne sont pas nuls, sont égaux et de signe contraire. c. q. f. d. (*)

Nombres de Betti réduits.

Je m'en vais chercher, maintenant, les nombres de B e t t i , relatifs à un polyèdre, mais afin d'éviter l'équivoque, dont j'ai signalé plus haut la possibilité, je conviendrai de définir ces nombres de la seconde manière, c'est-à-dire que $P - i$ sera le nombre de variétés fermées à q dimensions, que l'on peut tracer sur notre polyèdre V et qui sont linéairement indépendantes, je veux dire, qui ne sont liées par aucune homologie à coefficients entiers, au sens de YAnalysis situs, page 18.

Mais je me proposerai d'abord de déterminer le nombre $P' - i$ des variétés à q dimensions, fermées et linéairement indépendantes, que l'on peut tracer sur notre polyèdre V , mais en nous bornant à celles qui sont des combinaisons des variétés v .

Le nombre P' sera, alors, ce que j' appellerai le nombre de Betti réduit.

Les variétés à q dimensions, qui sont des combinaisons des v , pourront évidemment être représentées par :

$\sum a_i v_i$, les a_i étant des coefficients entiers et les lettres a_i continuant à dési-

gner les différentes variétés v .

Quelle est d'abord la condition pour que la variété $\sum a_i v_i$ soit fermée ?

Pour cela, cherchons quelles sont les variétés v , qui forment les frontières de cette variété. Pour les trouver, il suffit évidemment de remplacer a_i par sa valeur donnée par la congruence (3).

(*) Le polyèdre ainsi défini, ainsi que tout polyèdre à n dimensions, limité par $n-1$ variétés planes, s'appellera tétraèdre généralisé rectiligne. J'appellerai tétraèdre généralisé toute variété homéomorphe à un tétraèdre généralisé rectiligne.

COMPLÉMENT : US

Cet ensemble de variétés fm.:tiu.. „_ra donc donné par la formule :

• / Pour que la variété $\wedge \setminus \circ$. soit fermée, il suffit, donc, que l'on

ait identiquement :

$$ixv!, "r' = ">$$

c'est-à-dire que, quel que soit /, on ait :

En d'autres termes, la variété $\wedge \setminus a \setminus$ sera* fermée, si l'on a:

en vertu des congruences (3, q); j'appelle ainsi celles des congruences (3), qui lient les $a]$ aux $aq \sim l$.

Cherchons maintenant les homologies qui peuvent exister entre les variétés $a]$. On obtiendra toutes ces homologies, en combinant celles que l'on peut obtenir de la façon suivante.

Considérons la congruence :

qui, d'après la convention que nous venons de faire, est une congruence (3, q -J- 1); remplaçons le signe 39 par «-o, et le premier membre par zéro; il viendra :

$(9, g) \text{ IC}^{\sim \circ} -$

Cette homologie aura évidemment lieu, puisque, par définition, elle exprime, comme la congruence (8), que les $a]$ forment la frontière complète de $tf|+I$.

$i/\backslash h$. poincar!

Nous démontrerons plus loin (§ 6), qu'il n'y en a pas d'autres. Je désigne cette homologie par $(9, q)$ pour marquer qu'elle a lieu entre les $a\backslash$.

Je dis que si l'homologie $(9, q)$ a lieu, la congruence

$(10, q) \text{ } 2xr^{\wedge}0$

sera une conséquence des congruences $(3, q)$.

Remplaçons, en effet, les $a\backslash$ par leurs valeurs, données par ces congruences $(3, q\sim)$; il viendra :

Le second membre est identiquement nul en vertu des relations (5).

Cela posé, soit a le nombre des variétés $a\backslash\backslash$ soit a' le nombre de ces variétés qui restent distinctes, si l'on ne regarde pas comme distinctes des variétés liées par une homologie de la forme $(9, q)$; soit a'' le nombre de ces variétés qui restent distinctes, si l'on ne regarde pas comme distinctes des variétés liées par une congruence de la forme $(7, q)$.

Il résulte de ces définitions :

1° qu'il y a $a - a'$ homologies distinctes de la forme $(9, q)$;

2° qu'il y a $a - a''$ congruences distinctes de la forme $(7, q)$;

30 que

car si plusieurs a_i sont liées par une homologie de la forme $(9, q)$, elles seront liées également par la congruence $(10, q)$ correspondante. Enfin le nombre cherché $F - 1$ est égal à

car les variétés fermées de la forme $\wedge^T \setminus a_i$, réellement distinctes, sont

en nombre égal à celui des congruences $(7, q)$ c'est-à-dire au nombre

Le nombre $F - 1$ est le nombre de ces variétés qui restent

de $a - a''$.

COMPLÉMENT $\setminus$: US. i ;

distinctes, en ne regardant pas connue distinctes celles qui sont liées par une homologie $(<j, q)$. Or le nombre de $c_i - \%$;

nous avons donc :

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des variétés V , au nombre de i et

les congruences (3) correspondantes. Formons les homologies correspondantes :

$$z \ll t / \langle r \sim \circ \rangle z \ll ii \langle r \sim \circ \rangle \bullet \bullet \bullet \blacksquare z^{\wedge p} \sim \circ -$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ces homologies soient distinctes, c'est que l'on n'ait entre les variétés $a_1, a_2, \dots, a_n$ aucune congruence de la forme :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0.$$

Le nombre des homologies distinctes est donc égal au nombre des a distinctes, en tenant compte des congruences (7, q). Donc :

OU

[qi

jf_i

= Cf.'

Nous aurons d'autre part

Si, en effet, on peut aller d'un sommet quelconque a^* à un autre

lé H. POINCARÉ.

sommet quelconque a^o y en suivant des arêtes (c'est-à-dire si le polyèdre est d'un seul tenant), on aura l'homologie :

c'est-à-dire qu'il n'y aura qu'un seul sommet distinct, en tenant compte des homologies.

Envisageons maintenant la congruence (3bis)

l'homologie correspondante s'écrit :

et il n'y a pas d'autre homologie (9, p). Donc

$a^* = al - f - \ddot{p} P'$

De plus, le polyèdre étant d'un seul tenant, une seule des combinaisons y "kta\ pourra être fermée, c'est le polyèdre lui-même dans son entier, représenté par la formule 2 ar

Nous aurons donc une seule congruence de la forme (7, j>) :

Donc

Nous avons donc la série d'équations :

$$a_0 = 0 >$$

$$\langle 0 = a_0 + a_1 \rangle$$

GOMPLÉMENTI . L*AH 17

d'où l'on tire aisément :

$$*p - v > + v \rangle \dots \pm a' \wedge \blacksquare \bullet = ' - r/J - 0 + \dots \dots = F (\wedge - 0 \pm (\wedge - 0$$

Fii

tout à fait analogue à la formule :

que nous avons trouvée dans YAnalysis sitiis, page 121.

S iv.

Subdivision fies Polyèdres.

Considérons un polyèdre V, à p dimensions, avec ses diverses variétés :

$$a^* \text{ afr-} \setminus \dots, a \setminus. a_0.$$

Supposons que l'on subdivise chacune des variétés af en plusieurs autres, que j'appellerai les b_i \ soient ensuite /'[_I les variétés à p - 1 dimensions, qui servent de frontière aux b_i \ \ soient b_f ~ a les variétés p - 2 dimensions, qui servent de frontières aux /> [_1; ... et, enfin, b^o les variétés a 0 dimensions (sommets), qui servent de frontières aux b] (arêtes).

On aura ainsi un nouveau polyèdre V, qui sera dérivé du polyèdre F, au sens que j'ai attaché à ce mot a la page 101 de . lysis

situs.

On peut supposer, d'ailleurs, que si une variété v , simplement ou multiplement connexe, sert de frontière à deux variétés elle ne forme pas forcément une seule des variétés $\mathbb{R}^n$, mais peut être elle-même subdivisée en plusieurs variétés $b \sim z$. Dans ce cas, pour reprendre la terminologie des pages 102 et 103 de VAtuUy-sis situs, ces variétés $M-1$ seront irrégulières et les variétés $/-p-$, qui les séparent les unes des autres, seront singulières,

I» H. PO INC ARE.

Cela posé, recherchons une classification des variétés $b \setminus$.

Si une variété $b \setminus$ ne fait pas partie d'une des variétés a_q , elle fera partie d'une des variétés $a_{q+} \setminus$ ou d'une des variétés $a_{q+1}, \dots$, ou, tout au moins, d'une des variétés a_p .

Peut-elle faire partie à la fois de deux variétés a^{TM} et a^{TM} ?

D'après la façon dont la subdivision a été supposée faite, en ajoutant toujours de nouvelles frontières, sans en supprimer jamais, cela ne pourra arriver que si ces deux variétés a^{TM} et a^{TM} sont contigües et ont une frontière commune $a_1]!^1$, et si $b \setminus$ fait partie de cette frontière $a^{TM}!^1$.

Je suppose alors que $b \setminus$ fasse partie de $ah-$, et ne fasse partie d'aucune variété a^{TM} , où $m < ^h$. La variété a . existe toujours et l'on a h^q ; de plus, la variété ah , est unique, c'est-à-dire que $b \setminus$ ne peut faire partie à la fois de deux variétés différentes ah et $a \setminus$.

Si donc je conviens de ranger dans une même classe toutes les variétés $b \setminus$, qui font partie de la variété a , , sans faire partie

d'aucune des variétés a^{TM} où $m < h$, toute variété b fera partie d'une classe et d'une seule.

Je pourrai alors représenter b par une notation à quatre indices

l'indice q indique le nombre des dimensions de b les indices h et j indiquent que b fait partie de la classe a ; et l'indice h sert à distinguer les unes des autres les différentes variétés d'une même classe. On a $h > q$.

Nous aurons, alors, pour définir le polyèdre V et sa subdivision : 1° Les congruences $(3, q)$, relatives au polyèdre V , que j'écrirai :

$$(3, q) a^{i \setminus ay}$$

2° Les équations qui donnent la subdivision de la variété a : $(1, q, i) aq = J_B(q, q, i, k)$.

3° Les congruences analogues aux congruences (3) , mais relatives

au polyèdre V ; je les écrirai :

$$(2, q, h, j, k) B_O h b, y, k = *Z.ZB(q - i, //, /',$$

Les $\mathcal{E}$ sont des nombres égaux à ± 1 , $< m$ à $'<$; ils dépendent des sept indices $<, /, y, k, //, j', le'$, de sorte que je les écrirai, quand cela sera nécessaire, sous la forme :

$$\mathcal{E} \& /;, /, fe, //, y', *).$$

Sous le signe $\mathcal{E}$, les indices $//, ', fe'$ peuvent prendre toutes les valeurs. Observons, cependant, que les $B_C q - i$, qui servent de frontière à $B(q, h, y, k)$, doivent, comme $B(q, h, j, k)$, faire partie

de ah ; mais pourront faire partie d'autres variétés fil d'un nombre moindre de dimensions, mais faisant partie de a \ On aura donc

$$fe'^{Jb}, h'^q - i.$$

D'ailleurs si $/?' = h$, on aura $y' = y$.

