

Cours d’analyse de l’école royale polytechnique

Augustin Louis Cauchy

LU AVEC LIREGRATUITEMENT.COM

Livre libre de droits, lisible gratuitement en ligne et en quinze minutes par jour.

Préliminaires

COURS D'ANALYSE

Pour éviter toute espèce de confusion dans le langage et l'écriture algébriques, nous allons fixer dans ces préliminaires la valeur de plusieurs termes et de plusieurs notations que nous emprunterons soit à l'Algèbre ordinaire, soit à la Trigonométrie. Les explications que nous donnerons à ce sujet sont nécessaires, pour que nous ayons la certitude d'être parfaitement compris de ceux qui liront cet Ouvrage. Nous allons indiquer d'abord quelle idée il nous paraît convenable d'attacher à ces deux mots, nombre et quantité.

Nous prendrons toujours la dénomination de nombres dans le sens où on l'emploie en Arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de quantités aux quantités réelles positives ou négatives, c'est-à-dire aux nombres précédés des signes + ou −. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions ; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou du signe −, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce. Cela posé, le signe + ou − placé devant un nombre en modifiera la signification, à peu près comme un adjectif modifie celle du substantif. Nous appellerons valeur numérique d'une quantité le nombre qui en fait la base, quantités égales celles qui ont le même signe avec la même valeur numérique, et quantités opposées deux quantités égales quant à leurs valeurs numériques, mais affectées de signes contraires. En partant de ces principes, il est facile de rendre compte des diverses opérations que l'on peut faire subir aux quantités. Par exemple, deux quantités étant données, on pourra toujours en trouver une troisième qui, prise pour accroissement d'un nombre fixe, si elle est positive, et pour diminution dans le cas contraire, conduise au même résultat que les deux quantités données, employées l'une après l'autre à pareil usage. Cette troisième quantité, qui à elle seule produit le même effet que les deux autres, est ce qu'on appelle leur somme. Ainsi les deux quantités −10 et +7 ont pour somme −3, attendu qu'une diminution de 10 unités, jointe à une augmentation de 7 unités, équivaut à une diminution de 3 unités. Ajouter deux quantités, c'est former leur somme. La différence entre une première quantité et une seconde, c'est une troisième quantité qui, ajoutée à la seconde, reproduit la première. Enfin, on dit qu'une quantité est plus grande ou plus petite qu'une autre, suivant que la différence de la première à la seconde est positive ou négative. D'après cette définition, les quantités positives surpassent toujours les quantités négatives, et celles-ci doivent être considérées comme d'autant plus petites que leurs valeurs numériques sont plus grandes.

En Algèbre, on représente, non seulement les nombres, mais aussi les quantités, par des lettres. Comme on est convenu de ranger les nombres absolus dans la classe des quantités positives, on peut désigner la quantité positive qui a pour valeur numérique le nombre A, soit par +A, soit par A seulement, tandis que la quantité négative opposée se trouve représentée par −A. De même, dans le cas où la lettre a représente une quantité, on est convenu de regarder comme synonymes les deux expressions a et +a, et de représenter par −a la quantité opposée à +a. Ces remarques suffisent pour établir ce qu'on appelle la règle des signes (voir la Note I).

On nomme quantité variable celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité constante, et l'on désigne ordinairement par une des premières lettres de l'alphabet toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus, etc.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'infini positif, indiqué par le signe ∞, s'il s'agit d'une variable positive, et l'infini négatif, indiqué par la notation $-\infty$, s'il s'agit d'une variable négative. Les infinis positif et négatif sont désignés conjointement sous le nom de quantités infinies.

Les quantités qui se présentent, dans le calcul, comme résultats d'opérations faites sur une ou plusieurs autres quantités constantes ou variables, peuvent être divisées en plusieurs espèces suivant la nature des opérations qui les produisent. C'est ainsi que l'on distingue, en Algèbre, les sommes et différences, les produits et quotients, les puissances et racines, les exponentielles et les logarithmes ; en Trigonométrie, les sinus et cosinus, sécantes et cosécantes, tangentes et cotangentes, et les arcs de cercle dont une ligne trigonométrique est donnée. Pour bien comprendre ce qui est relatif à ces dernières espèces de quantités, il est nécessaire de se rappeler les principes suivants.

Une longueur, comptée sur une ligne droite ou courbe, peut être, comme toute espèce de grandeurs, représentée soit par un nombre, soit par une quantité, savoir : par un nombre, lorsqu'on a simplement égard à la mesure de cette longueur, et par une quantité, c'est-à-dire par un nombre précédé du signe + ou −, lorsque l'on considère la longueur dont il s'agit comme portée, à partir d'un point fixe, sur la ligne donnée dans un sens ou dans un autre, pour servir soit à l'augmentation, soit à la diminution d'une autre longueur constante aboutissant à ce point fixe. Le point fixe dont il est ici question, et à partir duquel on doit porter les longueurs variables désignées par des quantités, est ce qu'on appelle l'origine de ces mêmes longueurs. Deux longueurs comptées à partir d'une origine commune, mais en sens contraires, doivent être représentées par des quantités de signes différents. On peut choisir à volonté le sens dans lequel on doit compter les longueurs désignées par des quantités positives ; mais, ce choix une fois fait, il faudra nécessairement compter dans le sens apposé les longueurs qui seront désignées par des quantités négatives.

Dans un cercle dont le plan est supposé vertical, on prend ordinairement pour origine des arcs l'extrémité du rayon tiré horizontalement de gauche à droite, et c'est en s'élevant au-dessus de ce point que l'on compte les arcs positifs, c'est-à-dire ceux que l'on désigne par des quantités positives. Dans le même cercle, lorsque le rayon se réduit à l'unité, le sinus d'un arc, c'est-à-dire la projection sur le diamètre vertical du rayon qui passe par l'extrémité de cet arc, se compte positive-

ment de bas en haut et négativement en sens contraire, à partir du centre du cercle pris pour origine des sinus. La tangente se compte positivement dans le même sens que le sinus, mais à partir de l'origine des arcs et sur la verticale menée par cette origine. Enfin, la sécante se compte à partir du centre sur le rayon mené à l'extrémité de l'arc que l'on considère, et positivement dans le sens de ce rayon.

Souvent le résultat d'une opération effectuée sur une quantité peut avoir plusieurs valeurs différentes les unes des autres. Lorsque nous voudrons désigner indistinctement une quelconque de ces valeurs, nous nous servirons de notations dans lesquelles la quantité sera entourée de doubles traits ou de doubles parenthèses, et nous réserverons la notation ordinaire pour la valeur la plus simple ou celle qui paraîtra mériter davantage d'être remarquée. Ainsi, par exemple, a étant une quantité positive, la racine carrée de cette quantité aura deux valeurs numériquement égales, mais de signes contraires, dont l'une quelconque sera exprimée par la notation

((A))12 OU A,

A12 OU A ;

ARC SIN((A)) OU ARC TANG((A))

ARC SIN(A) OU ARC TANG(A)

indiquera seulement celui de ces arcs qui a la plus petite valeur

numérique. À l'aide de ces conventions, on évite la confusion que pourrait entraîner l'emploi de signes dont la valeur n'aurait pas été déterminée d'une manière assez précise. Afin de lever à cet égard toute difficulté, je vais présenter ici le Tableau des notations dont nous ferons usage pour exprimer les résultats des opérations algébriques ou trigonométriques.

La somme de deux quantités sera indiquée à l'ordinaire par la juxtaposition de ces deux quantités, chacune d'elles étant exprimée par une lettre précédée du signe + ou −, que l'on pourra supprimer (si c'est le signe +) devant la première lettre seulement. Ainsi

+A+BOU SIMPLEMENTA+B

+A−BOU SIMPLEMENTA−B

désignera la somme des deux quantités +a, −b, équivalente à la différence des deux quantités +a, +b.

On indiquera l'égalité des deux quantités a et b par le signe = interposé entre elles, comme il suit, a=b,

et l'on exprimera que la première surpasse la seconde, c'est-à-dire que la différence a−b est positive, en écrivant

A>BOUB<A

+A×+B,OU SIMPLEMENTA.B OU AB

le produit des deux quantités +a,+b, et par

Soient maintenant m et n deux nombres entiers, A un nombre quelconque, et a, b deux quantités quelconques positives ou négatives. Am,A1n=An,A±mn,Ab

représenteront les quantités positives qu'on obtient en élevant le nombre A à des puissances respectivement marquées par les exposants

m,1n,±mn,b,

et

a±m

la quantité positive ou négative que produit l'élévation de la quantité a à la puissance ±m. Quant aux notations

((a))1n=an,((a))±mn

nous nous en servirons pour exprimer, non seulement les valeurs positives ou négatives, lorsqu'il en existe, des puissances de la quantité a marquées par les exposants

1n,±mn

mais encore les valeurs imaginaires de ces mêmes puissances (voir ci-après, Chap. VII, ce qu'on entend par expressions imaginaires). Il est bon d'observer que, si l'on désigne par A la valeur numérique de a, et si l'on suppose la fraction mn réduite à sa plus simple expression, la puissance

((a))mn

aura une seule valeur réelle positive ou négative, savoir

+Amnou−Amn

lorsque mn sera une fraction de dénominateur impair ; tandis qu'elle admettra les deux valeurs réelles dont on vient de parler, ou qu'elle

n'en admettra aucune, si mn est une fraction de dénominateur pair.

On peut faire une semblable remarque à l'égard de l'expression ((a))−mn

Dans le cas particulier où, la quantité a étant positive, on suppose mn=12 l'expression ((a))mn n'a que deux valeurs réelles l'une et l'autre, et données par la formule (2) ou, ce qui revient au même, par la formule (1).

Les notations l(B),L(B),L′(B),...

indiqueront les logarithmes réels du nombre B dans différents systèmes, tandis que chacune des suivantes

pourra servir à désigner, outre le logarithme réel de la quantité b, lorsqu'il existe, un quelconque des logarithmes imaginaires de cette même quantité (voir ci-après, Chap. IX, ce qu'on entend par logarithmes imaginaires).

En Trigonométrie

sina,cosa,tanga,cota,séca,coséca,siva,cosiva

exprimeront respectivement le sinus, le cosinus, la tangente, la cotangente, la sécante, la cosécante, le sinus verse ou le cosinus verse de l'arc a, et les notations

arc sin((a)),arc cos((a)),arc tang((a)),arc cot((a)),arc se´c((a)),arccose´c((a))

indiqueront un quelconque des arcs qui ont la quantité a pour sinus, ou cosinus, ou tangente, ou cotangente, ou sécante, ou cosécante. Nous nous servirons des notations simples

arc sin(a),arc cos(a),arc tang(a),arc cot(a),arc se´c(a),arc cose´c(a),

ou même, en supprimant tout à fait les parenthèses, des notations

suivantes

arc sina,arc cosa,arc tanga,arc cota,arc se´ca,arc cose´ca,

lorsque, parmi les arcs dont une ligne trigonométrique est égale a, nous voudrons désigner celui qui a la plus petite valeur numérique, ou, si ces arcs sont deux à deux égaux et de signes contraires, celui qui a la plus petite valeur positive. En conséquence,

arc sina,arc tanga,arc cot a,arc cose´ca,

indiqueront des arcs positifs ou négatifs, mais compris entre les limites

$-\pi 2, +\pi 2,$

π désignant la demi-circonférence dans le cercle qui a pour rayon l'unité, tandis que

arc cosa,arc se´ca indiqueront des arcs positifs compris entre les limites 0 et π.

En vertu des conventions que l'on vient d'établir, si l'on désigne par k un nombre entier arbitraire, on aura évidemment, pour des valeurs quelconques positives ou négatives de la quantité a,

On trouvera de plus, pour des valeurs positives de a,

et, pour des valeurs négatives de a,

Lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe, il est souvent utile d'indiquer cette limite par une notation particulière ; c'est ce que nous ferons, en plaçant l'abréviation lim devant la quantité variable dont il s'agit. Quelquefois, tandis qu'une ou plusieurs variables convergent vers des limites fixes, une expression qui renferme ces variables converge à la fois vers plusieurs limites différentes les unes des autres. Nous indiquerons alors une quelconque de ces dernières limites à l'aide de doubles parenthèses placées à la suite de l'abréviation lim, de manière à entourer l'expression que l'on considère. Supposons, pour fixer les idées, qu'une variable positive ou négative représentée par x converge vers la limite 0, et désignons par A un nombre constant : il sera facile de s'assurer que chacune des expressions limAx,limsinx a une valeur unique déterminée par l'équation limAx=1 ou limsinx=0, tandis que l'expression lim((1x)) admet deux valeurs, savoir, $+\infty$, $-\infty$, et lim((sin1x)) une infinité de valeurs comprises entre les limites -1 et $+1$.

Nous allons terminer ces préliminaires en présentant, sur les quantités moyennes, plusieurs théorèmes dont la connaissance nous sera fort utile dans la suite de cet Ouvrage. On appelle moyenne entre plusieurs quantités données une nouvelle quantité comprise entre la plus petite et

la plus grande de celles que l'on considère. D'après cette définition, il est clair qu'il existe une infinité de moyennes entre plusieurs quantités inégales, et que la moyenne entre plusieurs quantités égales se confond avec chacune d'elles. Cela posé, on établira facilement, ainsi qu'on peut le voir dans la Note II, les propositions suivantes :

Théorème I. — Soient b,b′,b″,... plusieurs quantités de même signe en nombre n, et a,a′,a″,... des quantités quelconques en nombre égal à celui des premières, La fraction a+a′+a″+...b+b′+b″+... sera moyenne entre les suivantes ab,a′b′,a″b″,...

Corollaire. — Si l'on suppose b=b′=b″=...=1, on conclura du théorème précédent que la quantité a+a′+a″+...n est moyenne entre les suivantes a,a′,a″,.... Cette espèce particulière de moyenne est ce qu'on nomme une moyenne arithmétique.

Théorème II. — Soient A,A′,A″,...;B,B′,B″,... deux suites de nombres pris à volonté, et formons avec ces deux suites, que nous supposons renfermer chacune un nombre n de termes, les racines AB,A′B′,A″B″,...; AA′A″...B+B′+B″... sera une nouvelle racine moyenne entre toutes les autres.

Corollaire. — Si l'on prend B=B′=B″=...=1, on trouvera que la quantité positive AA′A″...n est moyenne entre les suivantes A,A′,A″,.... Cette moyenne, d'une espèce particulière, est celle que l'on nomme moyenne géométrique.

Théorème III. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème I, si α,α′,α″,... désignent encore des quantités de même signe, la fraction αa+α′a′+α″a″+⋯αb+α′b′+α″b″+⋯ sera moyenne entre les suivantes aba′b′,a″b″,....

Corollaire. — Si l'on suppose b=b′=b″=...=1, on conclura du théorème précédent que la somme aα+a′α′+a″α″+⋯ est équivalente au produit de α+α′+α″+⋯ par une moyenne entre les quantités a,a′,a″,....

Pour abréger, lorsque nous voudrons désigner une moyenne entre plusieurs quantités a,a′,a″,..., nous nous servirons de la notation M(a,a′,a″,...)

Cela posé, les théorèmes qui précèdent et leurs corollaires se trouveront compris dans les formules

Dans ces formules,

a,a′,a″,...;b,b′,b″...;α,α′,α″,... représenteront trois suites de quantités, et A,A′,A″,...;B,B′,B″,... deux suites de nombres formées chacune de n termes différents. La troisième suite est, ainsi que la seconde, uniquement composée de quantités de même signe.

La notation que nous venons d'adopter fournit le moyen d'exprimer qu'une quantité est comprise entre deux limites données. En effet, toute quantité comprise entre les limites a,b étant une moyenne entre ces mêmes limites, on pourra la désigner par M(a,b). Ainsi, par exemple, toute quantité positive pourra être représentée par M(0,∞), toute quantité négative par M(−∞,0), et toute quantité réelle par M(−∞,+∞). Lorsque nous voudrons indiquer indistinctement une quelconque des quantités renfermées entre les limites a et b, nous doublerons les parenthèses, et nous écrirons M((a,b)) Par exemple, si l'on suppose que la variable x converge vers zéro, on aura lim((sin1x))=M((−1,+1)), attendu que l'expression lim((sin1x)) admettra une infinité de valeurs comprises entre les valeurs extrêmes −1 et +1.

Chapitre I

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante ; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes les autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de variables indépendantes ; et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des fonctions de ces mêmes variables.

Les diverses expressions que fournissent l'Algèbre et la Trigonométrie, lorsqu'elles renferment des variables considérées comme indépendantes, sont autant de fonctions de ces mêmes variables. Ainsi, par exemple,

L(x),sinx,... sont des fonctions de la variable x; x+y,xy,xyz,... des fonctions des variables x et y ou x, y et z,....

Lorsque des fonctions d'une ou de plusieurs variables se trouvent, comme dans les exemples précédents, immédiatement exprimées au moyen de ces mêmes variables, elles sont nommées fonctions explicites. Mais, lorsqu'on donne seulement les relations entre les fonctions et les variables, c'est-à-dire les équations auxquelles ces quantités doivent satisfaire, tant que ces équations ne sont pas résolues algébriquement, les fonctions, n'étant pas exprimées immédiatement au moyen des variables, sont appelées fonctions implicites. Pour les rendre explicites, il suffit de résoudre, lorsque cela se peut, les équations qui les déterminent. Par exemple, y étant une fonction implicite de x déterminée par l'équation L(y)=x, si l'on nomme A la base du système de logarithmes que l'on considère, la même fonction, devenue explicite par la résolution de l'équation donnée, sera y=Ax.

Lorsqu'on veut désigner une fonction explicite d'une seule variable x ou de plusieurs variables x,y,z,..., sans déterminer la nature de cette fonction, on emploie l'une des notations f(x),F(x),φ(x),χ(x),ψ(x),ω(x),..., f(x,y,z,...),F(x,y,z,...),φ(x,y,z,...),....

Pour qu'une fonction d'une seule variable soit complètement déterminée, il est nécessaire et il suffit que de chaque valeur particulière attribuée à la variable on puisse déduire la valeur correspondante de la fonction. Quelquefois, pour chaque valeur de la variable, la fonction donnée en obtient plusieurs différentes les unes des autres. Conformément aux conventions adoptées dans les préliminaires, nous désignerons d'ordinaire ces valeurs multiples d'une fonction par des notations dans lesquelles la variable sera entourée de doubles traits ou de doubles parenthèses. Ainsi, par exemple, arc sin((x)) indiquera un quelconque des arcs qui ont x pour sinus ; x=±x l'une quelconque des deux racines carrées de la variable x supposée positive, etc.

Parmi les fonctions d'une variable x, on appelle simples celles qui résultent d'une seule opération effectuée sur cette variable. Les fonctions simples que l'on considère ordinairement en Analyse sont en très petit nombre, et se rapportent les unes à l'Algèbre, les autres à la Trigonométrie. L'addition et la soustraction, la multiplication et la division, l'élévation aux puissances et l'extraction

des racines, enfin la formation des exponentielles et des logarithmes produisent les fonctions simples qui se rapportent à l'Algèbre. En conséquence, si l'on désigne par A un nombre constant, et par a=±A une quantité constante, les fonctions algébriques simples de la variable x seront

a+x,a−x,ax,ax,xa,Ax,L(x). Nous ne tenons pas ici compte des racines, parce qu'on peut toujours les ramener aux puissances. Quant aux fonctions simples qui se rapportent à la Trigonométrie, on pourrait en compter un grand nombre, si l'on rangeait parmi les fonctions simples toutes les lignes trigonométriques et les arcs qui correspondent à ces mêmes lignes ; mais nous les réduirons aux quatre suivantes sinx,cosx, arc sinx,arc cosx, et nous mettrons au nombre des fonctions composées les autres lignes trigonométriques tangx,se´cx,... avec les arcs correspondants arc tang x,arc se´c x,..., attendu que ces dernières lignes peuvent toujours être exprimées par le moyen du sinus et du cosinus. Nous pourrions même, à la rigueur, réduire les deux fonctions simples sinx et cosx à une seule, puisqu'elles sont liées entre elles par l'équation sin2x+cos2x=1 ; mais l'emploi de ces deux fonctions est si fréquent, qu'il est utile de les conserver toutes deux à la fois dans le calcul comme fonctions simples.