Pour que les relations (i), (2), (3) puissent définir une véritable subdivision, elles doivent satisfaire à certaines conditions. Les relations (1, q, i), (3, q, i) donnent

Si dans le premier membre je remplace $\mathcal{L}((7, y, 1, \hat{A}-)$ par sa valeur, tirée de (2, #, q, i, k), et $rt?_1$ par sa valeur tirée de (1, q — 1, ;'), les deux membres devront devenir identique; voilà une première condition, qui est évidente; elle n'est d'ailleurs pas suffisante.

Influence de la subdivision sur les nombres de Jietti réduits.

Soit $2^*B(q, b, j, k)$ une combinaison des variétés $i?$, qui représente une variété fermée à q dimensions, de telle sorte que l'on

20 H. PO INC ARE.

ait, avec nos notations,

$$(1) Z \ll 5fo h, ;, k) = o, (h^q)$$

Parmi les variétés b \ qui figurent dans le premier membre de (i), réunissons celles qui appartiennent à une même classe. Soit

$$SaB(q, h, j, h)$$

l'ensemble de celles qui appartiennent à la classe ah ; le signe de sommation S signifie, donc, qu'on ne prend que les variétés d'une même classe, tandis que le signe $\wedge$ signifie qu'on les prend toutes. On aura alors:

$$(2) SxB(q, h, j, k) sLM(\hat{I} - I, V, j', n$$

c'est-à-dire que la variété à $q - i$ dimensions $B(q - i, h', j', k')$ forme la frontière complète de la variété à q dimensions

Les variétés à K doivent appartenir à la frontière de a' , ou se confondre avec $ah \setminus$ en effet, $B(q - i, h', j', k')$ appartient à $a'.$, et, d'autre part, à l'une des $B(q, h, j, F)$, qui fait lui-même partie de a_1 , si donc $c \&$ ne faisait pas partie de $ah.$, $B(q - i, //, /', \&')$ ferait partie d'une variété a^{tm} , partie commune à $ah.$ et $a_1'.$, et qui aurait moins de h' dimensions. Cela est contraire à la définition que nous avons donnée des classes.

D'autre part $ah.'$, ne peut pas se confondre avec $ah-$.

Soit, en effet,

$$S^{\wedge} Bfa\ hs, \] \setminus, \ \& J = \wedge^* B(q, h, j, k) - S^* B(q, h, j, k)$$

l'ensemble des variétés qui figurent dans le premier membre de (i), et qui n'appartiennent pas à la classe $ah.$; on aura évidemment :

$$st^* tB(q > *, \ll L > K) \wedge -iRj - 1, v, y, n$$

COMPLÉMENT $\setminus r/v.$ 21

Donc $B(q - I, //, j', k')$ doit faire partie à la fois de tf^* et de l'une des $B(q, hx, /, , kt)$, et, par conséquent, de l'une des $a) \setminus$, différentes de a_1' . Si doue $a.'$, se confondait avec

$$B(q-i, //, ;', lc') = B(q-i, h, j, k)$$

devrait appartenir à une variété $</$, partie commune à ah et $a)\backslash$. De deux choses, l'une : ou bien a . ne ferait pas partie de $ar\backslash$, et alors on aurait encore $m < /;$, ce qui serait encore contraire à la définition des classes; ou bien a . ferait partie de $a)\backslash$, et alors on aurait $bt > h$. Supposons que j'ai choisi la classe a ., qui correspond au plus grand nombre $/;$. Alors on ne pourra pas avoir $bt \wedge > /;$, et $a/$, devra appartenir à la frontière de $a1'$.

La congruence (2) entraîne l'homologie

comme, d'autre part, a , est simplement connexe et que toutes les variétés $B(q-1, //, /', k')$ sont situées sur la frontière de a . premier membre de (3), représentant une variété fermée à $q-1$ dimensions, située sur cette frontière, formera la frontière complète d'une variété à q dimensions

$$XyB(q, b'', j'', k''),$$

également située sur la frontière de a .. (Il y aurait exception si l'on avait $/; = </$). De sorte qu'on aura la congruence

$$(4) \text{ } lM(\ddot{i}-i, h', /', *) \text{ } s\ddot{l}iD (.7, //', /'', *'') \blacksquare$$

D'ailleurs, comme $B(q, h'', j'', k'')$ est sur la frontière de a en sera de même de $arZ\backslash$ car si $B(q > h'', j'', k'')$ fait partie à la fois de $a'..'$ et d'une variété $a'..-$, faisant partie de la frontière de a . bien $a'p$ ne fait pas partie de $a\mathcal{L}$, et alors B devrait faire partie de a^{TM} , où $m < h''$, et nous avons vu que cela était impossible.

§2 H. POINCARÉ.

On a donc

Les congruences (2) et (4) donnent

$$S^*B(q, h, j, k) \wedge J_{lB}(q, h'', j'', k''),$$

et, comme toutes les variétés qui figurent dans cette congruence, font partie de a , ou de sa frontière, comme, d'autre part, ah . est simplement connexe, on aura l'homologie

$$SxB(q, h, ;, k) \wedge XlB(q, h'', j'', F)-$$

On peut, donc, remplacer, dans le premier membre de (1), l'ensemble des termes $SaB\zeta q, h, j, ii$) par l'ensemble des termes

Si on opère de même pour toutes les classes correspondantes à une même valeur de $/;$, la plus grande de toutes, on aura remplacé le premier membre de (1) par

$$ZMfo K > U^* K \setminus$$

où la plus grande valeur de h_2 sera plus petite que la plus grande valeur de h . On aura, d'ailleurs, l'homologie

$$Za_5(? > h h K)^{TM} Z^{\wedge} - Sfe K > j \setminus \gg h) -$$

En continuant de la sorte, on pourra diminuer encore la plus grande valeur de h . On ne sera arrêté que quand on aura partout $h = q$.

On peut donc, finalement, remplacer le premier membre de (1) par :

$$COMF'LI'.MI.*;; 2j$$

et on aura d'ailleurs :

$$(5) !^{**} (? , h, i; k) < \blacksquare 1/ B - fi / \# > I$$

Cela posé, dans le premier membre de $(V >)$ prenons les COQ^* congruences qui appartiennent à une classe déterminée :

Nous aurons :

$$(7) \ 5a0 \ 5fo, ft; o, ko) \ sLM(\hat{i}^-; \cdot / ' \cdot \cdot \cdot) \bullet$$

Nous verrions, comme plus haut, que $a?$ doit faire partie de la frontière de $rtjo$, d'où $bo < V$ (et, comme $b'o \times 7 - 1$, on aura

Soit alors :

l'équation $(1, q, yo)$, qui définit la subdivision de la variété a , et soient $B\zeta q, q, jo, 1)$ et $B(q, q, jo, 2)$ deux variétés, figurant dans le second membre de (S) ; je dis qu'elles devront figurer dans le premier membre de (6) avec le même coefficient ao .

Supposons, d'abord, que ces deux variétés soient limitrophes; parmi les variétés à $q - 1$ dimensions qui leur serviront de frontière commune, il y en aura, au moins, une qui n'appartiendra pas à la frontière de ajo , qui fera, par conséquent, partie de la classe $a^{\wedge}o$.

Soit $B(q - 1, q, jo, 1)$ cette variété: elle n'appartiendra pas à aucune autre des variétés $B(q, q, ;o, \Delta)$.

Soit alors

$$G?) \ B(g, q, jo, 2)^{\wedge} \in M-$$

les congruences $(2, q, q, jo, 1)$, $(2, q, q, jo, 2)$, $(2, q, q, ;o, \&)$, qui nous font connaître les frontières des variétés $B(q, q, /o)$. Voyons avec quel coefficient $\in$ la variété $B(q - 1, q, jo, 1)$ figurera dans ces congruences.

D'après ce que nous venons de voir, ce sera avec le coefficient $-j-1$ dans la première, avec le coefficient -1 dans la seconde, avec le coefficient 0 dans les autres.

Soient donc a_i et a_2 les valeurs des coefficients a_0 , correspondantes aux deux variétés $B(q, q, j_0, 1)$ et $B(q, q, j_0, 2)$.

La combinaison des congruences (9) nous fournira une congruence

$$(10) SxOB(q, q, j_0, U^{si}),$$

qui devra être identique à (7), et le coefficient s , avec lequel figurera $B(q-1, q, j_0, 1)$ dans le second membre de (10), sera évidemment $a_t - a_{..}$. Mais $B(q-1, q, j_0, 1)$ ne peut pas figurer dans le second membre de (7), puisque nous avons vu que dans ce second membre on doit avoir $h'o = q-1$. Donc on doit avoir $a_i - a_2 = 0$.

Ainsi les deux variétés $B(q, q, j_0, 1)$ et $B(q, q, j_0, 2)$ devront avoir même coefficient a_0 , si elles sont limitrophes. Cela sera encore vrai, si elles ne le sont pas, parce que aqj_0 étant d'un seul tenant, on pourra passer d'une de ces variétés à l'autre par une suite d'autres variétés analogues, chacune d'elles étant limitrophe de celle qui la précède.

Donc le coefficient a_0 est le même pour toutes nos variétés. D'où :

$$s \ll O \# (? , h h > h) = a_0 Z_5 f e v > / o > h) = a_0 4 > -$$

La congruence (6) et l'homologie (5) peuvent donc s'écrire:
 $(5) b_{io} I. \ll B(q, h, j, *) \sim 2 > „ 4,$

Si un nombre quelconque de congruences de la forme (1) sont distinctes, c'est-à-dire si aucune combinaison linéaire de leurs premiers

COML'J.I'.M.I.M \ !.\ / , -, ITL'S.

membres m'est pas homologue à 0, je d i , .. seront également distinctes, et réciproquement

En effet la comparaison des relations ($\setminus$ otre

que si l'on a

on aura également

et réciproquement.

Il résulte de là que si les a_i et les b_i sont simplement connexes les nombres de Betti réduits sont les mêmes pour les deux polyèdres V et V' .

Soit maintenant W une variété quelconque, fermée, à q dimensions, située sur V . On peut toujours construire un polyèdre W' , dérivé de V , au sens de la page loi de YAnalysis siUis, et tel que W soit une combinaison des b_i .

Nous devons donc conclure que: si les a_i sont simplement connexes, les nombres de Betti réduits, relatifs au polyèdre V , sont identiques aux nombres de Betti proprement dits, de finis de la seconde mai lier e.

S vi.

Retour sur les démonstrations du § III.

Nous avons à revenir ici sur un point essentiel du raisonnement qui précède. J'ai dit plus haut qu'il n'y avait d'autre homologie que les homologies $(9, </>)$, obtenues au § 3. Cela n'est pas évident. ne serait pas même toujours vrai, si nous ne supposions pas k simplement connexes.

Démontrons-le d'abord pour un polyèdre P , dans l'espace à 4 dimensions.

Considérons un certain nombre de variétés $\bullet:\bullet$, ou «', appartenant à ce polyèdre; je les appellerai ses $l \setminus \text{ccs}$, de même que les $a \setminus \text{les } a \setminus$ et les $a]$ de ce polyèdre P pourront s'appeler ses cases, ses a ses sommets.

26 H. PO INC ARE.

Supposons que l'on ait entre ces faces $a]$ une homologie

Cette homologie signifie qu'il existe une variété à 3 dimensions, F , faisant partie de P , et admettant $/a)$ comme frontière complète.

Je dis que V se compose d'un certain nombre de cases de P .

Si, en effet, un point d'une case appartient à F , il en sera de même de tout autre point de cette case, car on peut aller du premier point au second, sans rencontrer aucune face et, par conséquent, sans rencontrer la frontière de V et sans sortir de V .

Le théorème est donc évident en ce qui concerne les polyèdres de l'espace à 4 dimensions et les homologies entre les faces.

Soit maintenant une homologie entre les arêtes :

«NJ o,

les b_1 étant un certain nombre d'arêtes $a \setminus$. Cela veut dire qu'il existe une variété à 2 dimensions, V , dont $2 \cdot b_1$ est la frontière 'complète.

Je désignerai par $V(a \setminus)$ l'ensemble des points communs à V et à a).

Les $V(a \setminus)$ seront des variétés à 2 dimensions, dont la frontière sera formée soit par quelques-unes des arêtes b_1 , soit par les $F(a_2)$, les a_2 , étant les faces qui servent de frontière à la case $a \setminus$. On ne peut, en effet, sortir de $V(a \setminus)$ qu'en sortant de V par sa frontière, c'est-à-dire, en traversant une des b_1 , ou qu'en sortant de $a \setminus$ par sa frontière, c'est-à-dire en traversant une face a_2 , et, comme on reste sur V , en traversant une des lignes $V(a_2 \setminus)$

La variété totale V est formée de l'ensemble des $V(a \setminus)$.

Considérons maintenant $V(a_2 \setminus)$ nous devons distinguer deux cas :

1° ou bien aucune des arêtes b_1 n'appartient à a_2 . Nous ne pourrions alors sortir de $V(a_2 \setminus)$, qu'en sortant de a_2 , c'est-à-dire en traversant une des arêtes a_1 .; la frontière de $V(a_2 \setminus)$ est donc formée par les $V(a \setminus)$.

2° ou bien une (ou plusieurs) arête b_1 fait partie de a_2 .

Cas 1° ou bien une (ou plusieurs) arête b_1 fait partie de a_2 .
cas 2° ou bien une (ou plusieurs) arête b_1 fait partie de a_2 .
cas 3° ou bien une (ou plusieurs) arête b_1 fait partie de a_2 .

$V(a_2 \setminus)$ se compose, outre l'arête b_1 d'autres lignes; ces lignes auront pour frontières des points $V(a \setminus)$, <>u des points situés sur b_1 (points situés sur b_1 , et où les autres lignes, dont

viennent se terminer sur l'arête $/>$, , seront ce que j'appellerai des points iiодаux.

Dans tous les cas V (j) sera une ligne ou un ensemble de lignes; si, en effet, V ($\mathcal{A}2$;)) était une surface, c'est que a^* , ou une portion de cette face, ferait partie de V . Mais j'ai le droit de déformer V , pourvu que je ne change pas sa frontière $^{\wedge}_{bt}$; je puis toujours, par une déformation infiniment petite, éviter qu'une région de partie de y .

Pour la même raison je puis toujours supposer que $y(a \setminus)$ se réduit à un ou plusieurs points, sauf si $a]$ est l'une des arêtes bt , auquel cas $y(a])$ sera cette arête elle-même.

Cela posé, je puis déformer F :

i° de manière que tous les $y(a])$ [autres que $F(/>,)]$ soient des sommets. Soit a^o un sommet de $a]$. Soit M l'un des points dont se compose $y(a \setminus)$ autour du point M et sur V décrivons une petite courbe fermée C . Soit K l'aire infiniment petite découpée sur V par cette courbe C . Construisons une sorte de manchon, infiniment délié, entourant l'arête $a \setminus$ et passant par C . Par le sommet a^o je mène une surface quelconque S ; elle viendra découper sur le manchon une courbe fermée très petite C . Soit K' la portion de la surface S limitée par C ; soit H la surface du manchon comprise entre C et C . On figurera ainsi une sorte de tambour, dont H sera la surface latérale, $\mathcal{A}'$ et K' les deux bases.

Considérons alors la variété

Cette variété aura même frontière que $V \setminus$ mais elle ne cou; plus $a)$ en M , puisqu'on a supprimé la portion $\mathcal{A}'$ de T , où se trou-

vait ce point M. En revanche, H ne coupera pas l'arête a), et À" coupera cette arête en a°.

En opérant de même sur tous les points d'intersection de V et de a), on amènerait tous ces points à coïncider avec a°.

2° de manière que tous les points nodaux soient des sommets. Soit, en effet, a] une face passant par l'arête bl ; l'intersection de

V et a) comprendra, outre b1 , d'autres lignes; soit c l'une de ces lignes, venant se terminer sur b1 en un point nodal D. Soient a° et a°k les deux sommets de bs. Par b1 je fais passer une surface 5, faisant partie de P et ne coupant pas a]. Comme a° et a°k sont sur la frontière de V, je joins ces deux points par une ligne L, située sur V et s'écartant peu de bx. Cette ligne s'écartant peu de bl} je puis mener par L une autre surface 5', qui ne passera pas par bx , mais qui coupera 5 suivant une ligne L', très peu différente de br Ces trois lignes L, bI et L' auront mêmes extrémités a° et a\.

Soit V1 la portion de V, comprise entre L et b1 ; soit 5x la portion de S, comprise entre L' et blt et S2 la portion de S', comprise entre L et U.

Je remplace V par

V a mêmes frontières que V, mais V' (a)) ne présente plus de points nodaux, en dehors de a° et a\ car si une ligne analogue à c venait aboutir à un point nodal, situé entre a° et a°h , la portion de cette ligne c, voisine de ce point nodal, devrait se trouver sur Si , ce qui est impossible, puisque 5 ne coupe pas a\.

En résumé : nous pouvons toujours supposer que les $V\{a^\wedge\}$ sont des lignes, dont les extrémités sont des sommets de a\.

Soit alors L une des lignes, dont se compose $V \cap a]$, ayant pour extrémités deux sommets a^o et a^oh de a^* . On peut aller de a^o à a^o , en suivant le périmètre de $a]$; soit $\hat{_}$ l'ensemble des arêtes de $a)$, comprises entre a^o et a^ok . Comme la face $a]$ est supposée simplement connexe, la ligne L la divisera en deux parties. Soit $Q_$ l'une de ces parties, comprise entre L et $a[$.

Soient $a>$ et $a?$ les deux cases séparées par $a\backslash$. Par les arêtes jT $a)n$ je fais passer une surface 5 , peu différente de la face $a]$ et située toute entière dans la case a_3 ; par les mêmes arêtes je fais passer une seconde

Ip d Ml .'.T À L'AN 29

surface S' , peu différente de $<i]$ et située dans la case $tf^{\wedge}$; ces deux surfaces S et $.S'$ couperont $/$, suivant deu) / i dif-

férentes de L , et avant pour extrén ités a'' et S , la portion

de S comprise entre $Aflj$, et $/$. ; OU $.Y$ la poition de S' OOm-
prtte entre $/ d\backslash$. et $L \backslash$ soit $V\backslash$ la portion $dl /'$ comprise entre c 'est
sur $V t$ que se trouvera $/..$ Soit maintenant

$$r = v - vt + s, + s;$$

F' a mêmes frontières que F ; F' ne passe plus par L , mais en revanche passe pat les arêtes $/ </'$.

En opérant de la même manière pour toutes les lignes telles que L , on voit qu'on peut toujours supposer que tous les $/ (w'J$ se réduisent à des combinaisons d'arêtes.

Comme les frontières de $V \{a])$ sont ou des bt ou des $/'(</')$, on voit que les frontières des $V(a')$ sont des combinaisons d'arêtes de P , et, bien entendu, toutes ces arêtes doivent apparte-

nir a a]. Ainsi donc $V\mathcal{C}a)$) est une surface simplement ou multi-plement connexe, limitée par une ou plusieurs lignes fermées, qui, elles-mêmes, sont des combinaisons d'arêtes de a).

Comme la case a\ est simplement connexe, ces lignes fers subdiviseront la surlace de cette case en un certain nombre de régions, et comme ces lignes fermées sont des combinaisons d'arêtes de ces régions seront des combinaisons des faces de d\.

On pourra toujours trouver une combinaison de ces régions, qui aura mêmes frontières que $V\mathcal{C}a)$, Supposons, par exemple, que la frontière de $V(a\}^{\wedge})$ se compose de trois lignes fermées L, L', L.\ la ligne L divisera la sur lace de a] en deux régions R et R'; les lignes LI et L2 diviseront de même cette surface en deux régions Rt et Ri , ou $R^{\wedge}$ et R2. Je suppose qu'en parcourant L dans un certain sens, on ait à sa gauche $V(n^{\wedge})$, et R et R' à sa droite; je suppose de même qu'en parcourant Lt et L, dans un sens convenable, en ait à sa gauche $Jr(a)]$ et Rti ou $V(aQ$ et R2.

Alors la variété R -j- Rt -j- R, aura même frontière que $/*(-o:$ on pourra donc remplacer $V\mathcal{C}aQ$ par R -j- Rt -f- R2.

30 H. POtNCARE.

En opérant de la même manière sur tous les $V(a)]$, on aura remplacé V par une autre variété, qui aura même frontière Z-b1, et qui sera une combinaison de faces de P.

Le théorème est donc démontré en ce qui concerne les polyèdres de l'espace à 4 dimensions et les homologies entre les arêtes.