Les fonctions qui se déduisent d'une variable à l'aide de plusieurs opérations prennent le nom de fonctions composées ; et l'on distingue parmi ces dernières les fonctions de fonctions qui résultent de plusieurs opérations successives, la première opération étant effectuée sur la variable, et chacune des autres sur le résultat de l'opération précédente. En vertu de ces définitions, xx,xx,lxx,... sont des fonctions composées de la variable x ; et l(sinx),l(cosx),... des fonctions de fonctions, dont chacune résulte de deux opérations successives.

Les fonctions composées se distinguent les unes des autres par la nature des opérations qui les produisent. Il semble que l'on devrait nommer fonctions algébriques toutes celles que fournissent les opérations de l'Algèbre ; mais on a réservé particulièrement ce nom à celles que l'on forme en n'employant que les premières opérations algébriques, savoir, l'addition et la soustraction, la multiplication et la division, enfin l'élévation à des puissances fixes ; et, dès qu'une fonction renferme des exposants variables ou des logarithmes, elle prend le nom de fonction exponentielle ou logarithmique.

Les fonctions que l'on nomme algébriques se divisent en fonctions rationnelles et fonctions irrationnelles. Les fonctions rationnelles sont celles dans lesquelles la variable ne se trouve élevée qu'à des puissances entières. On appelle, en particulier, fonction entière tout polynôme qui ne renferme que des puissances entières de la variable, par exemple, a+bx+cx2+..., et fonction fractionnaire on fraction rationnelle le quotient de deux semblables polynômes. Le degré d'une fonction entière de x est l'exposant de la plus haute puissance de x dans cette même fonction. La fonction entière du premier degré, savoir a+bx s'appelle aussi fonction linéaire, parce que, dans l'application à la Géométrie, on s'en sert pour représenter l'ordonnée d'une ligne droite. Toute fonction entière ou fractionnaire est par cela même rationnelle, et toute autre espèce de fonction algébrique est irrationnelle.

Les fonctions que produisent les opérations de la Trigonométrie sont désignées sous le nom de fonctions trigonométriques ou circulaires.

Les divers noms que l'on vient d'attribuer aux fonctions composées d'une seule variable s'appliquent également aux fonctions de plusieurs variables, lorsque ces dernières fonctions jouissent, par rapport à chacune des variables qu'elles renferment, des propriétés que supposent les noms dont il s'agit. Ainsi, par exemple, tout polynôme qui ne contiendra que des puissances entières des variables x,y,z,..., sera une fonction entière de ces variables. On appelle degré de cette fonction en-

tière la somme des exposants des variables dans le terme où cette somme est la plus grande. Une fonction entière du premier degré, telle que a+bx+cy+dz+..., prend le nom de fonction linéaire.

Chapitre II

DES QUANTITÉS INFINIMENT PETITES OU INFINIMENT GRANDES, ET DE LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS. VALEURS SINGULIÈRES DES FONCTIONS DANS QUELQUES CAS PARTICULIERS.

On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro. Il est bon de remarquer à ce sujet qu'on ne doit pas confondre un décroissement constant avec un décroissement indéfini. La surface d'un polygone régulier circonscrit à un cercle donné décroît constamment à mesure que le nombre des côtés augmente, mais non pas indéfiniment, puisqu'elle a pour limite la surface du cercle. De même encore, une variable qui n'admettrait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

prolongée à l'infini, décroîtrait constamment, mais non pas indéfiniment, puisque ses valeurs successives convergeraient vers la limite 1. Au contraire, une variable qui n'aurait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

prolongée à l'infini, ne décroîtrait pas constamment, puisque la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est alternativement positive et négative ; et, néanmoins, elle décroîtrait indéfiniment, puisque sa valeur finirait par s'abaisser au-dessous de tout nombre donné. On dit qu'une quantité variable devient infiniment grande, lorsque sa valeur numérique croit indéfiniment de manière à converger vers la limite ∞. Il est encore essentiel d'observer ici qu'on ne doit pas confondre une variable qui croit indéfiniment avec une variable qui croit constamment. La surface d'un polygone régulier inscrit à un cercle donné croit constamment, mais non pas indéfiniment, à mesure que le nombre des côtés augmente. Les termes de la suite naturelle des nombres entiers

croissent constamment et indéfiniment.

Les quantités infiniment petites et infiniment grandes jouissent de plusieurs propriétés, qui conduisent à la solution de questions importantes, et que je vais exposer en peu de mots.

Soit α une quantité infiniment petite, c'est-à-dire une variable dont la valeur numérique décroisse indéfiniment. Lorsque dans un même calcul on fait entrer les diverses puissances entières de \alpha, savoir

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots,$$

ces diverses puissances sont respectivement désignées sous le nom d'infiniment petits du premier, du second, du troisième ordre, etc. En général, on appelle infiniment petit du premier ordre toute quantité variable dont le rapport avec α converge, tandis que la valeur numérique de α diminue, vers une limite finie différente de zéro ; infiniment petit du second ordre toute quantité variable avec α, et dont le rapport avec α^2 converge vers une limite finie différente de zéro, etc. Cela posé, si l'on désigne par k une quantité finie différente de zéro, et par ε un nombre variable qui décroisse indéfiniment avec la valeur numérique de α, la forme générale des quantités infiniment petites du premier ordre sera

$$\text{kaou du moinska}(1\pm\text{e});$$

la forme générale des quantités infiniment petites du second ordre

$$\text{ka2ou du moinska2}(1\pm\text{e}),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

enfin la forme générale des infiniment petits de l'ordre n (n représentant un nombre entier) sera

$$\text{kanou du moinskan}(1\pm\text{e}).$$

On peut facilement établir, à l'égard de ces divers ordres de quantités infiniment petites, les théorèmes suivants :

Théorème I. — Si l'on compare l'un à l'autre deux infiniment petits d'ordres différents, pendant que tous les deux convergeront vers la limite zéro, celui qui est de l'ordre le plus éleve finira par obtenir constamment la plus petite valeur numérique.

Démonstration. — Soient, en effet,

$$\text{kan}(1\pm\text{e}),\text{k}'\text{an}'(1\pm\text{e}')$$

deux infiniment petits, l'un de l'ordre n, l'autre de l'ordre n′, et supposons n′>n; le rapport entre le second de ces infiniment petits et le premier, savoir

$$\text{k}'\text{kan}'-\text{n}1\pm\text{e}'1\pm\text{e},$$

convergera indéfiniment avec α vers la limite zéro, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la valeur numérique du second finit par devenir constamment inférieure à celle du premier.

Théorème II. — Un infiniment petit de l'ordre n, c'est-à-dire de la forme

$$\text{kan}(1\pm\text{e}),$$

change de signe avec α toutes les fois que n est un nombre impair, et conserve pour de très petites valeurs numériques de α le même signe que la quantité k, lorsque n est un nombre pair.

Démonstration. — En effet, dans la première hypothèse, αn change de signe avec α, et, dans la seconde, αn est toujours positif. De plus, le signe du produit k(1±ε) est le même que celui de k, lorsque ε est très petit.

Théorème III. — La somme de plusieurs infiniment petits des ordres

$$\text{n},\text{n}',\text{n}'',\ldots$$

(n′,n″,... désignant des nombres supérieurs à n) est un nouvel infiniment petit de l'ordre n.

Démonstration. — En effet,

$$\text{kan}(1\pm\text{e})+\text{k}'\text{an}'(1\pm\text{e}')+\text{k}''\text{an}''(1\pm\text{e}'')+\ldots=\text{kan}[1\pm\text{e}+\text{k}'\text{kan}'-\text{n}(1\pm\text{e}')+\text{k}''\text{kan}''-\text{n}(1\pm\text{e}'')+\ldots]=\text{kan}(1\pm\text{e}1).$$

ε1 étant un nombre qui converge avec α vers la limite zéro.

Des principes qu'on vient d'énoncer on déduit aisément, comme on va le voir, plusieurs propositions remarquables qui se rapportent à des polynomes ordonnés suivant les puissances ascendantes d'une quantité infiniment petite α.

Théorème IV. — Tout polynôme ordonné suivant les puissances ascendantes de \alpha, par exemple

$$A+BA+CA2+\ldots$$

ou, plus généralement,

$$AAN+BAN'+CAN''+\ldots$$

(les nombres n,n′,n″,..., formant une suite croissante), finit par être, pour de très petites valeurs numériques de α, constamment de même signe que son premier terme

$$AOUAAN.$$

Démonstration. — En effet, la somme faite du second terme et de ceux qui le suivent est, dans le premier cas, un infiniment petit du premier ordre, dont la valeur numérique finit par être inférieure à celle de la quantité finie a, et, dans le second cas, un infiniment petit de l'ordre n′, qui finit par obtenir constamment une valeur numérique inférieure à celle d'un infiniment petit de l'ordre n.

Théorème V. — Lorsque, dans le polynôme

$$AAN+BAN'+CAN''+\ldots,$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α, le degré n′ du second terme est un nombre impair, ce polynôme, pour de très petites valeurs numériques de α, est tantôt supérieur et tantôt inférieur à son premier terme aαn, suivant que la variable α et le coefficient b sont de même signe ou de signes contraires.

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse admise, la somme des termes qui suivent le premier, savoir

$$BAN'+CAN''+\ldots,$$

sera, pour de très petites valeurs numériques de α, de même signe que chacun des deux produits bαn′,bα.

Théorème VI. — Lorsque, dans le polynôme

$$AAN+BAN'+CAN''+\ldots,$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α, le degré n′ du second terme est un nombre pair, ce polynôme, pour de très petites valeurs numériques de α, finit par devenir constamment supérieur à son premier terme, toutes les fois que b est positif, et constamment inférieur, toutes les fois que b est négatif.

Démonstration. — En effet, dans l'hypothèse admise, la somme des termes qui suivent le premier aura, pour de très petites valeurs numériques de α, le signe du produit bαn′, et, par suite, le signe de b.

Corollaire. — En supposant, dans le théorème qui précède, n=0, on obtiendra la proposition suivante :

Théorème VII. — Si, dans le polynôme

$$A+BAN'+CAN''+\ldots,$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α, n′ désigne un nombre pair ; parmi les valeurs de ce polynôme correspondantes à des valeurs infiniment petites de α, celle qui correspond à α=0, c'est-à-dire a, sera toujours la plus petite, lorsque b sera positif, et la plus grande, lorsque b sera négatif.

Cette valeur particulière du polynôme, plus grande ou plus petite que toutes les valeurs voisines, est ce qu'on appelle un maximum ou un minimum.

Les propriétés des quantités infiniment petites étant établies, on en déduit les propriétés analogues des quantités infiniment grandes, en observant que toute quantité variable de cette dernière espèce peut être représentée par 1α, α désignant une quantité infiniment petite. Ainsi, par exemple, lorsque, dans le polynôme

$$AX^m+BX^{m-1}+CX^{m-2}+\ldots+HX+K,$$

ordonné suivant les puissances descendantes de la variable x, cette variable devient infiniment grande ; en la mettant sous la forme 1α, on réduit le polynôme dont il s'agit à

$$A^m\left(1+BA+CA^2+\ldots+HA^{m-1}+KA^m\right),$$

et l'on reconnaît alors immédiatement que, pour de très petites valeurs numériques de α, ou, ce qui revient au même, pour de très grandes valeurs numériques de x, ce polynôme est de même signe que son premier terme

$$A^m=AX^m.$$

Comme cette remarque subsiste dans le cas même où quelques-unes des quantités b,c,...,h,k se réduisent à zéro, il en résulte qu'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — Lorsque, dans un polynôme ordonné suivant les puissances descendantes de la variable x, on fait croître indéfiniment la valeur numérique de cette variable, le polynôme finit par être constamment de même signe que son premier terme.

§ II. — De la continuité des fonctions.

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit f(x) une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction f(x) sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, la fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

On dit encore que la fonction f(x) est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction f(x) cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors discontinue et qu'il y a pour cette valeur particulière solution de continuité.

D'après ces explications, il sera facile de reconnaître entre quelles limites une fonction donnée de la variable x est continue par rapport à cette variable. Ainsi, par exemple, la fonction sinx, admettant pour chaque valeur particulière de la variable x une valeur unique et finie, sera continue entre deux limites quelconques de cette variable, attendu que la valeur numérique de sin(12α), et par suite celle de la différence

$$\sin(x+\alpha)-\sin x=2\sin(12\alpha)\cos(x+12\alpha),$$

décroissent indéfiniment avec celle de α, quelle que soit d'ailleurs la valeur finie que l'on attribue à x. En général, si l'on envisage sous le rapport de la continuité les onze fonctions simples que nous avons considérées ci-dessus (Chap. I, § II), savoir

$$a+x,a-x,ax,ax,xa,Ax,L(x),$$

$$\sin x,\cos x,\arcsin x,\arccos x,$$

on trouvera que chacune de ces fonctions reste continue entre deux limites finies de la variable x, toutes les fois que, étant constamment réelle entre ces deux limites, elle ne devient pas infinie dans l'intervalle.

Par suite, chacune de ces fonctions sera continue dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à la variable x, si cette valeur finie se trouve comprise :

enfin

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on suppose a=±m (m désignant un nombre entier), la fonction simple

$$x^a$$

est toujours continue dans le voisinage d'une valeur finie de la variable x, pourvu que cette valeur soit comprise :

Parmi les onze fonctions que l'on vient de citer, deux seulement deviennent discontinues pour une valeur de x comprise dans l'intervalle des limites entre lesquelles ces mêmes fonctions restent réelles. Les deux fonctions dont il s'agit sont

$$a^x \text{ et } x^a \text{ (lorsque } a=-m).$$

L'une et l'autre deviennent infinies, et par conséquent discontinues, pour x=0.

Soit maintenant

$$F(x,y,z,\ldots)$$

une fonction de plusieurs variables x,y,z,..., et supposons que, dans le voisinage de valeurs particulières X,Y,Z,... attribuées à ces variables, f(x,y,z,...) soit à la fois fonction continue de x, fonction continue de y, fonction continue de z,.... On prouvera aisément que, si l'on désigne par α,β,γ,... des quantités infiniment petites, et si l'on attribue à x,y,z,... les valeurs X,Y,Z,... ou des valeurs très voisines, la différence

$$F(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma)-F(x,y,z,\ldots)$$

sera elle-même infiniment petite. En effet, il est clair que, dans l'hypothèse précédente, les valeurs numériques des différences

. . . . . .

décroîtront indéfiniment avec celles des quantités variables α,β,γ,..., savoir, la valeur numérique de la première différence avec la valeur numérique de α, celle de la seconde différence avec la valeur numérique de β, celle de la troisième avec la valeur numérique de γ, et ainsi de suite. On doit en conclure que la somme de toutes ces différences, savoir

$$F(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma,\ldots)-F(x,y,z,\ldots),$$

convergera vers la limite zéro, si α,β,γ,... convergent vers cette même limite. En d'autres termes,

$$F(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma,\ldots)$$

aura pour limite

$$F(x,y,z,\ldots).$$

La proposition qu'on vient de démontrer subsiste évidemment dans le cas même où l'on établirait entre les nouvelles variables α,β,γ,... certaines relations. Il suffit que ces relations permettent aux nouvelles variables de converger toutes en même temps vers la limite zéro.

Lorsque, dans la même proposition, on remplace x,y,z,... par X,Y,Z,..., et x+α,y+β,z+γ,... par x,y,z,..., on obtient l'énoncé suivant :

Théorème I. — Si les variables x,y,z,... ont pour les quantités fixes et déterminées X,Y,Z,..., limites respectives et que la fonction f(x,y,z,...) soit continue par rapport à chacune des variables x,y,z,... dans le voisinage du système des valeurs particulières

f(x,y,z,...) aura pour limite f(X,Y,Z,...).

Comme, dans ce second énoncé, les variables α,β,γ,... se trouvent remplacées par x−X,y−Y,z−Z,..., les relations qu'on pouvait établir, dans le premier énoncé, entre α,β,γ,..., pourront être établies, dans le second, entre les quantités x−X,y−Y,z−Z; et il en résulte que la fonction f(x,y,z,...) aura pour limite f(X,Y,Z,...), dans le cas même où les variables x,y,z,... seraient assujetties à certaines relations, pourvu que ces relations leur permettent de s'approcher indéfiniment des limites X,Y,Z,....

Supposons, pour fixer les idées, que x,y,z,... soient fonctions d'une même variable t considérée comme indépendante, et continues par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière

$$t=T.$$

Si l'on fait, pour plus de commodité,

$$f(x,y,z,\ldots)=u,$$

u sera ce qu'on appelle une fonction composée de la variable t ; et, si

désignent respectivement ce que deviennent

dans le cas où l'on suppose t=T, il est clair, d'une part, qu'une valeur de t très voisine de T fournira pour u une valeur unique et finie ; d'autre part, qu'il suffira de faire converger t vers la limite T, pour que les variables x,y,z,... convergent vers les limites X,Y,Z,..., et, par suite, la fonction u=f(x,y,z,...) vers la limite U=f(X,Y,Z,...). On prouverait absolument de la même manière que, si l'on attribue à t une valeur très voisine de T, la valeur correspondante de la fonction u sera la limite de laquelle cette fonction s'approchera indéfiniment, tandis que t convergera vers la valeur donnée ; et l'on doit conclure que u sera fonction continue de t dans le voisinage de t=T. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — Désignons par

plusieurs fonctions de la variable t, qui soient continues par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière t=T. Soient, de plus.

les valeurs particulières de x,y,z,... correspondantes à t=T; et supposons que, dans le voisinage de ces valeurs particulières, la fonction

$$u=f(x,y,z,\ldots)$$

soit en même temps continue par rapport à x, continue par rapport à y, continue par rapport à z,...; u, considérée comme une fonction de t, sera encore continue par rapport à t dans le voisinage de la valeur particulière t=T.

Si, dans le théorème précédent, on réduit les quantités variables x,y,z,... à une seule, x, on obtiendra un nouveau théorème, qu'on peut énoncer comme il suit :

Théorème III.. — Supposons que, dans l'équation

$$u=f(x).$$

la variable x soit fonction d'une autre variable t. Concevons de plus que la variable x soit fonction continue de t dans le voisinage de la valeur particulière t=T, et u fonction continue de x dans le voisinage de la valeur particulière x=X correspondante à t=T. La quantité u, considérée comme fonction de t, sera encore continue par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière t=T.

Supposons, par exemple,

$$u=axetx=tn,$$

a désignant une quantité constante, et n un nombre entier. On conclura du théorème III que

$$u=atn$$

est, entre des limites quelconques de la variable t, fonction continue de cette variable.

De même, si l'on fait

$$u=xy,x=sint,y=cost,$$

on conclura du théorème II que la fonction

$$u=tangt$$

est continue par rapport à t dans le voisinage d'une valeur finie quelconque de cette variable, toutes les fois que la valeur dont il s'agit n'est pas comprise dans la formule

$$t=\pm 2k\pi\pm\pi 2,$$

k désignant un nombre entier ; c'est-à-dire toutes les fois qu'à cette valeur de t correspond une valeur finie de tangt. Au contraire, la fonction tangt admettra une solution de continuité, en devenant infinie, pour chacune des valeurs de t comprises dans la formule précédente.

Supposons encore

$$u=a+x+y+z+\ldots,x=bt,y=ct2,\ldots,$$

a,b,c,... désignant des quantités constantes. Alors, u étant fonction continue de x,y,z,... entre des limites quelconques de ces variables, et x,y,z,... fonctions continues de la variable t entre des limites quelconques de cette dernière, on conclura du théorème III que la fonction

$$u=a+bt+ct2+\cdots$$

est elle-même continue par rapport à t entre des limites quelconques. Par suite, comme t=0 donne a=a, si l'on fait converger t vers la limite zéro, la fonction u convergera vers la limite a et finira par obtenir le même signe que cette limite, ce qui s'accorde avec le théorème IV du § I.

Une propriété remarquable des fonctions continues d'une seule variable, c'est de pouvoir servir à représenter en Géométrie les ordonnées de lignes continues droites ou courbes. De cette remarque on déduit facilement la proposition suivante :

Théorème IV. — Si la fonction f(x) est continue par rapport à la variable x entre les limites x=x0, x=X, et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre f(x0) et f(X), on pourra toujours satisfaire à l'équation

$$f(x)=b$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x0 et X.

Démonstration. — Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour, équation

$$y=f(x)$$

rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation

$$y=b$$

dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction f(x) étant continue entre les limites $x=x_0$, x=X, la courbe qui a pour équation y=f(x) et qui passe 1 par le point correspondant aux coordonnées x_0,$f(x_0)$, 2 par le point correspondant aux coordonnées X et f(X), sera continue entre ces deux points ; et, comme l'ordonnée constante b de la droite qui a pour équation y=b se trouve comprise entre les ordonnées $f(x_0)$, f(X) des deux points que l'on considère, la droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée.

On peut, au reste, comme on le fera dans la Note III, démontrer le théorème IV par une méthode directe et purement analytique, qui a même l'avantage de fournir la résolution numérique de l'équation

$$f(x)=b.$$

§ III. — Valeurs singulières des fonctions dans quelques cas particuliers.

Lorsque, pour un système de valeurs attribuées aux variables qu'elle renferme, une fonction d'une ou de plusieurs variables n'admet qu'une seule valeur, cette valeur unique se déduit ordinairement de la définition même de la fonction. S'il se présente un cas particulier dans lequel la définition donnée ne puisse plus fournir immédiatement la valeur de la fonction que l'on considère, on cherche la limite ou les limites vers lesquelles cette fonction converge, tandis que les variables s'approchent indéfiniment des valeurs particulières qui leur sont assignées ; et, s'il existe une ou plusieurs limites de cette espèce, elles sont regardées comme autant de valeurs de la fonetion dans l'hypothèse admise. Nous nommerons valeurs singulières de la fonction proposée celles qui se trouvent déterminées comme on vient de le dire. Telles sont, par exemple, celles qu'on obtient en attribuant aux variables des valeurs infinies, et souvent aussi celles qui correspondent à des solutions de continuité. La recherche des valeurs singulières des fonctions est une des questions les plus importantes et les plus délicates de l'Analyse : elle offre plus ou moins de difficultés, suivant la nature des fonctions et le nombre des variables qu'elles renferment.

Si d'abord on considère les fonctions simples d'une seule variable, on trouvera qu'il est facile de fixer leurs valeurs singulières. Ces valeurs correspondent toujours à l'une des trois hypothèses

et sont respectivement

La notation M((−1,+1)) désigne ici, comme dans les préliminaires, une quelconque des quantités moyennes entre les deux limites

$$-1 \text{ et } +1.$$

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on suppose $a=\pm m$, m désignant un nombre entier, la fonction simple

$$x^a$$

admet constamment trois valeurs singulières, savoir :

Considérons maintenant les fonctions composées d'une seule variable x. Quelquefois il est aisé de trouver leurs valeurs singulières. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par k un nombre entier quelconque, on reconnaîtra sans peine que la fonction composée

$$\text{TANG}x=\text{SIN}x\text{COS}x$$

a ses valeurs singulières comprises dans les trois formules

$$\text{TANG}((\infty))=\text{M}((-\infty,+\infty)),\text{TANG}((2k\Pi\pm\Pi 2))=\pm\infty,\text{TANG}((-\infty))=\text{M}((-\infty,+\infty)),$$

tandis que les valeurs singulières de la fonction inverse

$$\text{ARCTANG}x=\text{ARCSIN}x1+x2$$

sont respectivement

$$\text{ARCTANG}(-\infty)=-\Pi 2,\text{ARCTANG}(\infty)=\Pi 2.$$

Mais souvent aussi de semblables questions présentent de véritables difficultés. Par exemple, on n'aperçoit pas immédiatement comment on peut déterminer la valeur singulière de la fonction

lorsqu'on y suppose x=0, ou celle de la fonction

$$x1x,$$

lorsqu'on prend x=∞. Pour donner une idée des méthodes qui conduisent à la solution des questions de cette espèce, je vais établir ici deux théorèmes à l'aide desquels on peut, dans un grand nombre de cas, déterminer les valeurs singulières que reçoivent les deux fonctions

$$\text{F}(x)x,[\text{F}(x)]1x,$$

lorsqu'on y suppose x=∞.

Théorème I. — Si, pour des valeurs croissantes de x, la différence

$$\text{F}(x+1)-\text{F}(x)$$

converge vers une certaine limite k, la fraction

$$\text{F}(x)x$$

convergera en même temps vers la même limite.

Démonstration. — Supposons d'abord que la quantité k ait une valeur finie, et désignons par ε un nombre aussi petit que l'on voudra. Puisque des valeurs croissantes de x font converger la différence

$$\text{F}(x+1)-\text{F}(x)$$

vers la limite k, on pourra donner au nombre h une valeur assez considérable pour que, x étant égal ou supérieur à h, la différence dont il s'agit soit constamment comprise entre les limites

$$k-\varepsilon,k+\varepsilon.$$

Cela posé, si l'on désigne par n un nombre entier quelconque, chacune des quantités

$$F(H+1)-F(H), F(H+2)-F(H+1), \ldots\ldots\ldots\ldots, F(H+N)-F(H+N-1),$$

et, par suite, leur moyenne arithmétique, savoir

$$F(H+N)-F(H)N,$$

se trouvera comprise entre les limites $k-\varepsilon$, $k+\varepsilon$. On aura donc

$$F(H+N)-F(H)N=K+A,$$

α étant une quantité comprise entre les limites $-\varepsilon, +\varepsilon$. Soit maintenant

$$H+N=X.$$

L'équation précédente deviendra

et l'on en conclura

De plus, pour faire croître indéfiniment la valeur de x, il suffira de faire croître indéfiniment le nombre entier n sans changer la valeur de h. Supposons, en conséquence, que dans l'équation (2) on considère h comme une quantité constante, et x comme une quantité variable qui converge vers la limite. Les quantités

$$F(H)X, HX,$$

renfermées dans le second membre, convergeront vers la limite zéro. et le second membre lui-même vers une limite de la forme

$$K+A,$$

α étant toujours compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. Par suite, le rapport

$$F(X)X$$

aura pour limite une quantité comprise entre $k-\varepsilon$ et $k+\varepsilon$. Cette conclusion devant subsister, quelle que soit la petitesse du nombre ε, il en résulte que la limite en question sera précisément la quantité k. En d'autres termes, on aura

Supposons, en second lieu, $k=\infty$. En désignant alors par H un nombre aussi grand que l'on voudra, on pourra toujours attribuer au nombre h une valeur assez considérable, pour que, x étant égal ou supérieur à h, la différence

$$F(X+1)-F(X),$$

qui converge vers la limite ∞, devienne constamment supérieure à H; et, en raisonnant comme ci-dessus, on établira la formule

$$F(H+N)-F(H)N>H.$$

Si maintenant on pose $h+n=x$, on trouvera, au lieu de l'équation (2), la formule suivante

$$F(X)X>F(H)X+H(1-HX),$$

de laquelle on conclura, en faisant converger x vers la limite ∞,

$$\text{LIM} f(x)x > H.$$

La limite du rapport

$$f(x)x$$

sera donc supérieure au nombre H, quelque grand qu'il soit. Cette limite supérieure à tout nombre assignable ne peut être que l'infini positif.

Supposons enfin k=−∞. Pour ramener ce dernier cas au précédent, il suffira d'observer que, la différence

$$f(x+1)-f(x)$$

avant pour limite −∞, la suivante

$$[-f(x+1)]-[-f(x)]$$

aura pour limite +∞. On en conclura que la limite de −f(x)x est égale à +∞, et par suite celle de f(x)x à −∞.

Corollaire I. — Pour montrer une application du théorème précédent, supposons

$$f(x)=L(x),$$

Létant la caractéristique des logarithmes dans un système dont la base surpasse l'unité. On trouvera

$$f(x+1)-f(x)=L(x+1)-L(x)=L(1+1x)$$

et, par suite,

$$k=L(1+1\infty)=L(1)=0.$$

On peut donc affirmer que, x venant à croître indéfiniment, le rapport

convergera vers la limite zéro ; et il en résulte que, dans un système dont la base est supérieure à l'unité, les logarithmes des nombres croissent beaucoup moins rapidement que les nombres eux-mêmes.

Corollaire II. — Supposons, en second lieu,

$$f(x)=Ax,$$

Adésignant un nombre supérieur à l'unité. On trouvera

$$f(x+1)-f(x)=Ax+1-Ax=Ax(A-1)$$

et, par suite,

$$k=A\infty(A-1)=\infty.$$

On peut donc affirmer que, x venant à croître indéfiniment, le rapport

$$Axx$$

converge vers la limite ∞, et il en résulte que l'exponentielle Ax, lorsque le nombre A surpasse l'unité, finit par croître beaucoup plus rapidement que la variable x.

Corollaire III. On doit observer, au reste, qu'il n'y a lieu à chercher par le théorème I la valeur du rapport

$$f(x)x,$$

correspondante à x=∞, que dans le cas où la fonction f(x) devient infinie avec la variable x. Si cette fonction restait finie pour x=∞, le rapport f(x)x aurait évidemment zéro pour limite.

Je passe au théorème qui sert à déterminer dans plusieurs cas la valeur de

$$[f(x)]1x$$

pour x=∞. Voici en quoi il consiste :

Théorème II. — Si, la fonction f(x) étant positive pour de très grandes valeurs de x, le rapport

$$f(x+1)f(x)$$

converge, tandis que x croît indéfiniment, vers la limite k, l'expression

$$[f(x)]1x$$

convergera en même temps vers la même limite.

Démonstration. — Supposons d'abord que la quantité k, nécessairement positive, ait une valeur finie, et désignons par ε un nombre aussi petit que l'on voudra. Puisque des valeurs croissantes de x font converger le rapport

$$f(x+1)f(x)$$

vers la limite k, on pourra donner au nombre h une valeur assez considérable pour que, x étant égal ou supérieur à h, le rapport dont il s'agit soit constamment compris entre les limites

$$k-e,k+e.$$

Cela posé, si l'on désigne par n un nombre entier quelconque, chacune des quantités

$$f(h+1)f(h),f(h+2)f(h+1),\ldots f(h+n)f(h+n-1),$$

et, par suite, leur moyenne géométrique, savoir

$$[f(h+n)f(h)]1n,$$

se trouvera comprise entre les limites k−ε,k+ε. On aura donc

$$[f(h+n)f(h)]1n=k+a,$$

α étant une quantité comprise entre les limites −ε,+ε. Soit maintenant

$$h+n=x.$$

L'équation précédente deviendra

et l'on en conclura

$$F(x)=F(h)(k+\alpha)x-h,$$

De plus, pour faire croître indéfiniment la valeur de x, il suffira de faire croître indéfiniment le nombre entier n, sans changer la valeur de h. Supposons, en conséquence, que dans l'équation (5) on considère h comme une quantité constante, et x comme une quantité variable qui converge vers la limite ∞. Les quantités

$$[F(h)]1x,1-hx,$$

renfermées dans le second membre, convergeront vers la limite 1, et le second membre lui-même vers une limite de la forme

$$k+\alpha,$$

α étant toujours compris entre −ε et +ε. Par suite, l'expression

$$[F(x)]1x$$

aura pour limite une quantité comprise entre k−ε et k+ε. Cette conclusion devant subsister, quelle que soit la petitesse du nombre ε, il en résulte que la limite en question sera précisément la quantité k. En d'autres termes, on aura

Supposons, en second lieu, la quantité k infinie, c'est-à-dire, puisque cette quantité est positive, k=∞. En désignant alors par H un nombre aussi grand que l'on voudra, on pourra toujours attribuer au nombre h une valeur assez considérable pour que, x étant égal ou supérieur à h, le rapport

$$F(x+1)F(x),$$

qui converge vers la limite ∞, devienne constamment supérieur à H; et, en raisonnant comme ci-dessus, on établira la formule

$$[F(h+n)F(h)]1n>H.$$

Si maintenant on pose h+n=x, on trouvera, au lieu de l'équation (5), la formule suivante.

$$[F(x)]1x>[F(h)]1xH1-hx,$$

de laquelle on conclura, en faisant converger x vers la limite ∞,

$$\lim[F(x)]1x>H.$$

La limite de l'expression

$$[F(x)]1x$$

sera donc supérieure au nombre H, quelque grand qu'il soit. Cette limite, supérieure à tout nombre assignable, ne peut être que l'infini positif.

Nota. — On pourrait facilement démontrer l'équation (6), en cherchant par le théorème I la limite vers laquelle converge le logarithme

et repassant ensuite des logarithmes aux nombres.

Corollaire I. Pour donner une application du théorème II, supposons

$$f(x)=x;$$

on aura

$$f(x+1)f(x)=x+1x=1+1x,$$

et, par suite, en passant aux limites,

$$k=1.$$

Donc, si l'on fait croître indéfiniment la variable x, la fonction

$$x1x$$

convergera vers la limite 1.

Corollaire II. — Soit, en second lieu,

$$f(x)=ax+bxn-1+cxn-2+\ldots=P,$$

en sorte que P désigne un polynôme en x du degré n. On trouvera

$$f(x+1)f(x)=a(1+1x)n+bx(1+1x)n-1+cx2(1+1x)n-2+\ldots a+bx+cx2+\ldots$$

et, en passant aux limites,

$$k=aa=1.$$

Si donc P représente un polynôme entier quelconque, P1x aura pour limite 1.

Corollaire III. — Soit enfin

$$f(x)=L(x).$$

On trouvera

$$f(x+1)f(x)=L(x+1)L(x)=L(x)+L(1+1x)L(x)=1+L(1+1x)L(x)$$

et, en passant aux limites,

$$k=1.$$

Par suite, [L(x)]1x a encore pour limite l'unité.

Les théorèmes I et II subsistent évidemment dans le cas même où la variable x est considérée comme ne pouvant admettre que des valeurs entières. En effet, pour rendre applicables à ce cas particulier les démonstrations que nous avons données des deux théorèmes, il suffit de concevoir que la quantité désignée par h dans chacune de ces démonstrations devienne un nombre entier très considérable. Si, dans le même cas, on représente les valeurs successives de la fonction f(x) correspondantes aux diverses valeurs entières de x, savoir

$$f(1),f(2),f(3),\ldots,f(n),$$

par

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n,$$

on obtiendra à la place des théorèmes I et II les propositions suivantes :

Théorème III. — Si la suite des quantités

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$$

est telle que la différence entre deux termes consécutifs de cette suite, savoir

$$A_{n+1} - A_n,$$

converge constamment, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite fixe A, le rapport

$$\frac{A_n}{n}$$

convergera en même temps vers la même limite.

Théorème IV. — Si la suite des nombres

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$$

est telle que le rapport entre deux termes consécutifs, savoir

$$\frac{A_{n+1}}{A_n},$$

converge constamment, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite fixe A, l'expression

$$(A_n)^{\frac{1}{n}}$$

convergera en même temps vers la même limite.

Pour montrer une application du dernier théorème, supposons

$$A_n = 1.2.3 \ldots n.$$

La suite $A_1, A_2, \ldots$ deviendra

$$1, 1.2, 1.2.3, \ldots, 1.2.3 \ldots (n-1)_n, \ldots.$$

et le rapport entre deux termes consécutifs de la même suite, savoir

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1.2.3 \ldots n (n+1)}{1.2.3 \ldots n} = n+1,$$

convergera évidemment, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite ∞. Par suite, l'expression

$$(A_n)^{\frac{1}{n}} = (1.2.3 \ldots n)^{\frac{1}{n}}$$

converge vers la même limite.

On trouverait, au contraire, que l'expression

$$(11.2.3 \ldots n)^{\frac{1}{n}}$$

converge, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro.

Souvent, à l'aide des théorèmes I et II, on peut déterminer la valeur singulière que reçoit une fonction composée de la variable x, tandis que cette variable s'évanouit. Ainsi, par exemple, si l'on veut obtenir la valeur singulière de xx correspondante à x=0, il suffira de chercher la limite vers laquelle converge, pour des valeurs croissantes de x, l'expression (1x)1x=1x1x. Cette limite, en vertu du théorème II (corollaire I), est égale à l'unité.

De même, on conclurait du théorème I (corollaire I) que la fonction

s'évanouit avec la variable x.

Lorsque les deux termes d'une fraction sont des quantités infiniment petites, dont les valeurs numériques décroissent indéfiniment avec celle de la variable α, la valeur singulière que reçoit cette fraction, pour α=0, est tantôt finie, tantôt nulle ou infinie. En effet, désignons par k,k′ deux constantes finies qui ne soient pas nulles, et par ε,ε′ deux nombres variables qui convergent avec α vers la limite zéro. Deux infiniment petits, l'un de l'ordre n, l'autre de l'ordre n′, pourront être représentés respectivement par

$$kan(1\pm e),k'an'(1\pm e'),$$

et leur rapport, savoir

$$k'an'(1\pm e')kan(1\pm e)=k'k1\pm e'1\pm ean'-n=k'k1\pm e'1\pm e1an-n',$$

aura évidemment pour limite

$$k'k,\text{si l'on suppose } n'=n,0,\text{si l'on suppose } n'>n,\pm\infty,\text{si l'on suppose } n'<n.$$

On prouverait de même que la limite vers laquelle converge le rapport de deux quantités infiniment grandes, tandis que leurs valeurs numériques croissent indéfiniment avec celle d'une même variable x, peut être nulle, finie ou infinie. Seulement, cette limite a un signe déterminé, constamment égal au produit des signes des deux quantités que l'on considère.