On le démontrerait de même pour un polyèdre quelconque.

S vu.

Polyèdre réciproque.

Soit P un polyèdre dans l'espace à 4 dimensions; ce polyèdre sera subdivisé en un certain nombre de variétés v , que j'appellerai ses cases, et que je désignerai par a . Ces cases seront séparées les unes des autres par des variétés v_2 ou a , que j'appellerai les faces; ces faces auront pour frontières des variétés v_1 , ou a , que j'appellerai les arêtes, et les extrémités des arêtes seront des points v_0 ou $\#$, que j'appellerai les sommets.

Je supposerai, bien entendu, que les cases et les faces sont simplement connexes.

Marquons, à l'intérieur de chaque case a , un point $P(aV)$; à l'intérieur de chaque face a , un point $P(a_2)$; sur chaque arête a , un point $P(a_1)$; chaque arête se trouvera ainsi partagée en deux parties par le point P (adjoignons par des lignes le point $P(a_1)$ à chacun des sommets de la face a) et à chacun des points $P(V)$, correspondant aux diverses arêtes a_1 , de la face a_2 . Toutes ces lignes devront être tracées sur la face a_2 . Cette face sera ainsi partagée en triangles, et le nombre de ces triangles sera double du nombre des arêtes de a_2 . Nous ferons de même pour toutes les autres faces.

Considérons maintenant une case a ; décomposons en triangles T toutes les faces a_2 de cette case, ainsi que nous venons de le dire. Construisons des triangles curvilignes, ayant pour sommet commun le point $P(a_3)$ et pour bases les différents côtés des différents triangles T . La case a sera ainsi décomposée en tétraèdres, ayant $P(a_3)$ pour sommet commun et pour bases les différents triangles T .

■i-i.r mi. m . : 31

Nous distin de

no, tétraèdres) :

celles de la I ' SOIte JO ommet n[i un ;

cliaque arête sera ainsi formée de d le la 1 "Tte;

celles de l.i 2* sorte joindront un p

PC

Les lignes de la 21 sorte peuvent s'aCCOUpler deux i deux deux manières :

1° Ce que j'appellerai la lime b\ sera formée de d:ux lit* la 2dc sorte, joignant un même point $P(tf^*)$ a deux points . ' $P(flJ)$, correspondant aux deux cases a] et a\ séparées par la L Il y aura donc autant de lignes b\ que de laces a2.

2° Ce que j'appellerai une ligne c sera formée de deux lignes delà 2dc sorte, joignant un même point $P(a\ddot{i})$ à deux points $P(a:)$ et $P\grave{C}al)$, correspondant a deux laces a2 et (7' de la case a\.

Il nous faut définir des surfaces que j'appellerai les surfaces /'::.

Soit une arête quelconque a\ et le point $P(tf\{)$. Supposons que les faces qui passent par a\ , soient successivement :

$a \setminus > a \setminus y \dots > * \setminus i$ et que les cases, auxquelles appartient $a \setminus$, soient successivement :

de telle façon que $a \setminus$ sépare $a \setminus$ de $a \setminus$, fl] sépare $a \setminus$ de ./;

qu'enfin, a_2 sépare $a \setminus$ de $a \setminus$. Convenons, pour plus de symétrie, de désigner indifféremment la case a_l par a_l ou a_1 .

Décomposons chaque case en tétraèdres, et envisageons en particulier les tétraèdres qui admettent pour sommet le point $P(\ll J)$. sidérons les 2 q triangles curvilignes :

$$n^*SP(\ll i)P(*i), P\ll P\ll,)^*(\hat{I} > (*=., a, \ll)$$

32 H. PO INC ARE.

L'ensemble de ces 2q triangles formera un certain polygone que j'appellerai $b \setminus$, et qui aura pour frontière l'ensemble des lignes .

Définissons maintenant les volumes $ty \setminus$ le volume M sera l'ensemble des tétraèdres qui admettent pour sommet le point a° ; ce volume sera un polyèdre à 3 dimensions, simplement connexe, qui aura pour frontière l'ensemble des surfaces $b \setminus$, correspondant aux arêtes $a \setminus$, qui aboutissent au point a° .

La juxtaposition des volumes $b \setminus$ constituera un nouveau polyèdre P' , que j'appellerai le polyèdre réciproque de P, et qui aura pour cases le $b \setminus$, pour faces les $b \setminus$ pour arêtes les $b \setminus$, pour sommets les points $b^\circ = P(af)$.

A chaque case $b \setminus$ de P' correspondra un sommet a° de P, » » face $b \setminus$ » » » une arête $a \setminus$ » »

» » arête $b \setminus$ » » » » face a_2 » »

» » sommet b^o » » » » case $a\}$. » ».

De plus, au sens du § II, il y aura la même relation, par exemple, entre l'arête b_1 - et la face b_2 , qu'entre la face a_2 et l'arête a_1 .

Si donc les congruences caractéristiques du polyèdre P s'écrivent :

celles du polyèdre P' s'écriront :

Considérons maintenant une ligne c , formée de deux lignes de la seconde sorte, joignant un même point $P(tf-)$ à deux points $P(\hat{u}\mathcal{E})$ et $P\ll$).

Soient a^om et $\ll^o$ deux sommets, appartenant respectivement tous deux à la case $a]$. Soient d et d' les deux lignes de la 3ème sorte qui joignent respectivement $P(a_2)$ à a^on , et $P(a\mathcal{E})$ à o^o .

Comme a^om et a^o appartiennent à une même case $a?$, on pourra aller de l'un de ces sommets à l'autre, en suivant une ligne brisée formée d'arêtes a_1 appartenant à $\#|$.

COMPLÉMENT i ■' 1\$ MTUS. 33

Soit $\wedge>\sim a'$ cette ligne brisée, il"!1 ! l'ensemble des lignes $c - d - f a \setminus - f''$ & sera un $\wedge$.

que j'exprimerai par la COH TUence :

$cesd + 2 > j - \hat{a}'$.

Connue $a \setminus$ est simplement connexe, cette ligne fermée sera la frontière d'une variété à 2 dimensions, intérieure à tfj , ce que j'exprimerai par l'homologie :

Réciproquement: soit X''' un $^{\circ}$ brisée, formée d'à: appartenant toutes à $a]$, et dont les extrémités sont les sommets fl^* et rt° ; ces deux sommets appartiendront respectivement a deux faces $a)$ et flj , faisant toutes deux partie de $o?$. Soient les trois lignes:

$$c = PQQP\zeta al) + P(a\ddot{r})P(a\& d = P(a))a^{\circ}at d' = P\{a[]a;$$

On aura encore

$$c \wedge d - \setminus - ^*Y_al - d'.$$

Soit maintenant a° un sommet appartenant à deux faces
Soient les deux lignes de la ymc sorte :

Nous pouvons tracer une ligne L , s'écartant infiniment peu du sommet a° , et allant d'un point de $a2$ a un point de

Supposons, pour fixer les idées, que cette ligne traverse tn et qu'elle rencontre successivement la face $a2$, la case $a3$. , la fac la case $a)n$, la face cf , la case a^* et enfin la face

Construisons les trois lignes c :

$$c. = P(a))P(af) 4-P(,;)P<V),$$

et les deux lignes de la 3Ème sorte :

On aura :

$C^{-}d^{-} - a, c^{+}d - dh, ch^{+}d. - dy$

et comme les trois cases $a_3, ^+, a|$ sont simplement connexes : $c^{-}d^{-} - d, c^{+}d - dh, che^{+}dh - dy,$

et enfin :

$$c^{-}d^{-} + c^{+}d - d - dh$$

On peut donc toujours trouver une ligne brisée, formée de lignes c et homologue à $d - dk$, d^{-} et dk étant des lignes de la 3^{ème} sorte, aboutissant à un même sommet.

Cela posé, soit

(I) $Z \& ISO$

une congruence entre les arêtes $b)$ du polyèdre P' .

La ligne brisée $^+/_ \&^*$ est évidemment formée d'un nombre pair de lignes de la 2^{ème} sorte, et en parcourant cette ligne brisée, on rencontrera successivement q faces

pour revenir à la face a_2 , que je désignerai également par a_2 ; et on rencontrera q cases

$a \setminus, a_3, \dots, a_j,$

pour revenir à la case $a|$, que je désignerai également par o^* , de sorte que la face $a \setminus$ séparera la case $a \setminus$ de la case $a \setminus + i$. Notre congruence s'écrit alors :

$$^+(\ll j)PW + P(\ll)P(ag]so,$$

$$COMPI.i'.mi.vi \setminus L^*AWA_1 \setminus : 3J$$

ou, ce qui revient au même,

Soit alors i un sommet de la face a , appartenant, par conséquent, à la fois aux (a) et a .

Soit l : la ligne de la $3^{\text{ème}}$ sorte Pdr^d ; nous venons de voir qu'il existe une ligne brisée Ahi formée d'arêtes appartenant à la case d , et telle que l'on ait l'homologie :

En additionnant toutes ces homologies, le premier membre se réduit à :

$$I[POL, PO] + n \alpha QPWSI = Z^i$$

les lignes de la $3^{\text{ème}}$ sorte $</,.$ disparaissent, et il reste : et par conséquent

Donc, à toute congruence $T./' = 0$ entre les arêtes de P' , correspond une congruence $T_Ak = 0$ entre les arêtes de P , et telle que l'on ait :

Si donc on a $2_K <rvJ^o>$ ou aura $2L. 4k e <^* 0$, et réciproquement. Soit maintenant

une congruence entre les arêtes de P ; supposons que $./.$ soit une ligne brisée formée d'arêtes appartenant à la case a .

Le premier membre de la congruence (2) se composera de q semblables lignes brisées :

$$A_i \} A_2, \dots, A_q,$$

et je désignerai indifféremment A par A_1 ou A , et A par A_0 ou A_t .

Soient a^o_- ; et a^oh les deux extrémités de la ligne A_k ; le sommet a^ok appartiendra à la fois aux cases $a \setminus$ et $ci \setminus +I$; soit $cil \wedge a^ace \wedge e al >$ et a^{2k+1} la face de $a \setminus +i$, auxquelles appartient a^oh .

Soient les lignes de la 3ème sorte

$d \setminus = P\{al)a\% d\}; +l = P\{al+i)a^oh$, et d'autre parte :

Nous avons vu que

$$A^{\sim dk} + h + d'r$$

D'autre part, les lignes $dk_h\ddot{i}$ et d^k aboutissent à un même sommet a^ok ; nous avons vu également que l'on peut trouver une combinaison C_k de lignes c , telle que l'on ait

En additionnant toutes ces homologies, je trouve :

et par conséquent :

Le premier membre de cette dernière congruence est une combinaison de lignes c , ou, ce qui revient au même, une combinaison d'arêtes $b \setminus$ du polyèdre P' , de sorte que je puis poser :

d'où

En résumé: à toute congruence entre 1. une CONgruence entre celles de P' , et réciproquement, et la condition nécessaire et suffisante pour que le premier membre de 1' on-

gruences soit homologue à zéro, c'est que l'autre le soit.