Parmi les fractions dont les deux termes convergent avec la variable α vers la limite zéro, on doit placer la suivante

$$f(x+a)-f(x)a,$$

toutes les fois qu'on attribue à la variable x une valeur dans le voisinage de laquelle la fonction f(x) reste continue. En effet, dans cette hypothèse, la différence

$$f(x+a)-f(x)$$

est une quantité infiniment petite. On peut même remarquer qu'elle est en général un infiniment petit du premier ordre, en sorte que le rapport

$$f(x+a)-f(x)a$$

converge ordinairement, tandis que la valeur numérique de α diminue, vers une limite finie différente de zéro. Cette limite sera, par exemple,

$$2x, \text{ si l'on prend } f(x)=x2$$

et

$$-ax2, \text{ si l'on prend } f(x)=ax.$$

Dans le cas particulier où l'on suppose x=0, le rapport

$$f(x+a)-f(x)a$$

se réduit à cet autre

$$f(a)-f(0)a.$$

Parmi les rapports de cette dernière espèce, nous nous bornerons ici à considérer le suivant

$$\sin aa.$$

Comme il peut être mis sous la forme

$$\sin(-a)-a,$$

sa limite restera la même, quel que soit le signe de α. Cela posé, concevons que l'arc α reçoive une valeur positive très petite. La corde de l'arc double 2α étant représentée par 2sinα, on aura évidemment 2α>2sinα et, par suite,

$$a>\sin a.$$

De plus, la somme des tangentes menées aux extrémités de l'arc 2α étant représentée par 2tangα, et formant une portion de polygone qui enveloppe cet arc, on aura encore 2tangα>2α et, par conséquent,

$$\tan ga>a.$$

En réunissant les deux formules qu'on vient d'établir, on trouvera

$$\sin a<a<\tan ga;$$

puis, en remettant pour tangα sa valeur,

$$\sin a<a<\sin a\cos a$$

et, par suite,

$$1>\sin aa>\cos a.$$

Or, tandis que α diminue, cosα converge vers la limite 1: il en sera donc de même a fortiori du rapport sinαα toujours compris entre 1 et cosα, en sorte qu'on aura

La recherche des limites vers lesquelles convergent les rapports f(x+α)−f(x)α, f(α)−f(0)α étant un des principaux objets du Calcul infinitésimal, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Il nous reste à examiner les valeurs singulières des fonctions de plusieurs variables. Quelquefois ces valeurs sont complètement déterminées et indépendantes des relations que l'on pourrait établir entre les variables. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par

$$a,b,x,y$$

quatre variables positives, dont les deux premières convergent vers la limite zéro et les deux dernières vers la limite ∞, on reconnaîtra sans peine que les expressions

$$AB, XY, AX, YB, AY, XY$$

ont pour limites respectives

$$0, \infty, 0, \infty, 0, \infty.$$

Mais le plus souvent la valeur singulière d'une fonction de plusieurs variables ne peut être entièrement déterminée que dans le cas particulier où, en faisant converger ces variables vers leurs limites respectives, on établit entre elles certaines relations ; et, tant que ces relations ne sont pas fixées, la valeur singulière dont il s'agit est une quantité ou totalement indéterminée, ou seulement assujettie à rester comprise entre des limites connues. Ainsi, comme on l'a remarqué plus haut, la valeur singulière à laquelle se réduit le rapport de deux variables infiniment petites, dans le cas où chacune de ces variables s'évanouit, peut être une quantité quelconque finie, nulle ou infinie.

En d'autres termes, cette valeur singulière sera complètement indéterminée. Si, au lieu de deux variables infiniment petites, on considère deux variables infiniment grandes, on trouvera que le rapport de ces dernières, tandis que leurs valeurs numériques croissent indéfiniment, converge encore vers une limite arbitraire, mais positive ou négative, suivant que les deux variables sont de même signe ou de signes contraires. Il est également facile de s'assurer que le produit d'une variable infiniment petite par une variable infiniment grande a pour limite une quantité complètement indéterminée.

Afin de présenter une dernière application des principes qu'on vient d'établir, cherchons quelles valeurs il faut attribuer aux variables x et y pour que la valeur de la fonction

$$y^{1x}$$

devienne indéterminée. Si l'on désigne par A un nombre supérieur à l'unité, et par L la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A, on aura évidemment

$$y = AL(y),$$

et, par suite,

$$y^{1x} = AL(y)^x,$$

Or il est clair que l'expression

$$AL(y)^x$$

convergera vers une limite indéterminée, lorsque le rapport

convergera lui-même vers une semblable limite, ce qui arrivera dans deux cas différents, savoir : 1 lorsque L(y) et x seront deux quantités infiniment petites, c'est-à-dire lorsque x et y auront pour limites respectives 0 et 1; 2 lorsque L(y) et x seront deux quantités infiniment grandes, c'est-à-dire lorsque, x ayant une limite infinie, y aura pour limite 0 ou ∞. Il est bon d'observer que, dans l'un et l'autre cas, la limite indéterminée de l'expression

$$AL(y)^x = y^{1x}$$

sera nécessairement positive. Il peut même arriver que cette limite soit assujettie à demeurer comprise entre les valeurs extrêmes 0 et 1, ou bien entre les suivantes 1 et ∞. Concevons, par exemple, que chacune des variables x et y converge vers la limite ∞. Dans ce cas, la limite du rapport

étant une quantité positive quelconque, celle de y1x=AL(y)x ne pourra être qu'une quantité moyenne entre 1 et ∞. Cette moyenne sera d'ailleurs indéterminée, tant que l'on n'établira pas entre les variables infiniment grandes x et y de relation particulière. Mais, si l'on suppose

$$y=f(x),$$

f(y) désignant une fonction qui croisse indéfiniment avec la variable x, alors la moyenne dont il s'agit, n'étant autre chose que la limite de

$$[f(x)]1x,$$

obtiendra une valeur déterminée, que l'on pourra souvent calculer à l'aide du théorème II.

Si, au lieu de la fonction y1x, on eût considéré la suivante

$$yx,$$

on aurait trouvé que cette dernière devient indéterminée : 1 lorsque la variable y converge vers la limite 1 et la variable x vers l'une des suivantes $-\infty,+\infty$; 2 lorsque, la variable x ayant zéro pour limite, y converge vers zéro ou vers l'infini positif.

Quelquefois on rencontre dans le calcul des expressions singulières qui ne peuvent être considérées que comme des limites vers lesquelles convergent des fonctions de plusieurs variables, tandis que ces mêmes variables deviennent infiniment petites ou infiniment grandes, ou même, plus généralement, convergent vers des limites fixes. Telles sont, par exemple, les expressions

parmi lesquelles on doit regarder les deux premières comme les limites vers lesquelles convergent le produit et le rapport de deux variables infiniment petites, les deux suivantes comme les limites du produit et du rapport de deux variables positives infiniment grandes, etc. Si l'on considère en particulier les expressions singulières que produisent les fonctions

on trouvera que les valeurs de ces mêmes expressions, lorsque les variables restent indépendantes, peuvent être aisément fixées par ce qui précède. Les équations qui serviront à déterminer ces valeurs seront respectivement

Chapitre III

Une fonction symétrique de plusieurs quantités est celle qui conserve la même valeur et le même signe après un échange quelconque opéré entre ces quantités. Ainsi, par exemple, chacune des fonctions

est symétrique par rapport aux variables qu'elle renferme, tandis que

sont des fonctions non symétriques des variables x et y. De même encore

$$b+c, b^2+c^2, bc, \ldots$$

sont des fonctions symétriques des deux quantités b,c;

$$b+c+d, b^2+c^2+d^2, bc+bd+cd, bcd$$

sont des fonctions symétriques des trois quantités b,c,d;....

Parmi les fonctions symétriques de plusieurs quantités b,c,...,g,h, on doit distinguer celles qui servent de coefficients aux diverses puissances de a dans le développement du produit

$$(a-b)(a-c)\ldots(a-g)(a-h),$$

et dont les propriétés conduisent à une solution très élégante de plusieurs équations du premier degré entre n variables x,y,z,...,u,v, lorsque ces équations sont de la forme

En effet, soient

$$A_{n-2}=-(b+c+\ldots+g+h), A_{n-3}=bc+\ldots+bg+bh+\ldots+cg+ch+\ldots$$
$$+gh, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, A_0=\pm bc\ldots gh$$

les fonctions symétriques dont il s'agit, en sorte qu'on ait

$$a^n-1+A_1a^{n-2}+\ldots+A_{n-1}a+A_0=(a-b)(a-c)(a-d)\ldots.$$

Si, dans cette dernière formule, on remplace successivement a par b, par c,..., par g, par h, on trouvera

$$b^n-1+A_1b^{n-2}+\ldots+A_{n-1}b+A_0=0, c^n-1+A_1c^{n-2}+\ldots$$
$$+A_{n-1}c+A_0=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, g^n-1+A_1g^{n-2}+\ldots+A_{n-1}g+A_0=0, h^n-1+A_1h^{n-2}+\ldots$$
$$+A_{n-1}h+A_0=0.$$

Si l'on ajoute ensuite membre à membre les équations (1), après avoir multiplié la première par A_0, la seconde par A_1,..., l'avant-dernière par A_{n-2}, et la dernière par l'unité, on obtiendra la suivante

$$k^{n-1}+A_{n-2}k^{n-2}+\ldots+A_1k+A_0=0,$$

et l'on en conclura

$$x=k^{n-1}-(b+c+\ldots+g+h)k^{n-2}+(bc+\ldots+bg+bh+\ldots+cg+ch+\ldots+gh)k^{n-3}-\ldots\pm bc\ldots gh.k^0(a-b)(a-c)\ldots(a-g)$$
$$(a-h).$$

On déterminerait par un procédé analogue les valeurs des autres inconnues y,z,...,u,v.

Lorsque, dans les équations (1), on substitue aux constantes

$$k^0, k^1, k^2, \ldots, k^{n-1}$$

les puissances entières successives d'une même quantité k, savoir

$$k^0=1, k, k^2, \ldots, k^{n-1},$$

la valeur trouvée pour x se réduit à

§ II. — Des fonctions alternées.

Une fonction alternée de plusieurs quantités est celle qui change de signe, mais en conservant au signe près la même valeur, lorsqu'on échange deux de ces quantités entre elles ; en sorte que, par une suite de semblables échanges, la fonction devienne alternativement positive et négative. D'après cette définition,

sont des fonctions alternées des deux variables x et y;

$$(x-y)(x-z)(y-z)$$

est une fonction alternée des trois variables x,y,z, et ainsi de suite.

Parmi les fonctions alternées de plusieurs variables

on doit distinguer celles qui sont rationnelles et entières par rapport à chacune de ces mêmes variables. Supposons une semblable fonction développée et mise sous la forme d'un polynôme. Un de ses termes, pris au hasard, sera de la forme

$$kxpyqzr\ldots usvt,$$

p,q,r,...,s,t désignant des nombres entiers, et k un coefficient quelconque. De plus, la fonction devant changer de signe, mais conserver au signe près la même valeur, après l'échange mutuel des deux variables x et y, il faudra de toute nécessité qu'au terme dont il s'agit corresponde un autre terme de signe contraire

$$-kxqypzr\ldots usvt,$$

déduit du premier en vertu de cet échange. La fonction se composera donc de termes alternativement positifs et négatifs, qui, réunis deux à deux, produiront des binômes de la forme

$$kxpyqzr\ldots usvt-kxqypzr\ldots usvt=k(xpyq-xqyp)zr\ldots usvt.$$

Dans chaque binôme de cette espèce, p,q seront nécessairement deux nombres entiers distincts l'un de l'autre, et, comme la différence

$$xpyq-xqyp$$

est évidemment divisible par y–x ou, ce qui revient au même, par x–y, il en résulte que chaque binôme, et par suite la somme des binômes ou la fonction proposée, sera divisible par

$$\pm(y-x).$$

Comme on peut d'ailleurs, dans les raisonnements qui précèdent, substituer aux variables x,y deux autres variables quelconques x et z ou y et z,..., on obtiendra définitivement les conclusions suivantes :

1 Une fonction alternée, mais entière, de plusieurs variables x,y,z,...,u,v, est composée de termes alternativement positifs et négatifs, dans chacun desquels les diverses variables ont toutes des exposants différents ;

2 Une semblable fonction est divisible par le produit des différences

prises chacune avec tel signe que l'on voudra.

Le produit dont il est ici question, ainsi qu'on peut aisément le reconnaitre, est lui-même une fonction alternée des variables que l'on considère. Pour le prouver, il suffit de faire voir que ce produit change de signe, en conservant au signe près la même valeur, après l'échange mutuel de deux variables, x et y par exemple. Or, en effet, suivant que l'on adopte pour chaque différence le signe + ou le signe −, ce produit se trouve égal soit à +φ, soit à −φ, la valeur de φ étant déterminée par l'équation

et, comme il est évident que cette valeur de φ change seulement de signe en vertu de l'échange mutuel des variables x et y, on peut conclure qu'il en sera de même d'une fonction équivalente soit à +φ, soit à −φ.

Concevons, pour fixer les idées, que l'on prenne chacune des différences (1) avec le signe +. Le produit de toutes ces différences sera la fonction φ déterminée par l'équation (2) ou, ce qui revient au même, par la suivante

Si, de plus, on appelle n le nombre des variables x,y,z,...,u,v, n−1 sera évidemment le nombre des différences qui renferment une même variable : et par suite, dans chaque terme de la fonction φ développée et mise sous la forme d'un polynôme, l'exposant d'une variable quelconque ne pourra surpasser n−1. Enfin, comme dans un même terme les différentes variables devront être affectées d'exposants différents, il est clair que ces exposants seront respectivement égaux aux nombres

$$0,1,2,3,\ldots,n-1.$$

Chaque terme, abstraction faite du signe et du coefficient numérique, sera donc équivalent au produit des diverses variables rangées dans un ordre quelconque, et respectivement élevées aux puissances marquées par les nombres 0,1,2,3,...,n−1. On doit ajouter que chaque produit de cette espèce se trouvera compris une seule fois, tantôt avec le signe +, tantôt avec le signe −, dans le développement de la fonction φ. Par exemple, le produit

$$xOy1z2\ldots un-2vn-1$$

ne pourra être formé que par la multiplication des premières lettres des facteurs binômes qui composent le second membre de l'équation (3).

Àl'aide des principes que nous venons d'établir, il est facile de construire en entier le développement de la fonction, et de démontrer ses diverses propriétés (voir à ce sujet la Note IV). Nous allons maintenant faire voir comment on se trouve conduit, par la considération d'un semblable développement, à la résolution des équations générales du premier degré à plusieurs variables.

Soient

n équations linéaires entre les n variables ou inconnues

et les constantes

$$A0,B0,C0,\ldots,G0,H0,K0,A1,B1,C1,\ldots,G1,H1,K1,A2,B2,C2,\ldots,G2,H2,K2,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,AN-1,BN-1,CN-1,\ldots,GN-1,$$

choisies arbitrairement. Représentons, en outre, par P ce que devient la fonction φ lorsqu'on y remplace les variables

par les lettres

$$A,B,C,\ldots,G,H$$

considérées comme autant de nouvelles quantités, en sorte qu'on ait

Le produit P sera la fonction alternée la plus simple des quantités a,b,c,...,g,h; et, si l'on développe cette fonction par la multiplication algébrique de ses facteurs binômes, chaque terme du développement sera équivalent, au signe près, au produit de ces mêmes quantités rangées dans un certain ordre, et respectivement élevées à des puissances marquées par les exposants 0,1,2,3,...,n−1. Cela posé, concevons que dans chaque terme on remplace les exposants des lettres par des indices, en écrivant, par exemple,

$$A_0B_1C_2\ldots G_{N-2H-1},$$

au lieu du terme

$$A_0B_1C_2\ldots G_{N-2H-1},$$

et désignons par D ce que devient alors le développement du produit P. La quantité D aura évidemment, tout comme le produit P, la propriété de changer de signe lorsqu'on échangera entre elles deux des lettres données, par exemple les deux lettres a et b. Il est aisé d'en conclure que la valeur de D sera réduite à zéro, si l'on écrit dans tous ses termes la lettre b à la place de la lettre a, sans écrire en même temps a à la place de b. Il en serait de même si l'on écrivait partout à la place de la lettre a l'une des lettres c,...,g,h. Par suite, si, dans le polynôme D, on désigne la somme des termes qui ont a_0 pour facteur commun par A_0a_0, la somme des termes qui renferment le facteur a_1 par A_1a_1,...; enfin la somme des termes qui ont pour facteur a_{n-1} par $A_{n-1}a_{n-1}$, en sorte que la valeur de D soit donnée par l'équation

on trouvera, en écrivant successivement dans le second membre de cette équation les lettres b,c,...,g,h à la place de la lettre a,

Supposons maintenant qu'on ajoute membre à membre les équations (4), après avoir multiplié la première par A_0, la seconde par A_1, la troisième par A_2,..., la dernière par A_{n-1}. On verra, dans cette addition, les coefficients des inconnues y,z,...,u,v disparaître d'eux-mêmes en vertu des formules (7), et l'on obtiendra définitivement l'équation

$$Dx=A_0k_0+A_1k_1+A_2k_2+\ldots+A_{N-1}k_{N-1},$$

de laquelle on conclura

Comme d'ailleurs des deux quantités

$$DetA_0k_0+A_1k_1+A_2k_2+\ldots+A_{N-1}k_{N-1}$$

la première est ce que devient le développement du produit

$$(B-A)\times(C-A)(C-B)\times\ldots\times(H-A)(H-B)(H-C)\ldots(H-G),$$

lorsque dans ce développement on remplace les exposants des lettres par des indices, et la seconde, ce que devient la quantité D, équivalente au second membre de la formule (G), lorsqu'on y substitue la lettre k à la lettre a, il en résulte que la valeur de x peut être censée déterminée par l'équation

pourvu que l'on convienne de développer les deux termes de la fraction qui forme le second membre, et de remplacer dans chaque développement les exposants des lettres par des indices. La valeur que l'équation (9) prise à la lettre semble fournir pour l'inconnue x, n'étant pas exacte et ne pouvant le devenir que par suite des modifications énoncées, est ce que nous nommerons une valeur symbolique de cette inconnue.

La méthode qui nous a conduits à la valeur symbolique de x fournirait également celles des autres inconnues. Pour montrer une application de cette méthode, supposons qu'il s'agisse de résoudre les équations linéaires

On trouvera dans cette hypothèse, pour la valeur symbolique de l'inconnue x,

et par suite, la valeur véritable de la même inconnue sera

Nota. — Lorsque, dans les équations (4), on remplace les indices des lettres a,b,c,...,g,h,k par des exposants, la valeur symbolique de x donnée par l'équation (9) devient évidemment la valeur véritable, et coïncide, comme on devait s'y attendre, avec celle que fournit la formule (3) du § I.

§ III. — Des fonctions homogènes.

Une fonction de plusieurs variables x,y,z,... est homogène lorsque, t désignant une nouvelle variable indépendante des premières, le changement de x en tx, de y en ty, de z en tz,... fait varier cette fonction dans le rapport de l'unité à une puissance déterminée de t, et l'exposant de cette puissance est ce qu'on nomme le degré de la fonction homogène. En d'autres termes,

$$f(x,y,z,\ldots)$$

sera une fonction homogène du degré a par rapport aux variables x,y,z,..., si l'on a, quel que soit t,

Ainsi, par exemple,

$$x^2+xy+y^2, xy, ly-lx$$

sont trois fonctions homogènes des variables x et y, la première du second degré, la deuxième du premier degré, et la troisième d'un degré nul. Une fonction entière des variables x,y,z,..., composée de termes tellement choisis, que la somme des exposants des diverses variables soit la même dans tous les termes, est évidemment homogène.

Si, dans la formule (1), on fait t=1x, on en conclura

Cette dernière équation établit une propriété des fonctions homogènes qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'une fonction de plusieurs variables x,y,z,... est homogène, elle équivaut au produit de l'une quelconque des variables élevée à une certaine puissance par une fonction des rapports entre ces mêmes variables combinées deux à deux.

On peut ajouter que cette propriété appartient exclusivement aux fonctions homogènes. Et, en effet, supposons f(x,y,z,...) équivalente au produit de xa par une fonction des rapports entre les variables x,y,z,... combinées deux à deux. Comme on pourra exprimer tous ces rapports au moyen de ceux qui ont x pour dénominateur, en écrivant, par exemple, au lieu de zy,

$$(zx)(yx),$$

il en résulte que la valeur de f(x,y,z,...) sera donnée par une équation de la forme

$$f(x,y,z,\ldots)=x^{a}\Phi(yx,zx,\ldots).$$

Cette équation devra subsister, quelles que soient les valeurs de x,y,z,...; et, si l'on y remplace

elle deviendra

$$f(tx,ty,tz,\ldots)=t^{a}x^{a}\Phi(yx,zx,\ldots).$$

Par suite, on aura, quel que soit t, dans l'hypothèse admise,

$$f(tx,ty,tz,\ldots)=t^{a}f(x,y,z,\ldots),$$

ou, en d'autres termes,

$$f(x,y,z,\ldots)$$

sera une fonction homogène du degré a par rapport aux variables x,y,z,....

Chapitre IV

DÉTERMINATION DES FONCTIONS ENTIÈRES, D'APRÈS UN CERTAIN NOMBRE DE VALEURS PARTICULIÈRES SUPPOSÉES CONNUES. APPLICATIONS.

Déterminer une fonction d'après un certain nombre de valeurs particulières supposées connues, c'est ce qu'on appelle interpoler. Lorsqu'il s'agit d'une fonction d'une ou de deux variables, cette fonction peut être considérée comme l'ordonnée d'une courbe ou d'une surface, et le problème de l'interpolation consiste à fixer la valeur générale de cette ordonnée d'après un certain nombre de valeurs particulières, c'est-à-dire à faire passer la courbe ou la surface par un certain nombre de points. Cette question peut être résolue d'une infinité de manières, et en général le problème de l'interpolation est indéterminé. Toutefois, l'indétermination cessera si, à la connaissance des valeurs particulières de la fonction cherchée, on ajoute la condition expresse que cette fonction soit entière, et d'un degré tel que le nombre de ses termes devienne précisément égal au nombre des valeurs particulières données.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on considère d'abord les fonctions entières d'une seule variable x. On établira facilement à leur égard les propositions suivantes :

Théorème I. — Si une fonction entière de la variable x</math> s'évanouit pour une valeur particulière de cette variable, par exemple pour $x=x_0$, elle sera divisible algebriquement par $x-x_0$.

Théorème II. — Si une fonction entière de la variable x s'évanouit pour chacune des valeurs de x comprises dans la suite

$$x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},$$

n désignant un nombre entier quelconque, elle sera nécessairement divisible par le produit

$$(x-x0)(x-x1)(x-x2)\ldots(x-x_{N-1}).$$

Soient maintenant $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions entières de la variable x, l'une et l'autre du degré $n-1$, et qui deviennent égales entre elles pour chacune des n valeurs particulières de x comprises dans la suite $x0,x1,x2,\ldots,xn-1$. Je dis que ces deux fonctions seront identiquement égales, c'est-à-dire qu'on aura, quel que soit x,

$$\Phi(x)=\Psi(x);$$

et, en effet, si cette égalité n'avait pas lieu, on trouverait dans la différence

$$\Psi(x)-\Phi(x)$$

un polynome entier dont le degré ne surpasserait pas $n-1$, mais qui, s'évanouissant pour chacune des valeurs de x ci-dessus mentionnées, serait pourtant divisible par le produit

$$(x-x0)(x-x1)(x-x2)\ldots(x-x_{N-1}),$$

c'est-à-dire par un polynôme du degré n, ce qui est absurde. On serait assuré a fortiori de l'égalité absolue des deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, si l'on savait qu'elles deviennent égales entre elles pour un nombre de valeurs de x supérieur à n. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — Si deux fonctions entières de la variable x deviennent égales pour un nombre de valeurs de cette variable supérieur au degré de chacune des deux fonctions, elles seront identiquement égales, quel que soit x.

On en déduit comme corollaire cet autre théorème :

Théorème IV. — Deux fonctions entières de la variable x sont identiquement égales toutes les fois qu'elles, deviennent égales pour des valeurs qu'elles deviennent entières quelconques de cette variable, ou même pour toutes les valeurs entières qui surpassent une limite donnée.

Dans ce cas, en effet, le nombre des valeurs de x, pour lesquelles les deux fonctions deviennent égales, est indéfini.

Il suit du théorème III qu'une fonction entière u du degré $n-1$ sera complètement déterminée, si l'on connaît ses valeurs particulières

$$u0,u1,u2,\ldots,u_{N-1}$$

correspondantes aux valeurs

$$x0,x1,x2,\ldots,x_{N-1}$$

de la variable x. Cherchons dans cette hypothèse la valeur générale de la fonction u. Si l'on suppose d'abord que les valeurs particulières $u0,u1,\ldots,un-1$ se réduisent toutes à zéro, à l'exception de la première u0, la fonction u, devant alors s'évanouir pour $x=x1$, pour $x=x2,\ldots$, enfin pour $x=xn-1$, sera divisible par le produit

$$(x-x1)(x-x2)\ldots(x-x_{N-1}),$$

et sera par conséquent de la forme

$$u=K(x-x1)(x-x2)\ldots(x-x_{N-1}),$$

k ne pouvant être qu'une quantité constante. De plus, u devant se réduire à u0 pour x=x0, on en conclura

$$u0=k(x0-x1)(x0-x2)...(x0-xn-1)$$

et, par suite,

$$u=u0(x-x1)(x-x2)...(x-xn-1)(x0-x1)(x0-x2)...(x0-xn-1).$$

De même, si les valeurs particulières u0,u1,u2,...,un−1 se réduisent toutes à zéro, à l'exception de la seconde u1, on trouvera

$$u=u1(x-x0)(x-x2)...(x-xn-1)(x1-x0)(x1-x2)...(x1-xn-2),$$

. . . . . .

Enfin, si elles se réduisent toutes à zéro, à l'exception de la dernière un−1, on trouvera

$$u=un-1(x-x0)(x-x1)...(x-xn-2)(xn-1-x0)(xn-1-x1)...(xn-1-xn-2).$$

En réunissant les diverses valeurs de u correspondantes aux diverses hypothèses qu'on vient de faire, on obtiendra pour somme un polynôme en x du degré n−1, qui aura évidemment la propriété de se réduire à u0 pour x=x0, à u1 pour x=x1,..., à un−1 pour x=xn−1. Ce polynome sera donc la valeur générale de u qui résout la question proposée, en sorte que cette valeur générale se trouvera déterminée par la formule

On pourrait déduire directement la même formule de la méthode que nous avons employée ci-dessus (Chap. III, § I) pour résoudre dans un cas particulier des équations linéaires à plusieurs variables (voir à ce sujet la Note V).

Si, en désignant par a une quantité constante, on remplace dans la formule (1) la fonction u par la fonction u−a, qui sera évidemment de même degré, et les valeurs particulières de u par les valeurs particulières de u−a, on obtiendra l'équation

et, en comparant cette équation à la formule (1), on trouvera la suivante

Cette dernière équation est identique et subsiste quel que soit x.

Les équations (1) et (2) peuvent servir l'une et l'autre à résoudre, pour les fonctions entières, le problème de l'interpolation ; mais il convient, en général, de préférer pour cet objet l'équation (2), attendu qu'on peut y faire disparaître l'un des termes du second membre, en prenant la constante a équivalente à l'une des quantités

$$u0,u1,u2,...,un-1.$$

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de faire passer une droite par deux points donnés. Désignons par x0,y0 les coordonnées rectangulaires du premier point, par x1,y1 celles du second, et par y l'ordonnée variable de la droite. En remplaçant dans la formule (2) la lettre u par la lettre y, puis faisant n=1 et a=y0, on trouvera pour l'équation de la droite

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse de faire passer par trois points donnés une parabole dont l'axe soit parallèle à l'axe des y. Nommons

x1ety1,x2ety2,x3ety3

les coordonnées rectangulaires des trois points. Soit de plus y l'ordonnée variable de la parabole. En remplaçant toujours, dans la formule (2), la lettre u par la lettre y, puis faisant n=2 et a=y1, on trouvera pour l'équation de la parabole

ou, ce qui revient au même,

Lorsque dans l'équation (1) on prend u=xm (m désignant un nombre entier inférieur à n), les valeurs particulières de u représentées par

u0,u1,u2,...,un−1

se réduisent évidemment à

x0m,x1m,x2m,...,xn−1m.

On aura donc, pour les valeurs entières de m qui ne surpassent pas n−1,

Cette dernière formule comprend comme cas particulier l'équation (3). De plus, si l'on observe que chaque puissance de x, et en particulier la puissance xn−1, doit nécessairement avoir le même coefficient dans les deux membres de la formule (7), on trouvera :

1 En supposant m<n−1,

2 En supposant m=n−1,

Il est bon de remarquer que la formule (8) subsiste dans le cas même où l'on suppose m=0, et devient alors

§ II. — Détermination des fonctions entières de plusieurs variables, d'après un certain nombre de valeurs particulières supposées connues.

Les méthodes par lesquelles on détermine les fonctions d'une seule variable, d'après un certain nombre de valeurs particulières supposées connues, peuvent être facilement étendues, comme on va le voir, aux fonctions de plusieurs variables.

Considérons d'abord, pour fixer les idées, des fonctions de deux variables x et y. Soient φ(x,y),ψ(x,y) deux semblables fonctions, l'une et l'autre du degré n−1 par rapport à chacune des variables, et qui deviennent égales entre elles toutes les fois que, en attribuant à la variable x une des valeurs particulières

x0,x1,x2,...,xn−1,

on attribue en même temps à la variable y l'une des suivantes

y0,y1,y2,...,yn−1.

φ(x0,y),ψ(x0,y) seront deux fonctions de la seule variable y, qui deviendront égales entre elles pour n valeurs particulières de cette variable. Par suite (en vertu du théorème III, § I), ces deux fonctions seront constamment égales, quel que soit y. On aura donc identiquement

On trouvera de même

$$\Phi(x_1,y)=\Psi(x_1,y),\Phi(x_2,y)=\Psi(x_2,y),\ldots\ldots\ldots\ldots,\Phi(x_{n-1},y)=\Psi(x_{n-1},y).$$

D'ailleurs, les premiers membres des n équations précédentes sont autant de valeurs particulières de la fonction φ(x,y) dans le cas où l'on y considère x seul comme variable, et les seconds membres représentent les valeurs particulières correspondantes de la fonction ψ(x,y). Les deux fonctions

$$\Phi(x,y),\Psi(x,y),$$

lorsqu'on y attribue à y une valeur constante choisie arbitrairement, deviennent donc égales pour n valeurs particulières de x; et, comme elles sont toutes deux du degré n−1 par rapport à x, il en résulte qu'elles resteront égales, non seulement pour une valeur quelconque attribuée à la variable y, mais encore pour une valeur quelconque de x. On serait assuré, a fortiori, de l'égalité absolue des deux fonctions \varphi(x,y),\psi(x,y), si l'on savait qu'elles deviennent égales toutes les fois que les valeurs des variables x et y sont respectivement prises dans deux suites composées chacune de plus de n termes différents. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — Si deux fonctions entières des variables x et y deviennent égales toutes les fois que les valeurs de ces deux variables sont respectivement prises dans deux suites qui renferment l'une et l'autre un nombre de termes supérieur aux exposants les plus élevés de x et de y dans ces mêmes fonctions, elles seront identiquement égales.

On en déduit, comme corollaire, cet autre théorème :

Théorème II. — Deux fonctions entières des variables x et y sont identiquement égales, toutes les fois qu'elles deviennent égales pour des valeurs entières quelconques de ces variables, ou même pour toutes les valeurs entières qui surpassent une limite donnée.

Dans ce cas, en effet, le nombre des valeurs de x et de y pour lesquelles les deux fonctions deviennent égales est indéfini.

Il suit du théorème I que, si la fonction φ(x,y) est supposée entière et du degré n−1 par rapport à chacune des variables x et y, cette fonction sera complètement déterminée dès que l'on connaîtra les valeurs particulières qu'elle reçoit, lorsque, en prenant pour valeur de x l'une des quantités

$$x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},$$

on prend en même temps pour valeur de y l'une des suivantes

$$y_0,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}.$$

Dans la même hypothèse, la valeur générale de la fonction pourra être facilement déduite de la formule (1) du paragraphe précédent. En effet, si l'on remplace dans cette formule u par φ(x,y), on en tirera

et l'on aura, de plus, en désignant par m un des nombres entiers 1,2,3,…,n−1,

On conclura immédiatement des deux équations qui précèdent la valeur générale de φ(x,y). On trouvera, par exemple, en supposant n=2,

Si l'on considérait des fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables, on obtiendrait des résultats entièrement semblables à ceux auxquels on vient de parvenir pour des fonctions de

deux variables seulement. On trouverait, par exemple, à la place du théorème II, la proposition suivante :

Théorème III. — Deux fonctions entières de plusieurs variables x,y,z,... sont identiquement égales toutes les fois qu'elles deviennent égales pour des valeurs entières quelconques de ces variables, ou même pour toutes les valeurs entières qui surpassent une limite donnée.

§ III. — Applications.

Pour appliquer les principes établis dans les paragraphes précédents, considérons en particulier des produits formés par la multiplication de facteurs successifs dont chacun surpasse le suivant d'une unité, le premier facteur étant l'une des variables x,y,z,..., et cherchons à exprimer, au moyen de ces sortes de produits, le produit tout semblable qu'on obtiendrait en prenant pour premier facteur la somme des variables données, savoir

$$x+y+z+\ldots.$$

Si l'on réduit toutes les variables à deux, le problème qu'il s'agit de résoudre pourra s'énoncer comme il suit :

Problème I. — Exprimer le produit

dans lequel n désigne un nombre entier quelconque, par le moyen des produits suivants

et de tous ceux qu'on peut en déduire, en changeant seulement la valeur de n.

Solution. — Pour résoudre plus facilement la question précédente, supposons d'abord que x et y soient des nombres entiers égaux ou supérieurs à n. Alors le produit (1) ne sera autre chose que le numérateur de la fraction qui exprime le nombre des combinaisons possibles de x+y lettres prises n à n, puisque ce nombre est précisément

$$(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\ldots(x+y-n+1)1.2.3\ldots n.$$

Cela posé, concevons que les lettres

$$a,b,c,\ldots,p,q,r,\ldots$$

étant en nombre égal à x+y, on les divise en deux groupes, de telle manière que les lettres a,b,c,... du premier groupe soient en nombre égal à x, et les lettres p,q,r,... du second groupe en nombre égal à y. Parmi les combinaisons formées avec ces différentes lettres, les unes renfermeront seulement des lettres prises dans le premier groupe. Le nombre des combinaisons de cette espèce sera

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)1.2.3\ldots n.$$

D'autres renfermeront n−1 lettres prises dans le premier groupe, et une lettre prise dans le second. On déterminera facilement le nombre des combinaisons de cette seconde espèce, et l'on verra qu'il est égal à

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)1.2.3\ldots(n-1)y1.$$

On trouvera de même pour le nombre des combinaisons qui renferment n−2 lettres prises dans le premier groupe, et deux lettres prises dans le second,

etc.; enfin, pour le nombre des combinaisons qui renferment seulement des lettres prises dans le dernier groupe,

$$y(y-1)(y-2)\ldots(y-n+1)1.2.3\ldots n.$$

La somme des nombres des combinaisons de chaque espèce devant reproduire le nombre total des combinaisons des x+y lettres données prises n à n, on en conclura

L'équation précédente, étant ainsi démontrée pour le cas où les variables x et y obtiennent des valeurs entières supérieures à n, subsistera, en vertu du théorème II (§ II), pour des valeurs quelconques de ces variables, et la valeur du produit (1) tirée de la même équation sera

Corollaire I. — Si dans l'équation (2) on remplace x par −x et y par −y, on obtiendra la suivante :

Corollaire II. — Si dans l'équation (2) on remplace x par x2 et y par y2, on trouvera

Corollaire III. — En développant les deux membres de l'équation (2), et ne conservant, de part et d'autre, que les termes dans lesquels la somme des exposants des variables est égale à n, on obtiendra la formule

La valeur de (x+y)n tirée de cette dernière formule est précisément celle que fournit le binôme de Newton.

Les formules qu'on vient d'obtenir peuvent être facilement étendues au cas où l'on considère plus de deux variables ; et la méthode qui nous a conduits à la solution du problème I se trouve également applicable à la question suivante :

Problème II. — x,y,z,... désignant des variables en nombres quelconques, exprimer le produit

$$\ldots(x+y+z+\ldots-n+1)$$

en fonction des suivants

et de tous ceux qu'on peut en déduire en changeant la valeur de n.

On commencera par résoudre le problème dans le cas où x,y,z,... désignent des nombres entiers supérieurs à n, en partant de ce principe que la fraction

$$(x+y+z+\ldots)(x+y+z+\ldots-1)(x+y+z+\ldots-2)\ldots(x+y+z+\ldots-n+1)1.2.3\ldots n$$

est égale au nombre des combinaisons que l'on peut former avec x+y+z+... lettres prises n à n; puis on passera au cas où les variables x,y,z,... deviennent des quantités quelconques, en s'appuyant sur le théorème III du § II. Lorsque l'on aura ainsi démontré la formule qui résout la question proposée, on en déduira sans peine la valeur de la puissance

$$(x+y+z+\ldots)n.$$

On y parviendra, en effet, en développant les deux membres de la formule trouvée, et ne conservant de part et d'autre que les termes dans lesquels les exposants réunis des variables x,y,z,... forment une somme égale à n.

Chapitre V

DÉTERMINATION DES FONCTIONS CONTINUES D'UNE SEULE VARIABLE PROPRES À VÉRIFIER
CERTAINES CONDITIONS.

Lorsque, au lieu de fonctions entières, on conçoit des fonctions quelconques, dont on laisse la forme entièrement arbitraire, on ne peut plus réussir à les déterminer d'après un certain nombre de valeurs particulières, quelque grand que soit ce même nombre ; mais on y parvient quelquefois dans le cas où l'on suppose connues certaines propriétés générales de ces fonctions. Par exemple, une fonction continue de x, représentée par φ(x), peut être complètement déterminée lorsqu'elle est assujettie à vérifier, pour toutes les valeurs possibles des variables x et y, l'une des équations

ou bien, pour toutes les valeurs réelles et positives des mêmes variables, l'une des équations suivantes :

La résolution de ces quatre équations présente quatre problèmes différents que nous allons traiter l'un après l'autre.