En d'autres termes, le nombre des congruences di arêtes est le même pour P et P' , en ne considérant pas des congrues comme distinctes, quand une combinaison linéaire d -rs meml

de ces congruences est homologue à zéro.

En d'autres termes encore, le nombre de Betti réduit, relatif aux arêtes de P , est égal au nombre de Betti réduit, relatif aux arêtes de P' .

On pourrait arriver au même résultat, en remarquant que l'on peut construire un polyèdre qui serait, à la fois, dérivé du polyèdre P et dérivé du polyèdre réciproque P' , et en appliquant le théorème du § 5-

Nous verrons plus loin, au § 10, que cette proposition peut être présentée sous une autre forme.

D'autre part, cela peut permettre, plus simplement qu'au § 5, de démontrer que les nombres de Betti réduits sont égaux aux nom. de Betti proprement dits.

En effet la définition du polyèdre P' comporte un certain arbitraire : ses sommets b^o ne sont assujettis qu'à être intérieurs aux cases $a\backslash$ de P . Dans ces conditions, on peut évidemment choisir toujours le polyèdre P' de façon qu'une ligne fermée quelconque soit une combinaison des $b\backslash$.

VIII

Démonstration du théorème fondamental.

Soit N_t le nombre des arêtes de notre polyèdre P , N_a le nombre des laces, N celui des cases. Formons un tableau d'après les règles suivantes.

Le tableau aura $N_2 - \setminus - iV$, colonnes, N_2 dites de la 1ère sorte et N , dites de la 2de; il aura $N_2 - f - Nt$ lignes, N_2 de la 1ère et, Nt de la 2de sorte. Voici quels seront les éléments du tableau :

1° Pour l'élément de la i ème ligne de la 1ère sorte et la j ème colonne de la 1ère sorte, j'écrirai i , si $i = j$, et 0, si $i \neq j$.

2° Les éléments appartenant à une ligne de la 2de sorte et à une colonne de la 2de sorte, seront tous nuls.

3° L'élément de la i ème colonne de la 1ère sorte et de la j ème ligne

de la 2de sorte, sera z_{ij} , z_{ij} étant le nombre qui nous fait connaître

la relation entre la face $cf.$ et l'arête a_{1-} .

4° L'élément de la i ème ligne de la 1ère sorte et de la j ème colonne de la 2de sorte, sera t_{ij} , c'est-à-dire le nombre qui fait connaître la relation entre la case a_{2-} et la face a_{1-} .

Notre tableau, s'il y a par exemple deux cases, quatre faces et trois arêtes, présentera un aspect tel que celui-ci :

Je n'ai pas écrit les indices des nombres $\mathbb{Z}$ pour simplifier.

Voici maintenant les opérations que je regarde comme permises sur ce tableau.

1° Ajouter une colonne à une autre de même sorte, ou l'en retrancher.

2° Ajouter une ligne à une autre de même sorte, ou l'en retrancher.

3° Permuter deux colonnes de même sorte, en changeant tous les signes de l'une d'elles.

[PLÉMEN₁ À L*AN>

4° Permuter deux lignes de même sorte, en changeant tous les signes de l'une d'elles.

Toutes ces transformations pour lesquelles les déterminants restent entiers, s'appelleront les transformations arithmétiques du tableau.

(On peut s'en servir pour simplifier la partie du tableau qui appartient aux colonnes de la 1^{re} sorte et aux de la 2^{de}, et

celle qui appartient aux colonnes de la 2^e : sorte et aux lignes de la 1^{re} sorte.

Voici jusqu'où l'on peut pousser la simplification, d'après des théorèmes bien connus d'arithmétique; quand la réduction sera terminée:

L'élément de la $j^{ème}$ colonne de la $i^{ème}$ sorte et de la $k^{ème}$: de la 2^{de} sorte :

1° Sera nul, si $i > j$.

2° Sera égal à un entier H_{ii} qui pourra être nul, si $i = j$.

3° Sera encore nul, si $i < j$ et si IL est premier avec H_{ii} .

4° Enfin sera nul, si $j \geq N_2$.

Il en sera de même de l'élément de la $i^{ème}$ ligne de la 1^{re} sorte et de la $k^{ème}$ colonne de la 2^{de} sorte.

La réduction peut être poussée encore plus loin, si l'on autorise une cinquième opération : multiplier tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un même nombre entier ou non, différent de zéro.

Les transformations correspondantes s'appelleront les transformations algébriques du tableau.

On peut alors supposer que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la 1^{re} sorte et de la $j^{\text{ème}}$ ligne de la 2^{de} sorte (de même que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la 1^{re} sorte et de la $i^{\text{ème}}$ colonne de la 2^{de} sorte) est nul, si $i \neq j$. Si $i = j$, il peut être égal à 0 ou à 1. S'il en est ainsi, je dirai que le tableau est réduit.

Après la cinquième opération, les éléments qui appartiennent aux lignes et aux colonnes de la 1^{re} sorte pourront ne pas rester nuls. De plus, le déterminant formé par ces lignes et ces colonnes pourra ne pas rester égal à 1, mais il restera différent de zéro.

Le tableau (1) est relatif aux faces du polyèdre P et à leurs relations avec les cases et les arêtes. Nous pourrions en un,

tout pareil, relatif aux arêtes du polyèdre P et à leurs relations avec les faces et les sommets.

Nous pourrions également envisager le polyèdre P', défini plus haut, et construire deux tableaux relatifs l'un aux faces de P', l'autre à ses arêtes.

Comparons le tableau (1), relatif aux faces de P, avec le tableau (1') relatif aux arêtes de P'.

Il résulte de ce qui précède, que ces deux tableaux peuvent se déduire l'un de l'autre en remplaçant les lignes par les colonnes

et inversement.

Cela posé, envisageons le tableau (i), relatif aux faces de P , et examinons comment on peut déduire de ce tableau le nombre de Betti P , du polyèdre P .

Comment, d'abord, pourra-t-on en déduire, les Congruences entre les faces et les arêtes ?

Considérons une colonne quelconque de la i ème sorte; par exemple la i ème colonne. Multiplions les éléments de cette colonne et de la k ème ligne de la i ème sorte par a_i et ajoutons; puis égalons à la somme obtenue, en multipliant les éléments de cette même colonne et de la j ème ligne de la 2de sorte par a_1 ; nous obtiendrons la congruence

ce qui est bien une des congruences (3) du § II. Toutes les autres

congruences n'en sont que des combinaisons.

Comment pourra-t-on maintenant trouver les homologues entre les faces? Pour cela, envisageons par exemple la j ème colonne de la 2de sorte;

multiplions les éléments de la k ème ligne et de cette colonne par a_2 ,

ajoutons et égalons à zéro; nous trouverons :

ce qui est bien une des homologues (5) du § II, dont toutes les autres ne sont que des combinaisons.

Qu'il adviendra-t-il, maintenant, si l'on applique à notre tableau (1) une transformation algébrique quelconque ?

Avant la transformation, chaque colonne de la i ème sorte correspond

à une face, chaque colonne de $(a :$

de la i ème sorte à une face, chaque I

On obtient, comme nous l'avons vu, autant d'homomorphismes $[ue de o$ en milieu; chaque

Ligne de la r ème sorte par la face correspondant

dj la $2l$ sorte par Tara: correspondante, et ajoutant.

Suj maintenant qu'on fasse la de

dire qu'on transforme en ajoutant la ligne de $a I^{*TM}$ sorte, qui correspond à $a]$, à celle de la r sorte, [ui correspond à $a\backslash$. Nous convenons de dire qu'à la nouvelle A ligne (celle à laquelle on a ajouté la $/$ ligne) correspond toujours la variété $a\backslash\backslash$ nuis qu'à la nouvelle E ème ftgne $^q^$ d'ailleurs n'a pas changé) correspond la variété $oj - a\backslash$.

Si l'on fait la cinquième opération sur la $/>'-'$ - ligne de la i en en multipliant les éléments par une constante $;/$, nous conviendrons

de dire qu'à la nouvelle $/ccniL$ ligne correspond la variété $- a\backslash$ (notation

qui n'a qu'une valeur symbolique, à moins que $-$ ne soit entier).

Quant à la quatrième opération, ce n'est qu'une combinaison de plusieurs opérations analogues à La deuxième.

Nous avons ainsi défini la variété qui correspond à chacune des lignes de la 1^{ère} sorte du tableau, après qu'on a appliqué à ces I une combinaison quelconque des 2^{ème}, 4^{ème} et 5^{ème} opérations.

Nous définirions de même les variétés qui correspondent aux différentes lignes de la 2^{ème} sorte, après qu'on aurait appliqué à ces une combinaison des 2^{ème}, 4^{ème} et 5^{ème} opérations.

Grâce à ces conventions, il suffira encore, pour obtenir les con- ' ^ ■ ' denc ^ s et les homologies, d'ajouter et d'égaliser à zéro, après avoir multiplié les éléments de chaque ligne par la variété correspondante, et avoir changé le signe des produits ainsi obtenus, en ce qui con(les lignes de la 2^{ème} sorte.

Maintenant, si l'on applique aux colonnes du tableau les 1 et 5^{ème} opérations, on ne fera que combiner les congruences entre elles, et les homologies entre elles; ou multiplier une congruence et une homologie par un facteur constant.

D'où le résultat suivant :

42 H. PÔ INC A RÉ.

Polir déduire les congruences du tableau transformé, voici ce qu'il faut faire : multiplier chaque ligne de la 1^{ère} sorte pour la variété qui lui correspond en vertu de la convention que nous venons de faire, et ajouter; faire de même pour les lignes de la 2^{ème} sorte; égaliser les deux résultats ainsi obtenus; on aura ainsi autant de congruences que de colonnes de la 1^{ère} sorte; toutes les autres congruences possibles ne seront que des combinaisons.

Pour déduire de même les homologies, il faut : multiplier chaque ligne de la 1^{ère} sorte pour la variété correspondante, ajou-

ter et égaliser à zéro; '6b. aura ainsi autant d'homologies que de colonnes de la 2de sorte; toutes les autres homologies possibles n'en seront que des combinaisons.

Il importe de remarquer que les congruences et homologies ainsi 'obtenues, pourront n'avoir qu'une valeur symbolique, parce que les coefficients pourront être fractionnaires.