Problème I. — Déterminer la fonction φ(x) de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait pour toutes les valeurs réelles des variables x et y

Solution. — Si dans l'équation (1) on remplace successivement y par y+z, z par z+u,..., on en tirera

$$\Phi(x+y+z+u+\ldots)=\Phi(x)+\Phi(y)+\Phi(z)+\Phi(u)+\ldots,$$

quel que soit le nombre des variables x,y,z,u,...; si, de plus, on désigne par m ce même nombre, par α une constante positive, et que l'on fasse

la formule que l'on vient de trouver deviendra

$$\Phi(mA)=m\Phi(A).$$

Pour étendre cette dernière équation au cas où le nombre entier m se trouve remplacé par un nombre fractionnaire mn, ou même par un nombre quelconque μ, on fera, en premier lieu,

$$B=mnA,$$

m et n désignant deux nombres entiers, et l'on en conclura

$$nB=mA, n\Phi(B)=m\Phi(A),$$

$$\Phi(B)=\Phi(mnA)=mn\Phi(A);$$

puis, en supposant que la fraction mn varie de manière à converger vers un nombre quelconque μ, et passant aux limites, on trouvera

$$\Phi(mA)=m\Phi(A).$$

Si maintenant on prend α=1, on aura, pour toutes les valeurs positives de μ,

et, par suite, en faisant converger μ vers la limite zéro,

$$\Phi(0)=0.$$

D'ailleurs, si dans l'équation (1) on pose x=μ, y=−μ, on en tirera

$$\Phi(-M)=\Phi(0)-\Phi(M)=-M\Phi(1).$$

L'équation (5) subsistera donc lorsqu'on y changera μ en −μ. En d'autres termes, on aura, pour des valeurs quelconques positives ou négatives de la variable x,

Il suit de la formule (6) que toute fonction φ(x) qui, demeurant continue entre des limites quelconques de la variable, vérifie l'équation (1), est nécessairement de la forme

a désignant une quantité constante. J'ajoute que la fonction ax jouira des propriétés énoncées, quelle que soit la valeur de la constante a. En effet, le produit ax est, entre des limites quelconques de la variable x, fonction continue de la variable, et, de plus, la supposition φ(x)=ax change l'équation (1) en cette autre

$$A(X+Y)=AX+AY,$$

laquelle est évidemment toujours identique. La formule (7) fournit donc une solution de la question proposée, quelle que soit la valeur attribuée à la constante a. La faculté que l'on a de choisir arbitrairement cette constante lui a fait donner le nom de constante arbitraire.

Problème II. — Déterminer la fonction φ(x) de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait pour toutes les valeurs réelles des variables x et y

Solution. — Il est d'abord facile de s'assurer que la fonction φ(x), assujettie à vérifier l'équation (2), n'admet que des valeurs positives ; et, en effet, si dans l'équation (2) on fait y=x, on trouvera

$$\Phi(2X)=[\Phi(X)]2;$$

puis on en conclura, en écrivant 12x au lieu de x,

$$\Phi(X)=\Phi[(12X)]2.$$

La fonction φ(x) est donc toujours équivalente à un carré, par conséquent toujours positive. Cela posé, concevons que dans l'équation (2) on remplace successivement y par y+z, z par z+u,..., on en tirera

$$\Phi(X+Y+Z+U\ldots)=\Phi(X)\Phi(Y)\Phi(Z)\Phi(U)\ldots,$$

quel que soit le nombre des variables x,y,z,u,.... Si, de plus, on désigne par m ce même nombre, par α une constante positive, et que l'on fasse

la formule que l'on vient de trouver deviendra

$$\Phi(MA)=[\Phi(A)]M.$$

Pour étendre cette dernière formule au cas où le nombre entier m se trouve remplacé par un nombre fractionnaire mn, ou même par un nombre quelconque μ, on fera, en premier lieu,

$$B=MNA,$$

m et n désignant deux nombres entiers, et l'on en conclura

$$nB=mA,[\Phi(B)]^n=[\Phi(A)]^m,$$

$$\Phi(B)=\Phi(mnA)=[\Phi(A)]^{mn};$$

puis, en supposant que la fraction mn varie de manière à converger vers un nombre quelconque μ, et passant aux limites, on trouvera

$$\Phi(mA)=[\Phi(A)]^m.$$

Si maintenant on prend α=1, on aura pour toutes les valeurs positives de μ

et, par suite, en faisant converger μ vers la limite zéro,

$$\Phi(0)=1.$$

D'ailleurs, si dans l'équation (2) on pose x=μ, y=−μ, on en conclura

$$\Phi(-m)=\Phi(0)\Phi(m)=[\Phi(1)]^{-m}.$$

L'équation (8) subsistera donc lorsqu'on y changera μ en −μ. En d'autres termes, on aura pour des valeurs quelconques positives ou négatives de la variable x

Il suit de l'équation (9) que toute fonction φ(x) propre à résoudre le second problème est nécessairement de la forme

Adésignant une constante positive. J'ajoute qu'on peut attribuer à cette constante une valeur quelconque entre les limites 0 et ∞. En effet, pour toute valeur positive de A, la fonction Ax reste continue depuis x=−∞ jusqu'à x=+∞, et l'équation

$$A^{x+y}=A^xA^y$$

est identique. La quantité A est donc une constante arbitraire qui n'adinet que des valeurs positives.

Nota. — On pourrait arriver très simplement à l'équation (9) de la manière suivante.

Si l'on prend les logarithmes des deux membres de l'équation (2) dans un système quelconque, on trouvera

et l'on en conclura (voir le problème I)

puis, en repassant des logarithmes aux nombres

$$\Phi(x)=[\Phi(1)]^x.$$

Problème III. — Déterminer la fonction φ(x) de manière qu'elle reste continue entre deux limites positives quelconques de la variable x, et que l'on ait pour toutes les valeurs positives des variables x et y

Solution. — Il serait facile d'appliquer à la solution du problème III une méthode semblable à celle que nous avons employée pour résoudre le premier ; mais on arrive plus promptement à la solution cherchée en mettant l'équation (3), ainsi qu'on va le faire, sous une forme analogue à celle de l'équation (1).

Si l'on désigne par A un nombre quelconque et par L la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A, on aura, pour toutes les valeurs positives des variables x et y,

en sorte que l'équation (3) deviendra

$$\Phi(AL_X+L_Y)=\Phi(AL_X)+\Phi(AL_Y).$$

Comme, dans cette dernière formule, les quantités variables Lx,Ly admettent des valeurs quelconques positives ou négatives, il en résulte qu'on aura, pour toutes les valeurs réelles possibles des variables x et y,

$$\Phi(A^{X+Y})=\Phi(A^X)+\Phi(A^Y).$$

On en conclura [voir le problème I, équat. (6)]

$$\Phi(A^X)=x\Phi(A1)=x\Phi(A)$$

et, par suite,

$$\Phi(AL_X)=\Phi(A)L_X,$$

ou, ce qui revient au même,

Il suit de la formule (11) que toute fonction φ(x), propre à résoudre le problème III, est nécessairement de la forme

a désignant une constante. Il est d'ailleurs aisé de s'assurer : 1 que la constante a demeure entièrement arbitraire, 2 que, en choisissant convenablement le nombre A, qui est lui-même arbitraire, on peut la réduire à l'unité.

Problème IV. — Déterminer la fonction φ(x) de manière qu'elle reste continue entre deux limites positives quelconques de la variable x et que l'on ait, pour toutes les valeurs positives des variables x et y,

Solution. — Il serait facile d'appliquer à la solution du problème IV une méthode semblable à celle que nous avons employée pour résoudre le second. Mais on arrivera plus promptement à la solution cherchée, si l'on observe que, en désignant par L la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A, on peut mettre l'équation (4) sous la forme

$$\Phi(AL_X+L_Y)=\Phi(AL_X)\Phi(AL_Y).$$

Comme, dans cette dernière équation, les quantités variables L(x), L(y) admettront des valeurs quelconques positives ou négatives, il en résulte qu'on aura, pour toutes les valeurs réelles possibles des variables x et y,

$$\Phi(A^{X+Y})=\Phi(A^X)\Phi(A^Y).$$

On en conclura [voir le problème II, équat. (9)]

$$\Phi(A^X)=[\Phi(A)]^X$$

et, par suite,

$$\Phi(AL_X)=[\Phi(A)]L_X=xL\Phi(A),$$

ou, ce qui revient au même,

Il résulte de l'équation (13) que toute fonction φ(x), propre à résoudre le problème IV, est nécessairement de la forme

a désignant une constante. Il est d'ailleurs aisé de s'assurer que cette constante doit demeurer entièrement arbitraire.

Les quatre valeurs de φ(x) qui satisfont respectivement aux équations (1), (2), (3), (4), savoir

$$ax, Ax, aLx, xa$$

ont cela de commun, que chacune d'elles renferme une constante arbitraire a ou A. On doit en conclure qu'il y a une grande différence entre les questions où il s'agit de calculer les valeurs inconnues de certaines quantités et les questions dans lesquelles on se propose de découvrir la nature inconnue de certaines fonctions d'après des propriétés données. En effet, dans le premier cas, les valeurs des quantités inconnues se trouvent finalement exprimées par le moyen d'autres quantités connues et déterminées, tandis que dans le second cas les fonctions inconnues peuvent, comme on le voit ici, admettre dans leur expression des constantes arbitraires.

Dans chacun des problèmes du paragraphe précédent, l'équation à résoudre renfermait, avec la fonction inconnue φ(x), deux autres fonctions semblables, savoir, φ(y) et φ(x+y) ou φ(xy). Nous allons maintenant nous proposer un nouveau problème du même genre, mais dans lequel l'équation de condition, que la fonction φ(x) doit vérifier, renferme quatre fonctions semblables au lieu de trois. Voici en quoi il consiste :

Problème. — Déterminer la fonction φ(x) de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait, pour toutes les valeurs réelles des variables x et y,

Solution. — Si dans l'équation (1) on fait x=0, on en tirera

$$\Phi(0)=1.$$

La fonction φ(x) se réduit donc à l'unité, pour la valeur particulière x=0, et, puisqu'on la suppose continue entre des limites quelconques, il est clair qu'elle sera, dans le voisinage de cette valeur particulière, très peu différente de l'unité, par conséquent positive. On pourra donc, en désignant par a un nombre très petit, choisir ce nombre de telle manière que la fonction φ(x) reste constamment positive entre les limites

$$x=0, x=a.$$

Cela posé, il arrivera de deux choses l'une ou la valeur positive de φ(x) sera comprise entre les limites 0 et 1, ou cette valeur sera supérieure à l'unité. Nous allons examiner successivement ces deux hypothèses.

Concevons d'abord que φ(α) ait une valeur comprise entre les limites 0 et 1. On pourra représenter cette valeur par le cosinus d'un certain arc θ renfermé entre les limites $0, \frac{\pi}{2}$, et poser en conséquence

$$\Phi(a)=\cos\theta.$$

De plus, si, dans l'équation (1) mise sous la forme

$$\Phi(y+x)=2\Phi(x)\Phi(y)-\Phi(y-x),$$

on fait successivement

on en déduira l'une après l'autre les formules

$$\Phi(2\alpha)=2\cos 2\theta-1=\cos 2\theta,\Phi(3\alpha)=2\cos\theta\cos 2\theta-\cos\theta=\cos 3\theta,\Phi(4\alpha)=2\cos\theta\cos 3\theta-\cos 2\theta=\cos 4\theta,$$

et en général, m désignant un nombre entier quelconque,

$$\Phi(m\alpha)=2\cos\theta\cos(m-1)\theta-\cos(m-2)\theta=\cos m\theta.$$

J'ajoute que la formule

$$\Phi(m\alpha)=\cos m\theta$$

subsistera encore, si l'on y remplace le nombre entier m par une fraction ou même par un nombre quelconque μ. C'est ce que l'on prouvera facilement, ainsi qu'il suit.

Si dans l'équation (1) on fait x=12α,y=12α, on en tirera

$$[\Phi(12\alpha)]2=\Phi(0)+\Phi(\alpha)2=1+\cos\theta 2=(\cos.12\theta)2;$$

puis, en extrayant les racines positives des deux membres et observant que les deux fonctions φ(x), cosx restent positives, la première entre les limites x=0,x=α, la seconde entre les limites x=0,x=θ, on trouvera

$$\Phi(12\alpha)=\cos 12\theta.$$

De même, si dans l'équation (1) on fait

on en tirera

$$[\Phi(14\alpha)]2=\Phi(0)+\Phi(12)\alpha 2=1+\cos 12\theta 2=(\cos 14\theta)2;$$

puis, en extrayant de part et d'autre les racines positives,

$$\Phi(14\alpha)=\cos 14\theta.$$

Par des raisonnements semblables, on obtiendra successivement les formules

$$\Phi(18\alpha) =\cos 18\theta,\Phi(116\alpha)=\cos 116\theta,\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en général, n désignant un nombre entier quelconque,

$$\Phi(12n\alpha)=\cos 12n\theta.$$

Si l'on opère sur la valeur précédente de φ(12nα) pour en déduire celle de φ(m2nα), comme on a opéré sur la valeur de φ(α) pour en déduire celle de φ(mα), on trouvera

$$\Phi(m2n\alpha)=\cos m2n\alpha;$$

puis, en supposant que la fraction m2n varie de manière à s'approcher indéfiniment du nombre μ, et passant aux limites, on obtiendra l'équation

De plus, si dans la formule (1) on fait

on en conclura

$$\Phi(-\mu\alpha)=[2\Phi(0)-1]\Phi(\mu\alpha)=\cos\mu\theta=\cos(-\mu\theta).$$

L'équation (2) subsistera donc lorsqu'on y remplacera μ par −μ. En d'autres termes, on aura, pour des valeurs quelconques positives ou négatives de la variable x,

Si dans cette dernière formule on change x en xα, elle donnera

La valeur précédente de φ(x) est relative au cas où la quantité positive φ(α) reste comprise entre les limites 0 et 1. Supposons maintenant cette même quantité supérieure à l'unité. Il est facile de voir que, dans cette seconde hypothèse, on pourra satisfaire par une valeur positive de r à l'équation

$$\Phi(\alpha)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right).$$

Il suffira, en effet, de prendre

$$r=\varphi(x)+\sqrt{\{[\varphi(\alpha)]^2-1\}}.$$

Cela posé, si dans l'équation (1) on fait successivement

on en déduira l'une après l'autre les formules

$$\Phi(2\alpha)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2-1=\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right),\Phi(3\alpha)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{2}\left(r^3+\frac{1}{r^3}\right),\Phi(4\alpha)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\left(r^3+\frac{1}{r^3}\right)-\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)=\frac{1}{2}\left(r^4+\frac{1}{r^4}\right),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en général, m désignant un nombre entier quelconque,

$$\Phi(\mu\alpha)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\left(r^{\mu-1}+\frac{1}{r^{\mu-1}}\right)-\frac{1}{2}\left(r^{\mu-2}+\frac{1}{r^{\mu-2}}\right)=\frac{1}{2}\left(r^{\mu}+\frac{1}{r^{\mu}}\right).$$

J'ajoute que la formule

$$\Phi(\mu\alpha)=\frac{1}{2}\left(r^{\mu}+\frac{1}{r^{\mu}}\right)$$

subsistera encore, si l'on y remplace le nombre entier m par une fraction, ou même par un nombre quelconque μ. C'est ce que l'on prouvera facilement, ainsi qu'il suit.

Si dans l'équation (1) on fait x=12α, y=12α, on en tirera

$$[\Phi(12\alpha)]2=\Phi(0)+\Phi(\alpha)2=1+\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)2=\frac{1}{4}\left(r^{12}+r-12\right)2;$$

puis, en extrayant les racines positives des deux membres, et en observant que la fonction φ(x) reste positive entre les limites x=0, x=α, on trouvera

$$\Phi(12\alpha)=\frac{1}{2}\left(r^{12}+r-12\right).$$

De même, si dans l'équation (1) on fait

on en tirera

$$[\Phi(14\alpha)]2=\Phi(0)+\Phi(12\alpha)2=1+\frac{1}{2}\left(r^{12}+r-12\right)2=\frac{1}{4}\left(r^{14}+r-14\right)2;$$

puis, en extrayant de part et d'autre les racines positives,

$$\Phi(14A)=12(R14+R-14).$$

Par des raisonnements semblables, on obtiendra successivement les formules

$$\Phi(18A) =12(R18+R-18),\Phi(116A)=12(R116+R-116),.....,$$

et en général, n désignant un nombre entier quelconque,

$$\Phi(12NA)=12(R12N+R-12N).$$

Si l'on opère sur la valeur précédente de φ(12nα), pour en déduire celle de φ(m2nα), comme on a opéré sur la valeur de φ(α), pour en déduire celle φ(mα), on trouvera

$$\Phi(M2NA)=12(RM2N+R-M2N);$$

puis, en supposant que la fraction m2n varie de manière à s'approcher indéfiniment du nombre μ, et passant aux limites, on obtiendra l'équation

De plus, si dans la formule (1) on fait

on en conclura

$$\Phi(-MA)=[2\Phi(0)-1]\Phi(MA)=12(R-M+RM).$$

L'équation (5) subsistera donc, lorsqu'on y remplacera μ par −μ. En d'autres termes, on aura, pour des valeurs quelconques positives ou négatives de la variable x,

Si dans cette dernière formule on change x en xα, elle donnera

Lorsqu'on fait, dans l'équation (4), ±θα=a, et, dans l'équation (7), r±1α=A, ces équations prennent respectivement les formes suivantes :

Si donc l'on désigne par a une quantité constante, et par A un nombre constant, toute fonction φ(x) qui, demeurant continue entre des limites quelconques de la variable, vérifiera l'équation (1), sera nécessairement comprise sous l'une des deux formes qu'on vient de rapporter. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que les valeurs de φ(x) fournies par les équations (8) et (9) résolvent la question proposée, quelles que soient les valeurs attribuées à la quantité a et au nombre A. Ce nombre et cette quantité sont donc deux constantes arbitraires, dont l'une ne peut admettre que des valeurs positives.

D'après ce qu'on vient de dire, les deux fonctions

$$\cos ax,12(Ax+A-x)$$

ont la propriété commune de satisfaire à l'équation (1), ce qui établit entre elles une analogie remarquable. L'une et l'autre de ces deux fonctions se réduisent encore à l'unité pour x=0. Mais une différence essentielle entre la première et la seconde, c'est que la valeur numérique de la première est constamment au-dessous de la limite 1, lorsqu'elle n'atteint pas cette limite ; tandis que, dans la même hypothèse, la valeur numérique de la seconde est constamment au-dessus.

Chapitre VI

On appelle série une suite indéfinie de quantités

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme sn s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite convergente, et la limite en question s'appellera la somme de la série. Au contraire, si, tandis que n croit indéfiniment, la somme s, ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera divergente et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir un, sera ce qu'on nomme le terme général. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série soit complètement déterminée.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

qui a pour terme général xn, ", c'est-à-dire la puissance n de la quantité x. Si dans cette série on fait la somme des n premiers termes, on trouvera

et, comme pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique de la fraction xn1−x converge vers la limite zéro, ou croît au delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de x inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure que, dans la première hypothèse, la progression

est une série convergente qui a pour somme 11−x, tandis que, dans la seconde hypothèse, la même progression est une série divergente qui n'a plus de somme.

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}$$

vers une limite fixe s; en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$$

différent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme sn et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$s_{n+1} - s_n = u_n, s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1}, s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire le terme général un, décroisse indéfiniment, tandis que n augmente ; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes

$$u_n+u_{n+1},u_n+u_{n+1}+u_{n+2},\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

c'est-à-dire les sommes des quantités

$$u_n,u_{n+1},u_{n+2},\ldots,$$

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

Prenons pour exemple la progression géométrique

Si la valeur numérique de x est supérieure à l'unité, celle du terme général xn croîtra indéfiniment avec n, et cette seule remarque suffira pour constater la divergence de la série. La série sera encore divergente si l'on suppose $x=\pm1$, parce qu'alors la valeur numérique du terme général xn, se réduisant à l'unité, ne décroîtra pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n. Mais, si la valeur numérique de x est inférieure à l'unité, les sommes des termes de la série pris à partir de xn en tel nombre que l'on voudra, savoir :

$$x_n,x_n+x_{n+1}=x_n1-x21-x,x_n+x_{n+1}+x_{n+2}=x_n1-x31-x,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

se trouvant toutes comprises entre les limites

$$x_n,x_n1-x,$$

chacune d'elles deviendra infiniment petite pour des valeurs de n infiniment grandes ; et par suite la série sera convergente, ce que l'on savait déjà.

Prenons pour second exemple la série numérique

Le terme général de cette série, savoir $1n+1$, décroît indéfiniment à mesure que n augmente, et cependant la série n'est pas convergente ; car la somme faite du terme $1n+1$ et de ceux qui le suivent jusqu'au terme 12n inclusivement, savoir

$$1_{n+1}+1_{n+2}+\ldots+12_n-1+12_n,$$

reste constamment supérieure, quel que soit n, au produit

$$n12_n=12;$$

et par suite cette somme ne décroît pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, ainsi que cela aurait lieu si la série était convergente. Ajoutons que, si l'on désigne par sn la somme des n premiers termes de la série (3), et par 2m la plus haute puissance de 2 renfermée dans $n+1$, on trouvera

$$s_n=1+12+13+\ldots+1_{n+1}>1+12+(13+14)+(15+16+17+18)+\ldots+(12_m-1+1+12_m-1+2+\ldots+12_m),$$

et, a fortiori,

$$s_n>1+12+12+12+\ldots+12=1+m2.$$

On en conclura que la somme sn croît indéfiniment avec le nombre entier m, et par conséquent avec n, ce qui est une nouvelle preuve de la divergence de la série.

Considérons encore la série numérique

Les termes de cette série, qui occupent un rang supérieur à n, savoir

seront respectivement inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

Par suite, la somme des premiers termes pris en tel nombre que l'on voudra sera toujours inférieure à la somme des termes correspondants de la progression géométrique, qui est une série convergente, et à plus forte raison, à la somme de cette progression, c'est-à-dire à

$$11.2.3...N11-1N=11.2.3...(N-1)1N-1.$$

Comme cette dernière somme décroît indéfiniment à mesure que n augmente, il en résulte que la série (4) est elle-même convergente. On est convenu de désigner par la lettre e la somme de cette série. En ajoutant les n premiers termes, on obtiendra, pour valeur approchée du nombre e,

et, d'après ce qu'on vient de dire, l'erreur commise sera inférieure au produit du n terme par 1n−1. Ainsi, par exemple, si l'on suppose n=11, on trouvera pour la valeur approchée de e

et l'erreur commise dans cette hypothèse sera inférieure au produit de la fraction 11.2.3.4.5.6.7.8.9.10 par 110, c'est-à-dire à 136288000, sorte qu'elle n'altérera pas la septième décimale.

Le nombre e, déterminé comme on vient de le dire, sera souvent employé dans la sommation des suites et dans le Calcul infinitésimal. Les logarithmes pris dans le système qui a ce nombre pour base s'appellent népériens, du nom de Néper, inventeur des logarithmes, ou hyperboliques, parce qu'ils servent à mesurer les diverses parties de l'aire comprise entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes.

On indique généralement la somme d'une série convergente par la somme de ses premiers termes suivie de points. Ainsi, lorsque la série

$$U0,U1,U2,U3,...$$

est convergente, la somme de cette série est représentée par

$$U0+U1+U2+U3+...$$

En vertu de cette convention, la valeur du nombre e se trouvera déterminée par l'équation

et, si l'on considère la progression géométrique

on aura, pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité,

La série

$$U0,U1,U2,U3,...$$

étant supposée convergente, si l'on désigne sa somme par s, et par sn la somme de ses n premiers termes, on trouvera

$$S=U0+U1+U2+...+UN-1+UN+UN+1+...=SN+UN+UN+1+...$$

et, par suite,

$$s-sn=un+un+1+\ldots.$$

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$un,un+1,un+2,\ldots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à s−sn. Si l'on représente cette même somme par rn, on aura

$$s=sn+rn;$$

et rn sera ce qu'on appelle le reste de la série (1) à partir du n terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable,

$$sn,rnets$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de sn sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite ; et celui de rn deviendra insensible en même temps que rn si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème I. — Lorsque les différents termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable x, entre les limites x=−1, x=1; ce qu'on peut vérifier à l'inspection de la valeur de s donnée par l'équation

$$s=11-x.$$

§ II. — Des séries dont tous les termes sont positifs.

Lorsque la série

a tous ses termes positifs, on peut ordinairement décider si elle est convergente ou divergente, à l'aide du théorème suivant :

Théorème I. — Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression $(un)^{1n}$, et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit. La série (1) sera convergente si l'on a $k<1$, et divergente si l'on a $k>1$.

Démonstration. — Supposons d'abord $k<1$, et choisissons à volonté entre les deux nombres 1 et k un troisième nombre U, en sorte qu'on ait

$$k<U<1.$$

n venant à croître au delà de toute limite assignable, les plus grandes valeurs de $(un)_{1n}$ ne pourront s'approcher indéfiniment de la limite k, sans finir par être constamment inférieures à U. Par suite, il sera possible d'attribuer au nombre entier n une valeur assez considérable pour que, n obtenant cette même valeur ou une valeur plus grande encore, on ait constamment

$$(u)_{1N}<U,u_N<U_N.$$

Il en résulte que les termes de la série

$$u_0,u_1,u_2,\ldots,u_{N+1},u_{N+2},\ldots$$

finiront par être toujours inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

et, comme cette progression est convergente (à cause de U<1), on peut, de la remarque précédente, conclure a fortiori la convergence de la série (1).

Supposons, en second lieu, k>1, et plaçons encore entre les deux nombres 1 et k un troisième nombre U, en sorte qu'on ait

$$k>U>1.$$

Si n vient à croître au delà de toute limite, les plus grandes valeurs de $(un)_{1n}$, en s'approchant indéfiniment de k, finiront par devenir supérieures à U. On pourra donc satisfaire à la condition

$$(u_N)_{1N}>U$$

ou, ce qui revient au même, à la suivante

$$u_N>U_N,$$

par des valeurs de n aussi considérables que l'on voudra ; et par suite, on trouvera dans la série

$$u_0,u_1,u_2,\ldots,u_N,u_{N+1},u_{N+2},\ldots$$

un nombre indéfini de termes supérieurs aux termes correspondants de la progression géométrique

Comme cette progression est divergente (à cause de U>1), et qu'en conséquence ses différents termes croissent à l'infini, la remarque que l'on vient de faire suffira pour établir la divergence de la série (1).

Dans un grand nombre de circonstances, on peut déterminer la valeur de la quantité k à l'aide du théorème IV (Chap. II, § III). En effet, en vertu de ce théorème, toutes les fois que le rapport $u_{n+1}u_n$ convergera vers une limite fixe, cette limite sera précisément la valeur de k. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — Si, pour des valeurs croissantes de n, le rapport

$$u_{n+1}u_n$$

converge vers une limite fixe k, la série (1) sera convergente toutes les fois que l'on aura k<1, et divergente toutes les fois que l'on aura k>1.

Concevons, par exemple, que l'on considère la série

on trouvera

$$u_{n+1}u_n=1.2.3\ldots n1.2.3\ldots n(n+1)=1n+1,k=1\infty=0,$$

et par conséquent la série sera convergente, ce que l'on savait déjà.

Le premier des deux théorèmes qu'on vient d'établir ne laisse d'incertitude sur la convergence ou la divergence d'une série dont tous les termes sont positifs, que dans le cas particulier où la quantité représentée par k devient égale à l'unité. Dans ce cas particulier, il n'est pas toujours facile de décider la question. Toutefois, nous allons démontrer ici deux nouvelles propositions à l'aide desquelles on peut souvent y parvenir.

Théorème III. — Lorsque, dans la série (1), chaque terme est inférieur à celui qui le précède, cette série et la suivante

sont en même temps convergentes ou divergentes.

Démonstration. — Supposons d'abord la série (1) convergente, et désignons sa somme par s. On aura

$$u_0=u_0,2u_1=2u_1,4u_3<2u_2+2u_3,8u_7<2u_4+2u_5+2u_6+2u_7,\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et par suite la somme des termes de la série (2), pris en tel nombre que l'on voudra, sera inférieure à

$$u_0+2u_1+2u_2+2u_3+2u_4+\ldots=2s-u_0.$$

Il en résulte que la série (2) sera convergente.

Supposons, en second lieu, la série (1) divergente. La somme de ses termes, pris en très grand nombre, finira par surpasser toute limite assignable ; et, comme on aura

$$u_0=u_0,2u_1>u_1+u_2,4u_3>u_3+u_4+u_5+u_6,8u_7>u_7+u_8+u_9+u_{10}+u_{11}+u_{12}+u_{13}+u_{14},\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on devra conclure que la somme des quantités

$$u_0,2u_1,4u_3,8u_7,\ldots,$$

prises en très grand nombre, finit elle-même par devenir supérieure à toute quantité donnée. La série (2) sera donc alors divergente, conformément au théorème énoncé.

Corollaire. — Si pour la série (1) on prend la suivante

μ désignant une quantité quelconque, la série (2) deviendra

Cette dernière est une progression géométrique, convergente lorsqu'on suppose $\mu>1$, et divergente dans le cas contraire. Par suite, la série (3) sera elle-même convergente si μ est un nombre supérieur à l'unité, et divergente si l'on a $\mu=1$ ou $\mu<1$. Par exemple, des trois séries

la première sera convergente et les deux autres divergentes.

Théorème IV. — Supposons que l'on désigne par L la caractéristique des logarithmes dans un système quelconque, et que, pour des valeurs croissantes de n, le rapport

converge vers une limite finie h. La série (1) sera convergente si l'on a h>1, et divergente si l'on a h<1.

Démonstration. — Supposons d'abord h>1, et choisissons à volonté entre les deux quantités 1 et h une troisième quantité a, en sorte qu'on ait

$$h>a>1.$$

Le rapport L(un)L(1n), ou son égal

finira par être, pour de très grandes valeurs de n, constamment supérieur à la quantité a. En d'autres termes, n venant à croître au delà d'une certaine limite, on aura toujours

ou, ce qui revient au même,

et, par suite,

$$1un>na,un<1na.$$

Il en résulte que les termes de la série (1) finiront par être constamment inférieurs aux termes correspondants de la suivante

et, comme cette dernière sera convergente (à cause de a>1), on pourra de la remarque précédente conclure a fortiori la convergence de la série (1).

Supposons, en second lieu, h<1, et plaçons encore entre les quantités 1 et h une troisième quantité a, en sorte qu'on ait

$$h<a<1.$$

On finira par avoir constamment, pour de très grandes valeurs de n,

ou, ce qui revient au même,

et, par suite,

$$1un<na,un>1na.$$

Il en résulte que les termes de la série (1) finiront par être constamment supérieurs aux termes correspondants de la suivante

et, comme cette dernière sera divergente (à cause de a<1), on pourra de la remarque qu'on vient de faire conclure a fortiori la divergence de la série (1).

Étant données deux séries convergentes dont tous les termes sont positifs, on peut, en ajoutant ou multipliant ces mêmes termes, former une nouvelle série dont la somme résulte de l'addition ou de la multiplication des sommes des deux premières. Nous établirons à ce sujet les deux théorèmes suivants :

Théorème V. — Soient

deux séries convergentes, qui, uniquement composées de termes positifs, aient respectivement pour sommes s et s′:

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme s+s′.

Démonstration. — Si l'on fait

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}, \quad s'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1},$$

s_n et s'_n convergeront respectivement, pour des valeurs croissantes de n, vers les limites s et s'. Par suite, $s_n + s'_n$, c'est-à-dire la somme des n premiers termes de la série (8), convergera vers la limite $s + s'$, ce qui suffit pour établir le théorème énoncé.

Théorème VI. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent,

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme ss'.

Démonstration. — Soient toujours s_n, s'_n les sommes des n premiers termes des deux séries (7), et désignons en outre par s''_n, la somme des n premiers termes de la série (9). Si l'on représente par m le plus grand nombre entier compris dans $n-12$, c'est-à-dire $n-12$ lorsque n est impair, et $n-22$ dans le cas contraire, on aura évidemment

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots + (u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + \ldots + u_{n-2} v_1 + u_{n-1} v_0)$$

$$< (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1})(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1})$$

et

$$> (u_0 + u_1 + \ldots + u_m)(v_0 + v_1 + \ldots + v_m),$$

ou, en d'autres termes,

$$s''_n < s_n s'_n < s_{m+1} s'_{m+1}.$$

Concevons maintenant que l'on fasse croître n au delà de toute limite. Le nombre

$$m = n - 32 \pm 122$$

croîtra lui-même indéfiniment, et les deux sommes s_n, s_{m+1} convergeront vers la limite s, tandis que s'_n et s'_{m+1} convergeront vers la limite s'. Par suite, les deux produits $s_n s'_n$, $s_{m+1} s'_{m+1}$ et la somme s''_n comprise entre ces deux produits convergeront vers la limite ss', ce qui suffit pour établir le théorème VI.

§ III. — Des séries qui renferment des termes positifs et des termes négatifs.

Supposons que la série

se compose de termes, tantôt positifs, tantôt négatifs, et soient respectivement

les valeurs numériques de ces mêmes termes, en sorte qu'on ait

$$u_0 = \pm p_0, u_1 = \pm p_1, u_2 = \pm p_2, \ldots, u_n = \pm p_n, \ldots.$$

La valeur numérique de la somme

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

ne pouvant jamais surpasser

$$p0+p1+p2+\ldots+pn-1,$$

il en résulte que la convergence de la série (2) entraînera toujours celle de la série (1). On doit ajouter que la série (1) sera divergente, si quelques termes de la série (2) finissent par croître au delà de toute limite assignable. Ce dernier cas se présente lorsque les plus grandes valeurs de $(\rho n)^{1n}$ convergent, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite supérieure à l'unité. Au contraire, lorsque cette limite devient inférieure à l'unité, la série (2) est toujours convergente. On peut, en conséquence, énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — Soit ρn la valeur numérique du terme général un de la série (1), et désignons par k la limite vers laquelle convergent, tandis que n croît indéfiniment, les plus grandes valeurs de l'expression $(\rho n)^{1n}$. La série (1) sera convergente si l'on a $k<1$, et divergente si l'on a $k>1$.

Lorsque la fraction $\rho n+1\rho n$, c'est-à-dire la valeur numérique du rapport $un+1un$, convergera vers une limite fixe, cette limite sera, en vertu du théorème IV (Chap. II, § III), la valeur cherchée de k. Cette remarque conduit à la proposition que je vais écrire :

Théorème II. — Si pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique du rapport

$$un+1un$$

converge vers une limite fixe k, la série (1) sera convergente toutes les fois que l'on aura $k<1$, et divergente toutes les fois que l'on aura $k>1$.

Par exemple, si l'on considère la série

on trouvera

$$un+1un=-1n+1,k=1\infty=0;$$

d'où il résulte que la série sera convergente.

Le premier des deux théorèmes qu'on vient d'établir ne laisse d'incertitude sur la convergence ou la divergence d'une série que dans le cas particulier où la quantité représentée par k devient égale à l'unité. Dans ce cas particulier, on peut quelquefois constater la convergence de la série proposée, soit en s'assurant que les valeurs numériques de ses différents termes forment une série convergente, soit en ayant égard au théorème suivant :

Théorème III. — Si dans la série (1) la valeur numérique du terme général un décroît constamment et indéfiniment, pour des valeurs croissantes de n, si de plus les différents termes sont alternativement positifs et négatifs, la série sera convergente.

Considérons, par exemple, la série

La somme des termes dont le rang surpasse n, si on les suppose pris en nombre égal à m, sera

$$\pm(1n+1-1n+2+1n+3-1n+4+\ldots\pm1n+m).$$

Or la valeur numérique de cette somme, savoir

$$1n+1-1n+2+1n+3-1n+4+\ldots\pm1n+m=1n+1-(1n+2-1n+3)-(1n+4-1n+5)-\ldots=(1n+1-1n+2)+(1n+3-1n+4)+(1n+5-1n+6)+\ldots,$$

étant évidemment comprise entre

$$1_N+1 \text{ et } 1_N+1-1_N+2,$$

décroîtra indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, quel que soit m, ce qui suffit pour établir la convergence de la série proposée. Les mêmes raisonnements peuvent évidemment s'appliquer à toutes les séries de ce genre. Je citerai, entre autres, la suivante

laquelle, en vertu du théorème III, restera convergente pour toutes les valeurs positives de μ.

Si dans la série (4) on supprime le signe – devant chacun des termes de rang pair, on obtiendra la série (3) du § II, qui est divergente toutes les fois que l'on suppose $\mu=1$ ou $\mu<1$. Par suite, pour transformer une série convergente en série divergente, ou réciproquement, il suffit quelquefois de changer les signes de certains termes. Au reste, cette remarque est uniquement applicable aux séries pour lesquelles la quantité désignée par k dans le théorème II se réduit à l'unité.

Étant donnée une série convergente dont tous les termes sont positifs, on ne peut qu'augmenter la convergence en diminuant les valeurs numériques de ces mêmes termes, et changeant les signes de quelquesuns. Il est bon d'observer qu'on produira ce double effet si l'on multiplie chaque terme par un sinus ou par un cosinus, et cette observation suffit pour établir la proposition suivante :

Théorème IV. — Lorsque la série

uniquement formée de termes positifs, est convergente, chacune des suivantes

l'est pareillement, quelles que soient les valeurs des arcs $\theta_0,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n,\ldots$

Corollaire. — Si l'on suppose généralement

$$\theta_N=N\theta,$$

θ désignant un arc quelconque, les séries (5) deviendront respectivement

Ces deux dernières seront donc toujours convergentes en même temps que la série (2).

Si l'on considère à la fois deux séries dont chacune renferme des termes positifs et des termes négatifs, on démontrera facilement à leur égard les théorèmes V et VI du § II, ainsi qu'on va le voir.

Théorème V. — Soient

deux séries convergentes qui aient respectivement pour sommes s et s′;

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme s+s′.

Démonstration. — Si l'on fait

$$s_N=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{N-1}, s'_N=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{N-1},$$

sn et s'n convergeront respectivement, pour des valeurs croissantes de n, vers les limites s et s′. Par suite, sn+s'n, c'est-à-dire la somme des n premiers termes de la série (8), convergera vers la limite s+s′, ce qui suffit pour établir le théorème énoncé.

Théorème VI. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si chacune des séries (7) reste convergente, lorsqu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs numériques,

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme ss′.

Démonstration. — Soient toujours sn,s'n les sommes des n premiers termes des deux séries (7), et désignons en outre par s″n, la somme des n premiers termes de la série (9). On trouvera

$$s_n s'_n - s''_n = u_n - 1 v_n - 1 + (u_n - 1 v_n - 2 + u_n - 2 v_n - 1) + \ldots + (u_n - 1 v_1 + u_n - 2 v_2 + \ldots + u_2 v_n - 2 + u_1 v_n - 1).$$

De plus, le théorème VI ayant été démontré dans le second paragraphe pour le cas où les séries (7) ne renferment que des termes positifs, il en résulte que, dans cette hypothèse, chacune des quantités sns'n, s″n converge, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite ss′, et par suite la différence sns'n−s″n ou, ce qui revient au même, la somme

$$u_n - 1 v_n - 1 + (u_n - 1 v_n - 2 + u_n - 2 v_n - 1) + \ldots + (u_n - 1 v_1 + u_n - 2 v_2 + \ldots + u_2 v_n - 2 + u_1 v_n - 1).$$

vers la limite zéro.