Et, en effet, d'une part les éléments du tableau transformé peuvent ne plus être entiers; d'autre part, la variété qui correspond à une ligne peut, comme je l'ai dit plus haut, n'avoir elle-même qu'une valeur symbolique.

Mais comme les coefficients, entiers ou non, sont toujours commensurables, il suffira de multiplier notre congruence ou notre homologie par un entier convenable, pour en déduire une congruence ou une homologie à coefficients entiers, qui aura un sens pour elle-même.

Supposons , maintenant, qu'on ait réduit le tableau, comme je l'ai dit plus haut.

Combien y aura-t-il d'homologies distinctes ?

Parmi nos N_1 colonnes de la 2de sorte, il y en aura $N_1 - N'$ dont tous les éléments seront nuls, et N_2 dont un élément sera égal à 1 et tous les autres nuls. Les $N_1 - N'$ premières ne nous donneront aucune homologie; chacune des N' autres nous en donnera une et ces N' homologies seront évidemment toutes distinctes.

Il y a donc N_2 homologies distinctes.

Combien y a-t-il de congruences distinctes entre les faces et les arêtes ?

H y en a évidemment N_2 , correspondant aux N_z colonnes de la

rus. 15

i sorte, et ces COngruences son: d parce que le ant

formé avec les lignes et Ils colonnes de la j |L

Considérons maintenant dans notre tableau réduit I de la 21, sorte; parmi elles il y en aura $N_t - N'$ } dcuit b ments sont nuls, et N'_2 , dont un élément est égal à $i^\wedge$: KO nuls. Parmi nos N_2 congruences il y en aura dû t ! A :cn-

dront une arête, et $N_2 - N'_2$ qui ne contiendront aucune are: donc $N_2 - AT$ congruenecs entre les faces seulement, et ces congruei sont toutes distinctes.

Il y aura donc entre les faces seulement $N_2 - N'_2 - A'$, congruences, qui resteront distinctes, si l'on ne regarde plus comme distinctes celles que l'on peut déduire les unes des autres par le moyen des homologies.

Le nombre de Belli relatif aux faces de P est donc:

$N_2 - N'_2 - N''_2 Jri$.

Cherchons maintenant le nombre de Betti relatif aux arêtes de P.

On le trouvera évidemment en opérant comme nous venons de faire sur le tableau (ibis), relatif aux arêtes de $P \setminus$

Mais on passe d'un tableau à l'autre, en remplaçant les lignes par les colonnes, et réciproquement. Les nombres qui joueront[^] par rapport à (ibis), le même rôle que

jouent par rapport à (i), seront donc respectivement:

Donc le nombre de Betti relatif aux arêtes de P' est encore:

$$V_2 - AT - N_2 + i.$$

Ainsi les nombres de Betti relatifs, l'un aux faces de P , l'autre aux arêtes de P' , sont égaux.

Or nous avons vu plus haut que les nombres de Betti relatifs aux arêtes de P et à celles de P' sont égaux, de même que les nombres de Betti relatifs aux faces de P et à celles de P' .

Donc le nombre de Betti relatif aux faces de P est égal au nombre de Betti relatif aux arêtes de P .

Notre théorème fondamental est donc démontré en ce qui concerne le polyèdre P , c'est-à-dire, en ce qui concerne les polyèdres de l'espace à quatre dimensions.

La démonstration pourrait, sans aucun doute, s'étendre à un polyèdre quelconque.

Six.

Kernarqties diverses.

Le théorème fondamental est ainsi établi par une démonstration, qui diffère essentiellement de celle de la page 43 de YAualy-sis situs.

Mais cela ne saurait pas nous suffire. Il faut nous efforcer de retrouver les propositions intermédiaires, et, en particulier, celle-ci :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse trouver une variété V telle que $2 \nabla N(V, V^{\wedge}) \neq 0$, c'est que l'on n'ait pas l'homologie $\wedge_{i=0}^n V_i \neq 0$.

Considérons deux variétés, la première V_1 , à une dimension, composée d'arêtes de P , la seconde V_2 , à deux dimensions, composée de faces de P , de telle sorte qu'on aura :

$$F_1 = T_a \cdot b \cdot V = T_a \cdot a_2,$$

$$I' \cdot I \cdot J \cdot 2 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1')$$

L'arête b étant celle qui correspond à la face a , d'après les conventions du § 7.

L'arête b coupe la face a , et n'en coupe aucune autre, de telle sorte que si nous reprenons la notation de YAnalysis situs, pag. 38, nous aurons :

Nous supposons dans ce qui va suivre, que les variétés V_1 et

V. sont fennecs, ce qui s'exprime par les

Vérifions d'abord que l'on aura

$\nabla V' = 0$, pourvu que l'on ait l'une des deux homologies (*) :

Si en effet nous avons, par exemple, la seconde homologie f_2j , c'est qu'on aura :

'(. étant un coefficient ne dépendant que de y .

D'un autre côté, la première des congruences (1) peut se déduire de l'une des suivantes :

(3) $^* ; \langle Z^* \hat{1} \rangle ii.$

d'où

$Ta./; 1 sTy \langle \{K \langle |,$

En égalant à zéro le coefficient de b^0 -, il vient successivement:

$Z \blacksquare sy, i = ^0 > Z Z a, \ddot{i} > B/, j = ^0 > Z a: "i = ^0 > c- Cl- F- D-$

On raisonnerait de même si on avait la première homologie (2).

Je dis maintenant que si la seconde homologie (2) n'a pas lieu, on peut choisir les a ; de telle façon que Yx reste fermée et cependant

que $Za; ai$ ne soit Pas nu⁻

En effet, dire que la seconde homologie (2) n'a pas lieu, c

(*) Or. Anal y si s situs, pag. 42.

dire qu'on ne peut pas trouver des nombres $\mathbb{E}$. tels que l'on ait :

Dire que $V Y$ reste fermée, c'est dire que les a . sont assujettis aux conditions :

$$(5) H^*i^*ii = 0.$$

Or il est clair que si les $\langle r/$ ne satisfont pas à des égalités de la forme (4), l'équation linéaire $2_ a. a'. = 0$ sera distincte des équations (5); on pourra donc toujours trouver des nombres $a.$, qui satisfassent

aux équations (5) sans satisfaire à $/a,17-; = Q-$

Remarquons d'ailleurs que nous n'avons pas restreint la généralité en supposant que nos variétés V_x et $V \setminus$ étaient des combinaisons des $b \setminus$ et des a^* , quelle que soit la variété V , dont la subdivision forme les polyèdres P et P' . Quelles que soient les variétés V_1 et V_2 , nous pouvons toujours subdiviser V , de manière à former deux polyèdres réciproques P et P' tels que V_x soit une combinaison des arêtes du second, et V_2 une combinaison des faces du premier.

Il faudrait voir comment le tableau (1) du § 8 et les tableaux analogues, peuvent nous permettre de déterminer les nombres de Betti e_1, i_1 , tels que Betti les définit lui-même, et non plus les nombres de Betti définis de la seconde manière, c'est-à-dire ceux que nous avons considérés jusqu'à présent.

Considérons, par exemple, un tableau analogue au tableau (1), mais relatif aux arêtes du polyèdre P et à leurs relations avec les faces et les sommets. Considérons, en particulier, les colonnes de la 2de sorte et les signes de la 1ère sorte, où figurent les nombres $s_2 \dots$. Soit T le tableau partiel ainsi obtenu. A l'aide de ce tableau on pourra former les congruences

d'où l'on déduit les homologies

Alors pour reconnaître si plusieurs lignes fermées, formées de

COMPLĭ •■;!.•. ! ■• '■'■■■■■

iĭdmbinaisû :• destina i ta -n de la i dé/i

l «lire, au fém de Be 1 1 i, il fau I,m]; olo • 1 1 1 1 _• ci) combi-
nant par aik.

soustraction ou multiplication, mais fan

Supposotis qu'on ait appliqué à i érie de

nvñ sfdrmaton ., •] u _■ j'ai appelées arithmétiques au

Sbit Y-. \ le nombre qui, clans le tableau tra;. ligne de la rrc
sorte et la /•' ■ colonne de i la variété qui correspond à la yinu
ligne de la itri sorte de notre tableau transformé en vertu des
conventions du § rès ce que nou .

avons vu dans Ce § 8, cette variété n'est qu'une combinaison
a1-. Nous aurons alors les homologies

Ces homologies ne sont que des combinaisons des honioĭo jies
(6), que l'on peut obtenir sans ai-vision, et réciproquement on
peut tirer des homologies (6) des homologies (6his) sans divi-
sion, c'est là une conséquence du caractère arithmétique des
transformations.

On peut donc, quand on veut s'assurer si deux lignes ten sont
distinctes au sens de 15e tti, se servir des homologies (6 lieu des
homologies (6).

Nous pouvons supposer qu'on s'est servi des transformations
arithmétiques pour réduire le tableau, comme je l'ai expliqué au
§ 8, et par conséquent que C^* . est nul : i° si / > y; 2° si ; ^ > A\.

Le tableau réduit aux colonnes de la 2Jc sorte et aux lignes de la i^* sorte prendra, par exemple, la forme suivante:

48 H. PO INC A RÉ.

J'ai supposé 6 lignes et 5 colonnes; j'ai supposé que l'un des nombres Q est égal à zéro, de façon qu'une des colonnes du tableau transformé soit entièrement composée de zéros. J'ajoute que si d était égal à 1, les nombres h, k, l , qui figurent à la même ligne, seraient nuls.

Cela posé, si d n'est pas égal à 1, les deux définitions des nombres de Betti ne coïncident pas, parce que l'on a l'homologie de $\langle \wedge \rangle o$, d'où l'on ne pourrait déduire l'homologie $c \langle r \wedge \rangle o$ que par division. Si $d = 1$, on a $h = k = l = 0$, et si c n'est pas égal à 1, on aura l'homologie $c \langle r \wedge \rangle o$, et les deux définitions ne concorderont pas; et ainsi, de suite.

En résumé, pour que les deux définitions concordent, il faut et il suffit que le produit $abcd$ soit égal à 1.

Pour interpréter ce résultat, revenons au tableau non transformé. Le produit $abcd$ sera le plus grand commun diviseur de tous les déterminants obtenus en supprimant $N_2 - N$ lignes dans le tableau T , ■ pourvu que ces déterminants ne soient pas tous nuls (auquel cas il n'y aurait pas dans le tableau transformé de colonne exclusivement composée de zéros). Si les déterminants sont tous nuls, on en formera d'autres en supprimant dans le tableau T une colonne et $\Delta_2 - AT$, $-j-1$ lignes; le produit $abcd$ sera le plus grand commun diviseur de tous ces déterminants, s'ils ne sont pas tous nuls; et ainsi de suite.

Nous arrivons ainsi à la règle suivante.

Soit A le plus grand commun diviseur des déterminants obtenus en partant du tableau T et y supprimant p lignes et $N_2 - A_7 - J - p$ colonnes. La condition nécessaire et suffisante pour que les deux définitions des nombres de Betti coïncident, c'est que le premier des A qui ne s'annule pas, soit égal à 1 (le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres égaux à zéro étant zéro par définition).

Supposons que la variété $V_1 = Z^{-ib}]$, considérée au début de ce paragraphe, ne peut pas être frontière d'une variété à deux dimensions, mais satisfait à l'homologie $V_1 \leq 0$. En d'autres termes, l'homologie $V \times c - o$ peut se déduire des homologies (6) par division, mais non pas sans division. Dans ce cas, on aura néanmoins :

Démonstration arithmétique de feu

tirs théorèmes thi , VII.

Voici une manière de former les homologies qui pourra être utile à connaître.

Soit b'' un sommet du polyèdre P' , situé à l'intérieur d'une $a]$ du polyèdre P . Soit, d'autre part, $a[$ un sommet de $1 \setminus$ appar: à la case $a \setminus$. Joignons b'' à $a[$ par une ligne que j'appellerai simplement e° .

Soit maintenant $b \setminus$ une arête de P' , dont les deux extrémités sont b'' et $///j$, de telle sorte que l'une des congruences (3) (cfr. § 2) relatives à P' soit :

Soit, d'autre part, $rt^{\wedge}$ la face de P qui correspond à l'arête $b \setminus$ de P' , et a° un des sommets de a^* ; nous aurons l'homologie :

$$(1) b \setminus^a b] - a b l.$$

Soit fli une arête de P , dont les deux extrémités sont a° et $a^\circ hi$ de sorte que l'une des congruences (3) relatives à P soit :

$$a_i = \ast / - a v$$

Soit $a \in$ l'une des cases de P auxquelles appartient $a]$, et $\wedge$ le sommet correspondant de P' ; on aura l'homologie :

$$(2) a] \sim b \setminus a) - b y^\ast.$$

Je dis maintenant que toutes les homologies entre les a peuvent se déduire des homologies (2).

En effet, soit $a]$ une face quelconque de P , et soit :

JO H. POINCARÉ.

la congruence de la forme (3) qui lui correspond; on en déduit l'homologie :

et nous avons vu au § 6 que toutes les homologies entre les arêtes de P sont des combinaisons de celles qu'on obtient de la sorte.

Soit alors a_1 , l'une des arêtes de P qui figurent dans l'homologie (3), et soit:

Soit d'ailleurs $a \setminus$ l'une des cases dont fait partie $a]$. Nous aurons l'homologie :

Si nous additionnons les homologies (2bis) qui sont de la forme (2), après les avoir multipliées par $z \setminus$. , tous les termes du second membre disparaîtront en vertu des relations (5) du § 2; on retrouverait donc l'homologie (3). c. q. f. d.

On démontrerait de même que toutes les homologies entre les $b \setminus$ peuvent se déduire des homologies (1).

Nous avons vu plus haut, au § 7, que si l'on a une congruence :
on peut trouver une autre congruence entre les arêtes de P' :
et de telle façon qu'on ait l'homologie :

Je dis maintenant que cette homologie (4) peut être déduite des homologies (1) et (2).

Découpons, en effet, le premier membre de notre congruence $2_a] = 0$ en un certain nombre de groupes, de telle façon que les

$M'I.i'mi.w ; i$

, d'un même groupe appartiennent à une même $y^* a_1$, l'un de ces groupes; nous aurons la congruence:

a° et $tf!$ étant les deux extrémités de la ligne formée par l'ensemble des arêtes de ce groupe. Je suppose que toutes ces arêtes appartiennent à la case $a \setminus$. Soit

l'une de ces arêtes; nous aurons l'homologie :

et on ajoutant toutes ces homologies, on trouverait :

Ajoutons d'une part toutes les homologies (6), d'autre part toutes les congruences (5), qui correspondent aux différents groupes. L'addition des congruences (5) doit nous donner la congruence $X a \setminus = 0$; il s'en suit que si un sommet $a^\circ m$ figure dans une des congruences (5) avec le signe $-j-$, il devra figurer dans une autre avec le signe $-$. L'addition des homologies (6) nous donnera donc :

En écrivant cette relation je suppose que $a^{\circ}m$ figure dans deux des congruences (5), une fois avec le signe $-\backslash$ dans la congruence qui correspond à la case $a\backslash$, et une fois avec le signe $-$ dans la congruence qui correspond à la case $a\backslash$

Observons maintenant que $b\backslash$ et b° sont deux sommets de P' , et que ces deux sommets appartiennent l'un et l'autre A la case On peut alors trouver une ligne formée d'arêtes de P' , appartenant A cette case $b>n$, et allant de $b^{\circ}k$ A h^* . Soit $s\backslash$ cette ligne; on aura

J2 H. POIX C A RÉ

De même que de la congruence (5) des homologues (2ter), qui sont de la forme (2), nous avons déduit l'homologie (6); de même de la congruence (jrLi) et d'homologies de la forme (1), nous pourrions déduire l'homologie :

A chaque terme du second membre de (7) correspond une homologie ($6bL=$). En les additionnant, on trouvera :

d'où:

$$(8) I^{\wedge} + II^{\wedge}o,$$

homologie de la forme (4), qui se déduit, comme on le voit, des homologues (1) et (2). c. o_. f. d.

On peut se demander pourquoi j'ai jugé nécessaire de revenir sur un théorème déjà démontré au ~ 7- On le comprendra si on se rend compte de la nature géométrique, pour ainsi dire, de la démonstration du § 7. La présente démonstration a, au contraire,

un caractère arithmétique; elle n'invoque que des propriétés des schémas définis au § 2, et des tableaux construits au § 8; et elle conserverait sa valeur alors même qu'à ces schémas et à ces tableaux ne correspondrait aucun polyèdre.

Qu'avons-nous supposé en effet ? C'est que si oc^* , oc^* , oc^* sont les nombres des sommets, des arêtes et des faces appartenant à une même case, et si $'$. ont les nombres des cases, des faces et

des arêtes auxquelles appartient un même sommet, on a :

et en outre que deux sommets quelconques a^o et a^o sont liés par l'homologie :

$d; \sim 4$ Or on peut reconnaître si un sommet appartient à une face, par

GOMM.LJ4EVT \LYSS STUS.

exemple, en appliquant au tableau du § 8 des règles puiuncm arith-

Jtne ma si une

logic tell. a lieu.

Pmmibilit "■

Tout ce qui "été quelconque peut être

subdivisée es s simple: -e manière à former on

polyèdre P, à p os, pour lequel les

a^o sont toutes simplemer.: . temple, toute variété à trois

dimensions pour : simplement connes

.5 les unes des autres par : mplement : connexes.

C'est cela qu'il nous re> : . ntrer, «. : .mostration

que je vais donner. Je : je vais me utt

; on i former un po- .

Je supposerai que le théorème : mr ihk

— i dîmensk os, et je me s de

dimensions.

Noos présentera s h. forme

suivante, qui comprendra les s donnée

Noos aurons les équations et les inégalités

îs inégalitt

lûr .1, non :'. :ia-

-que j'appelle],»..

Deux de ces variétés seront dites eontigûes, si elles ont une partie commune, et je puis supposer que l'on peut passer d'un point quelconque de l'une de ces variétés à un point quelconque d'une autre quelconque d'entre elles, sans sortir de l'ensemble de ces variétés. Cet ensemble constituera la variété que j'appellerai V , et qu'il s'agissait de définir.

Je supposerai que cette variété V est bilatère. •

C'est évidemment là la façon la plus générale possible de définir une variété.

Considérons la variété partielle v_3 définie par les équations (i).

D'après le théorème des fonctions implicites, on pourra satisfaire aux équations

$$A = 0, \text{ en faisant}$$

les y étant des fonctions holomorphes des x ; mais les séries y_i pourront ne pas converger pour tous les points de la variété v_3 .

Les conditions de convergence seront certaines inégalités :

Quand on remplacera les y_i en fonctions des x , les relations :
deviendront :

Alors l'ensemble des relations

$$(y_i) \text{ xi} = 0, y_i > 0, y_i < 0$$

définira une certaine variété v_3 , de telle façon que l'ensemble des variétés analogues à v_3 reproduira la variété v_3

COMPLÉMENT À L'ANALYSE, si ;

Nous sommes ainsi ramenés à la seconde définition de l'ANALYSE situs.

Cela pose, soit v_3 une autre variété v_3 satisfaisant aux conditions

suivantes : v_3 sera tout entière contenue dans v_3 ; elle comprendra tous les points de v_3 qui ne lui sont pas communs avec

une rictés contigües; par conséquent la frontière complète de I - out

entière dans la partie commune à $v \setminus$ et aux variétés $\text{cont} L' A$ chacune des variétés

dont l'ensemble constitue V , correspondra ainsi une variété

satisfaisant aux conditions que je viens d'énoncer; et il est clair qu'on peut s'arranger de telle façon que tout point de V appartienne à l'une des variétés v'' , et à une seule, à moins qu'il ne soit sur la frontière de l'une des variétés v'' , auquel cas il devra appartenir, en outre, à la frontière au moins d'une autre variété ;".

La variété V_s ainsi subdivisée en variétés v'' , constitue un polv. P , au sens donné à ce mot au § 2. Mais ce polvèdre ne convient pas encore à la question, car nous ne pouvons savoir si les $\text{var} M$ sont des tétraèdres généralisés, ou même sont simplement connexe

Considérons la variété $v''x$, et soit :

$$m = {}^\circ > lz = {}^\circ \gg - \bullet \bullet > \ddot{p} = {}^\circ$$

un point intérieur à cette variété; considérons la variété à une dimension:

où les a sont des constantes, et où nous ferons varier / depuis 0 jusqu'à $-\backslash$ - oc. C'est ce que j'appellerai un rayon vecteur.

Chaque rayon vecteur rencontrera la frontière complète 1 un nombre impair de points; en effet, quand on suivra ce rayon, en

\$6 H. P OIN C A RÉ.

faisant varier X de o à $-j$ - co , on sortira de la variété $v'x \setminus$ on pourra y rentrer ensuite et en sortir plusieurs fois, mais on finira toujours par en sortir pour n'y plus rentrer.

Il pourra se faire qu'un rayon vecteur rencontre la frontière de $v'î$ en deux points confondus. Les rayons vecteurs qui satisfont à cette condition s'appelleront les rayons remarquables.

L'ensemble des rayons remarquables formera une ou plusieurs variétés à $p - i$ dimensions, que j'appellerai les cônes remarquables.

Les intersections des cônes remarquables avec la frontière de $v''x$ formeront une ou plusieurs variétés à $p - 2$ dimensions, que j'appellerai U , et ces variétés U partageront la frontière de $v[$ en régions que j'appellerai R .

Une région R ne peut être rencontrée par un rayon vecteur en plus d'un point; mais d'après ce que nous venons de voir, il peut se présenter deux cas : quand on suit ce rayon vecteur, en faisant croître / de o à oo , on peut, au moment où on rencontre R , sortir de $v'[$ ou y rentrer. Si le premier cas, par exemple, se présente pour un des vecteurs qui rencontrent R , il se présentera pour tous les vecteurs qui rencontrent R .

D'où la distinction des régions R en régions de la 1^{ère} sorte, que les rayons vecteurs rencontrent en sortant de $v' \setminus$, et en régions de la 2^{de} sorte, que les rayons vecteurs rencontrent en rentrant dans tT .

Les régions R étant des variétés à $p - 1$ dimensions pourront, d'après l'hypothèse faite au début, être subdivisées en tétraèdres généralisés.

Supposons, pour fixer les idées, qu'un rayon vecteur rencontre trois fois la frontière de $v''t$, qu'il rencontre successivement les régions R_1, R_2, R_3, R_4 et R_5 , seront de la 1^{ère} sorte, R_2 sera de la 2^{de} sorte.

Subdivisons R_4 et R_5 , en tétraèdres généralisés à $p - 1$ dimensions.

Si T_1 est une des subdivisions de R_1 menons tous les rayons vecteurs qui passent par les différents points de T_1 , et conservons la partie de ces rayons vecteurs qui est comprise entre le point $\wedge = o$ et le rayon RL (partie qui est intérieure à z'); l'ensemble de ces vecteurs formera un tétraèdre généralisé à p dimensions, ayant pour sommet le point $\wedge = o$, et pour base le tétraèdre généralisé à $p - 1$ dimensions r_1 .

CoHPLÉM₁

Soit maintenant T_2 une des subdivisions de A' ; menons tous les rayons vecteurs qui passent par les différents points de T_2 conservons la partie de ces rayons vecteur, qui est comprise entre le point $\wedge = o$ et le rayon RL (partie qui est intérieure à z'); l'ensemble de ces vecteurs formera un tétraèdre généralisé à p dimensions, ayant pour sommet le point $\wedge = o$, et pour base le tétraèdre généralisé à $p - 1$ dimensions r_2 .

Le tronc de tétraèdre généralisé r_1 et r_2 forme un.

à $p - 1$ dimensions que l'on pourrait appeler un tronc de tétraèdre généralisé, dont les deux bases sont T_1 et T_2 et un tétraèdre généralisé à $p - 1$ dimensions, que j'appellerai T_3 et qui fera partie de A' en d'autres termes, la différence de deux tétraèdres généralisés, ayant pour sommet commun le point $\wedge = o$ et pour bases l'un T_1 , l'autre T_2 .

Ce tronc de tétraèdre généralisé pourra à son tour être paren p tétraèdres généralisés, de même que dans le théorème classique,

le tronc de pyramide triangulaire se partage en trois pyramides triangulaires.

Finalement v^t sera partagé en tétraèdres général!

Une difficulté subsiste cependant; on peut subdiviser comme vi les autres variétés analogues v^2 , v , ... ; considérons la subdivision de v en tétraèdres généralisés T , et celle de v^2 en tétraèdres généralisés T_2 . La frontière commune de v et v^2 se trouvera subdivisée d'une part en tétraèdres généralisés à $p - i$ dimensions t , qui seront les faces des r , et d'autre part en tétraèdres généralisés à $p - i$ dimensions fa , qui seront les faces des T_2 ; mais il n'est pas évident que ces subdivisions coïncident.

Considérons alors la partie commune a à l'un des t et à l'un des t_2 ; je pourrai, d'après l'hypothèse faite au début, la subdiviser en tétraèdres généralisés à $p - i$ dimensions a . Ainsi chacun des tétraèdres T_j et chacun des tétraèdres t , sera subdivisé en tétraèdres g .

Soit maintenant r_j une des variétés à q dimensions appartenant à t_x (j'emploie ici le mot appartenir dans le même sens que quand je dis que les faces, les arêtes et les sommets d'un tétraèdre ordinaire appartiennent à ce tétraèdre, ou quand je disais au § 2 que les variétés a appartenaient au polyèdre P). Soit de même r , une des variétés à q dimensions appartenant à t . Ces deux variétés r_j et t sont des tétraèdres généralisés, puisque d'après la définition du tétraèdre généralisé, toute variété qui appartient à un tétraèdre généralisé, est elle-même un tétraèdre généralisé. Alors v et V se trouveront subdivisés en

des tétraèdres généralisés à q dimensions cr , qui appartiendront aux tétraèdres s à $p - 1$ dimensions.

Cela à la rigueur pourrait nous suffire; nos variétés $v''l_9$ etc., seraient partagées en tétraèdres généralisés à p dimensions T_p , leurs frontières en tétraèdres à $p - 1$ dimensions T_{p-1} etc.; seulement ces tétraèdres T_{p-1} ne seraient pas ceux qui appartiennent aux tétraèdres T_p . cela en seraient seulement des subdivisions.

Mais nous pouvons aller plus loin.

Considérons l'un des tétraèdres à p dimensions T_p dans lequel $v''x$ est subdivisé. Je rappelle qu'on les a obtenus en subdivisant les troncs de tétraèdres généralisés, dont il a été question plus haut. Par conséquent T_p a tous ses sommets sur la frontière de v'' (il y aurait exception pour les tétraèdres dont un sommet est au point $\wedge = 0$, mais pour ceux-là il n'y a pas de difficulté).

Supposons, par exemple, que les points communs à T_p et à la région que j'ai appelée plus haut $R^\wedge$ forment un tétraèdre généralisé à q dimensions T_q appartenant à T_p , et que les points communs à T_p et à la région R_2 forment un tétraèdre k_{p-q-1} dimensions T_{p-q-1} appartenant à T_p .

Les tétraèdres T_q et T_{p-q-1} sont analogues aux tétraèdres x_t traités plus haut; ils peuvent donc être subdivisés en tétraèdres analogues à ceux que j'ai appelés cr' ; soient $S\backslash$, $S^?$.., les tétraèdres analogues à cr' , qui sont des subdivisions de T_q ; soient $Sp\sim q\backslash$ $Sp\sim q\backslash$. . . les tétraèdres analogues à cr' qui sont des subdivisions de T_{p-q-1} . Je dis qu'on peut subdiviser T_p en tétraèdres à p dimensions de telle façon que les variétés S_2 , S_{q2} , . . . , $S^{\wedge 1}$, $Sp\sim q\backslash$, . . . appartiennent à T_p .

Pour le démontrer je suppose d'abord que T_p soit un tétraèdre rectiligne (cfr. § 2 in fine). On sait qu'un tétraèdre rectiligne est

entièrement défini quand on connaît ses $p - j - 1$ sommets. Alors T_p est le tétraèdre rectiligne qui a pour sommets ceux de T_q et de $T_{p \sim q \sim \setminus}$

Supposons que T_q se décompose en g tétraèdres partiels :

$s_q, s_q, \dots, s_q$

et $T_{p \sim q \sim l}$ en h tétraèdres partiels :

$r_{p \sim q \sim l} \subset p \sim q \sim l \subset p \sim q \sim l$

COMPLÉMENT À I. 'av a

On vérifiera alors que T : se déCOD

qui sont ceux dont les sommets sont ceux de

S_j et $S; ' - (t=i, 2, \dots, r; * = i, j,$

Si le tétraèdre $T > n$ n'est pas rectiligne, le résultat subsiste pu: un tétraèdre quelconque est homéomorphe a un tétraèdre rectil;

Ainsi notre variété est décomposée en tétraèdres à p dimen -, '. de façon à former un polyèdre tel que toute variété appartenant à ce polyèdre, appartient à l'un de ces tétraèdres.

On est ainsi débarrassé des derniers doutes qui pouvaient subsister au sujet de la possibilité de subdiviser une variété V de façon à for un polyèdre P , pour lequel tous les $a \in I$ soient simplement conne

Paris, mars 1899.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

Direttore : Prof. G. B. G u c c i a.

A partire da gennajo 1888 questa raccolta matematica si pubblica per fascicoli bimestrali in-8° grande, caratteri elzevirii. 6 fascicoli formano ogni anno un volume di circa 300 pagine, che comprende due parti: 1a Memorie e Comunicazioni, 2a Biblioteca Matematica. Al volume vanno annessi gl'indici e la copertina. Prezzo del Tomo I (1884-1887) in-8° grande, di pagine 414 . . . L. 15 » » » II (1888) in-8° grande, di pagine 319 (due parti) . L. 15

» » » III (1889) in-8° grande, di pagine 352 (due parti) . L. 15

» » » IV (1890) in-8° grande, di pagine 378 (due parti) . L. 15

» » » V (1891) in-8° grande, di pagine 404 (due parti) . L. 15

» » » VI (1892) in-8° grande, di pagine 374 (due parti) . L. 15 » » » VII (1893) in-8° grande, di pagine 400 (due parti) . L. 15 » » » VIII (1894) in-8° grande, di pagine 434 (due parti) . L. 15 » » » IX (1895) in-8° grande, di pagine 385 (due parti) . L. 15

» » » X (1896) in-8° grande, di pagine 383 (due parti) . L. 15

[Con VIndice générale délie Memorie e Comunicazioni contenute nella Parte Prima dei tomi I-X] . L. 15 » » » XI (1897) in-8° grande, di pagine 364 (due parti) . L. 15

» » » XII (1898) in-8° grande, di pagine 408 (due parti) . L. 15. È aperta l'associazione pel Tomo XIII (1899) al prezzo di L. 15, franco di porto in tutti gli Stati de. l'Unione Générale Postale. Inviare vaglia postale al

Tesoriere del Circolo Matematico, Via Ruggiero Settimo, 28, Palermo.

Tipografia Matematica, Via Villareale, n, Palermo. Os^) 16-
V1-99.

Mottt

QA

Sources et licence

Texte : <https://archive.org/details/complmentlanalysoopoin>. Domaine public ; numérisation mise à disposition par Internet Archive. Mise en forme : liregratuitement.com. Tout ce que nous ajoutons reste libre.