Concevons maintenant que, les termes des séries (7) étant les uns positifs et les autres négatifs, on désigne respectivement par

les valeurs numériques de ces différents termes. Supposons de plus, conformément à l'énoncé du théorème, que les séries (10), composées de ces mêmes valeurs numériques, soient toutes deux convergentes. En vertu de la remarque qu'on vient de faire, la somme

$$p_n - 1 p'_n - 1 + (p_n - 1 p'_n - 2 + p_n - 2 p'_n - 1) + \ldots + (p_n - 1 p'_1 + p_n - 2 p'_2 + \ldots + p_2 p'_n - 2 + p_1 p'_n - 1).$$

convergera, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro ; et, comme la valeur numérique de cette somme sera évidemment supérieure à celle de la suivante

$$u_n - 1 v_n - 1 + (u_n - 1 v_n - 2 + u_n - 2 v_n - 1) + \ldots + (u_n - 1 v_1 + u_n - 2 v_2 + \ldots + u_2 v_n - 2 + u_1 v_n - 1),$$

il en résulte que cette dernière ou, ce qui revient au même, la différence sns'n−s″n convergera elle-même vers la limite zéro. Par suite, ss′, qui est la limite du produit sns'n, sera encore celle de s″n. En d'autres termes, la série (9) sera convergente et aura pour somme le produit ss′.

Scolie. — Le théorème précédent pourrait ne plus subsister si les séries (7), supposées convergentes, cessaient de l'être après la réduction de chaque terme à sa valeur numérique. Concevons, par exemple, que pour chacune des séries (7) on prenne la suivante

La série (9) deviendra

Cette dernière est divergente, car son terme général, savoir

$$\pm(1_n + 1(n-1)2 + 1(n-2)3 + \ldots + 12(n-1) + 1n),$$

a une valeur numérique évidemment supérieure à

$$n[n2(n2+1)]12 = (4nn+2)12$$

lorsque n est pair, et à

$$n[(n+12)2]12 = 2nn+1$$

lorsque n est impair, c'est-à-dire, dans tous les cas possibles, une valeur numérique supérieure à l'unité. Cependant la série (11) est convergente. Mais on doit observer qu'elle cesse de l'être lorsqu'on réduit chaque terme à sa valeur numérique, puisqu'elle se change alors en la série (6) du § II.

§ IV. — Des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable.

Soit

une série ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes de la variable x,

désignant des coefficients constants positifs ou négatifs. Soit de plus A ce que devient pour la série (2) la quantité k du paragraphe précédent (voir le § III, théorème II). La même quantité, calculée pour la série (1), sera équivalente à la valeur numérique du produit

$$Ax.$$

Par suite, la série (1) sera convergente si cette valeur numérique est inférieure à l'unité, c'est-à-dire, en d'autres termes, si la valeur numérique de la variable x est inférieure à 1A. Au contraire, la série (1) sera divergente, si la valeur numérique de x surpasse 1A. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème I. — Soit A la limite vers laquelle converge, pour des valeurs croissantes de n, la racine n des plus grandes valeurs numériques de an. La série (1) sera convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites

et divergente pour toutes les valeurs de x situées hors des mêmes limites.

Lorsque la valeur numérique du rapport an+1an converge vers une limite fixe, cette limite est (en vertu du théorème IV, Chap. II, § III) la valeur cherchée de A. Cette remarque conduit à une nouvelle proposition que je vais écrire :

Théorème II. — Si, pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique du rapport

$$an+1an$$

converge vers la limite A, la série (1) sera convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites

$$-1A,+1A,$$

et divergente pour toutes les valeurs de x situées hors des mêmes limites.

Corollaire I. — Prenons pour exemple la série

$$1,2x,3x2,4x3,\ldots,(n+1)xn,\ldots.$$

Comme on trouvera dans cette hypothèse

$$an+1an=n+2n+1=1+1n+1$$

et, par suite,

$$A=1,$$

on en conclura que la série (3) est convergente pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites

et divergente pour les valeurs de x situées hors de ces limites.

Corollaire II. — Prenons pour second exemple la série

dans laquelle le terme constant est censé réduit à zéro. On trouvera dans cette hypothèse

$$\text{AN+1AN=NN+1=11+1N}$$

et, par suite, A=1. La série (4) sera donc encore convergente ou divergente, suivant que la valeur numérique de x sera inférieure ou supérieure à l'unité.

Corollaire III. Si pour la série (1) on prend la suivante

μ désignant une quantité quelconque, on trouvera

$$\text{AN+1AN=M−NN+1=−1−MN1+1N}$$

et, par suite,

$$\text{A=LIM1−MN1+1N=−1−1∞1+1∞=1.}$$

On en conclura que la série (5) est, comme les séries (3) et (4), convergente ou divergente, suivant que l'on attribue à la variable x une valeur numérique inférieure ou supérieure à l'unité.

Corollaire IV. — Considérons encore la série

Comme on aura dans ce cas

$$\text{AN+1AN=1N+1}$$

et, par suite,

$$\text{A=1∞=0,}$$

on en conclura que la série est convergente entre les limites

c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles possibles de la variable x.

Corollaire V. — Considérons enfin la série

En lui appliquant le théorème II, on trouvera

$$\text{AN+1AN=N+1,A=∞,}$$

et l'on aura par suite

$$\text{1A=0.}$$

On en conclura que la série (7) est toujours divergente, excepté lorsqu'on suppose x=0, auquel cas elle se réduit à son premier terme 1.

En examinant les résultats qu'on vient d'obtenir, on reconnaît immédiatement que, parmi les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x, les unes sont tantôt convergentes, tantôt divergentes, selon la valeur attribuée à cette variable, tandis que d'autres restent toujours convergentes, quel que soit x, et d'autres toujours divergentes, excepté pour x=0. On peut ajouter que le théorème I ne laisse d'incertitude sur la convergence d'une semblable série que dans le cas où la valeur numérique de x devient égale à la constante positive représentée par 1A, c'est-à-dire lorsqu'on suppose

$$x=\pm 1A.$$

Dans ce cas particulier, la série est tantôt convergente, tantôt divergente, et la convergence dépend quelquefois du signe de la variable x. Par exemple, si dans la série (4), pour laquelle A=1, on fait successivement

on obtiendra les deux suivantes

dont la première est divergente (voir dans le § II le corollaire du théorème III) et la seconde convergente, ainsi que cela résulte du théorème III (§ III).

Il est encore essentiel de remarquer que, par suite du théorème I, lorsqu'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable x sera convergente pour une valeur numérique de x différente de zéro, elle restera convergente, si l'on vient à diminuer cette valeur numérique ou même à la faire décroître indéfiniment.

Lorsque deux séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x sont convergentes pour une même valeur de la variable, on peut leur appliquer les théorèmes V et VI du § III. Cette remarque suffit pour établir les deux propositions que je vais énoncer :

Théorème III. — Supposons que les deux séries

étant à la fois convergentes, lorsqu'on attribue à la variable x une certaine valeur, aient alors pour sommes respectives s et s′,

sera, dans le même cas, une nouvelle série convergente, qui aura pour sommes s+s′.

Corollaire. — On étendra facilement ce théorème à tant de séries que l'on voudra. Par exemple, si les trois séries

$$A0,A1x,A2x2,\ldots,B0,B1x,B2x2,\ldots,C0,C1x,C2x2,\ldots,$$

sont convergentes pour une même valeur attribuée à la variable x, et que l'on désigne par s,s′,s″ leurs sommes respectives,

$$A0+B0+C0,(A1+B1+C1)x,(A2+B2+C2)x2,\ldots$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme s+s′+s″.

Théorème IV. — Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, si de plus chacune des séries (10) reste convergente, lorsqu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs numériques,

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme ss′.

Corollaire I. — Le théorème précédent se trouve compris dans la formule

qui subsiste dans le cas où chacune des séries (10) reste convergente lors même qu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs numériques, et qui sert à développer dans cette hypothèse le produit des sommes des deux séries en une nouvelle série de même forme.

Corollaire II. — En répétant plusieurs fois de suite l'opération indiquée par l'équation (13), on pourrait multiplier entre elles les sommes de trois ou d'un plus grand nombre de séries semblables aux séries (10), et dont chacune resterait convergente après la réduction de ses différents termes à

leurs valeurs numériques. Le produit obtenu serait la somme d'une nouvelle série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Corollaire III. — Si dans les deux corollaires précédents on suppose que toutes les séries dont on multiplie les sommes deviennent égales, on obtiendra pour produit une puissance entière de la somme de chacune d'elles, et cette puissance se trouvera encore représentée par la somme d'une série du même genre. Par exemple, si dans l'équation (13) on fait a0=b0, a1=b1, a2=b2,..., on en tirera

Corollaire IV. — Si l'on prend pour termes généraux des séries (10)

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)1.2.3\ldots nxn$$

et

$$m'(m'-1)(m'-2)\ldots(m'-n+1)1.2.3\ldots nxn,$$

μ,μ′ désignant deux quantités quelconques, et la variable x étant renfermée entre les limites x=−1, x=+1, chacune des séries (10) restera convergente, même lorsqu'on réduira ses différents termes à leurs valeurs numériques, et le terme général de la série (12) deviendra

$$+\mu 1\mu'(\mu-1)\ldots(\mu'-n+2)1.2.3\ldots(n-1)+\mu'(\mu'-1)\ldots(\mu'-n+1)1.2.3\ldots n]xn$$

$$=(m+m')(m+m'-1)(m+m'-2)\ldots(m+m'-n+1)1.2.3\ldots nxn.$$

Cela posé, si l'on appelle φ(μ) la somme de la première des séries (10) dans l'hypothèse que l'on vient de faire, c'est-à-dire, si l'on pose

les sommes des séries (10) et (12) seront respectivement désignées, dans la même hypothèse, par φ(μ),φ(μ′) et φ(μ+μ′); en sorte que l'équation (13) deviendra

Lorsque dans l'équation (13) on remplace la somme de la série

$$b0,b1x,b2x2,\ldots$$

par un polynôme composé d'un nombre fini de termes, on obtient une formule qui ne cesse jamais d'être exacte, tant que la série

$$a0,a1x,a2x2,\ldots$$

demeure convergente. C'est ce que nous allons prouver directement, en établissant le théorème qui suit :

Théorème V. — Si, la série (1) étant convergente, on multiplie la somme de cette série par le polynôme

dans lequel m désigne un nombre entier, on obtiendra pour produit la somme d'une nouvelle série convergente de même forme, dont le terme général sera

$$(qan+pan-1+\ldots+lan-m+1+kan-m)xm,$$

pourvu que l'on considère comme nulles dans les premiers termes celles des quantités

$$an-1,an-2,\ldots,an-m+1,an-m$$

qui se trouveront affectées d'indices négatifs en d'autres termes, on aura

Démonstration. — Pour multiplier la somme de la série (1) par le polynôme (17), il suffira de la multiplier successivement par les différents termes de ce polynôme. On aura donc

$$(k_{x^m}+l_{x^{m-1}}+\ldots+p_x+q)$$
$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)=q(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)+p_x(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+l_{x^{m-1}}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)+k_{x^m}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots).$$

Comme on a de plus, pour des valeurs entières quelconques de n,

$$q(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1})=qa_0+qa_1x+qa_2x^2+\ldots+qa_{n-1}x^{n-1},$$

on en conclura, en faisant croître n indéfiniment, et passant aux limites,

$$q(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)=qa_0+qa_1x+qa_2x^2+\ldots.$$

On trouvera de même

$$p_x(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)=pa_0x+pa_1x^2+pa_2x^3+\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l_{x^{m-1}}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)=la_0x^{m-1}+la_1x^m+la_2x^{m+1}+\ldots,k_{x^m}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)=ka_0x^m+ka_1x^{m+1}+ka_2x^{m+2}\ldots$$

Si l'on ajoute ces dernières équations, et qu'en formant la somme des seconds membres on réunisse les coefficients des puissances semblables de la variable x, on obtiendra précisément la formule (18).

Concevons maintenant que dans la série (1) on fasse varier la valeur de x par degrés insensibles. Tant que la série restera convergente, c'est-à-dire tant que la valeur de x demeurera comprise entre les limites

$$-1A,+1A,$$

la somme de la série sera (en vertu du théorème I, § I) une fonction continue de la variable x. Soit $\varphi(x)$ cette fonction continue. L'équation

$$\Phi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

subsistera pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites $-1A,+1A$, ce que nous indiquerons en écrivant ces limites à côté de la série, comme on le voit ici :

Lorsque la série est supposée connue, on peut quelquefois en déduire la valeur de la fonction $\varphi(x)$ sous forme finie, et c'est là ce qu'on appelle sommer la série. Mais le plus souvent la fonction $\varphi(x)$ est donnée, et l'on se propose de revenir de cette fonction à la série, ou, en d'autres termes, de développer la fonction en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x. Il est facile d'établir à ce sujet la proposition que je vais énoncer :

Théorème VI. — Une fonction continue de la variable x ne peut être développée que d'une seule manière en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable.

Démonstration. — En effet, supposons qu'on ait développé par deux méthodes différentes la fonction $\varphi(x)$, et soient.

$$a0,a1x,a2x2,\ldots,anxn,\ldots,b0,b1x,b2x2,\ldots,bnxn,\ldots$$

les deux développements, c'est-à-dire deux séries dont chacune, étant convergente pour des valeurs de x différentes de zéro, ait pour somme, tant qu'elle demeure convergente, la fonction φ(x). Ces deux séries étant constamment convergentes pour de très petites valeurs numériques de x, on aura, pour de semblables valeurs,

$$a0+a1x+a2x2+\ldots=b0+b1x+b2x2+\ldots.$$

Comme, en faisant évanouir x, on tire de l'équation précédente

$$a0=b0,$$

il en résulte qu'on peut la réduire généralement à

$$a1x+a2x2+\ldots=b1x+b2x2+\ldots$$

ou, ce qui revient au même, à

$$x(a1+a2x+\ldots)=x(b1+b2x+\ldots).$$

Si l'on multiplie par 1x les deux membres de cette dernière équation, on obtiendra la suivante

$$a1+a2x+\ldots=b1+b2x+\ldots,$$

qui devra encore subsister pour de très petites valeurs numériques de la variable x, et de laquelle on conclura, en posant x=0,

$$a1=b1.$$

En continuant de même, on ferait voir que les constantes a0,a1,a2,... sont respectivement égales aux constantes b0,b1,b2,..., d'où il suit que les deux développements de la fonction φ(x) sont identiques.

Le Calcul différentiel fournit des méthodes très expéditives pour développer les fonctions en séries. Nous exposerons plus tard ces méthodes, et nous nous bornerons pour l'instant à faire connaître, avec le développement de la fonction (1+x)μ, dans laquelle μ désigne une quantité quelconque, deux autres développements que l'on ramène facilement au premier, savoir, ceux des fonctions

$$AxetL(1+x),$$

Adésignant une constante positive, et L la caractéristique des logarithmes dans un système choisi à volonté. En conséquence, nous allons résoudre l'un après l'autre les trois problèmes qui suivent :

Problème I. — Développer, lorsque cela se peut, la fonction

$$(1+x)m$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Solution. — Si d'abord on suppose μ=m, m désignant un nombre entier quelconque, on aura, par la formule de Newton,

$$(1+x)_m=1+m1x+m(m-1)1.2x2+....$$

La série dont la somme constitue le second membre de cette formule est toujours composée d'un nombre fini de termes ; mais, si l'on y remplace le nombre entier m par une quantité quelconque μ, la nouvelle série que l'on obtiendra, savoir

se trouvera composée en général d'un nombre indéfini de termes, et sera convergente seulement pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité. Soit, dans cette hypothèse, φ(μ) la somme de la nouvelle série, en sorte qu'on ait

En vertu du théorème I (§ I), φ(μ) sera fonction continue de la variable μ entre des limites quelconques de cette variable, et l'on aura (voir le théorème III, corollaire IV)

Cette dernière équation étant entièrement semblable à l'équation (2) du Chapitre V (§ I) se résoudra de la même manière, et l'on en conclura

$$\Phi(m)=[\Phi(1)]_m=(1+x)_m.$$

La valeur de φ(μ) étant ainsi déterminée, si on la substitue dans la formule (15), on trouvera, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites x=−1, x=+1,

Lorsque la valeur numérique de x devient supérieure à l'unité, la série (5), n'étant plus convergente, cesse d'avoir une somme, en sorte que l'équation (20) ne subsiste plus. Dans la même hypothèse, il devient impossible, ainsi qu'on le prouvera plus tard à l'aide du Calcul infinitésimal, de développer la fonction (1+x)μ en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Corollaire I. — Si dans l'équation (20) on remplace μ par 1α et x par αx, α désignant une quantité infiniment petite, on aura, pour toutes les valeurs de αx renfermées entre les limites −1,+1, ou, ce qui revient au même, pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites −1α,+1α,

$$(1+ax)_{1a}=1+x1+x21.2(1-a)+x31.2.3(1-a)(1-2a)+...$$

$$(x=-1a,x=+1a).$$

Cette dernière équation devant subsister, quelque petite que soit la valeur numérique de α, si l'on désigne à l'ordinaire, par l'abréviation lim placée devant une expression qui renferme la variable α, la limite vers laquelle converge cette expression, tandis que la valeur numérique de α décroît indéfiniment, on trouvera, en passant aux limites,

Il reste à chercher la limite de (1+αx)1α. Or, en premier lieu, on tirera de la formule précédente

$$\lim(1+a)_{1a}=1+11+11.2+11.2.3+...,$$

ou, en d'autres termes,

e désignant la base des logarithmes népériens [voir le § I, équat. (6)]. On en conclura immédiatement

$$\lim(1+ax)_{1ax}=e,$$

et, par suite,

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^{x}=e^{x}.$$

Si maintenant on remet la valeur de $\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'équation (21), on obtiendra la suivante :

On pourrait arriver directement à l'équation (23) en observant que la série

est convergente pour toutes les valeurs possibles de la variable x, et cherchant la fonction de x qui représente la somme de cette même série. En effet, soit $\varphi(x)$ la somme de la série (6) qui a pour terme général

$$\frac{x^{n}}{1.2.3\ldots n},$$

$\varphi(y)$ sera la somme de la série qui a pour terme général

$$\frac{y^{n}}{1.2.3\ldots n};$$

et (en vertu du théorème VI, § III) le produit de ces deux sommes sera la somme d'une nouvelle série qui aura pour terme général

$$\frac{x^{n}}{1.2.3\ldots n}+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}+\ldots+\frac{x}{1}\cdot\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{y^{n}}{1.2.3\ldots n}=\frac{(x+y)^{n}}{1.2.3\ldots n}.$$

Ce produit sera donc égal à $\varphi(x+y)$, et par suite, si l'on fait

$$\Phi(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^{2}}{1.2}+\frac{x^{3}}{1.2.3}+\ldots,$$

la fonction $\varphi(x)$ vérifiera l'équation

$$\Phi(x)\Phi(y)=\Phi(x+y).$$

En résolvant cette équation, on en tirera

$$\Phi(x)=[\Phi(1)]^{x}=\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\right)^{x},$$

c'est-à-dire

$$\Phi(x)=e^{x}.$$

Corollaire II. — Si, après avoir retranché l'unité de chaque membre de l'équation (20), on divise les deux membres par μ, l'équation que l'on obtiendra pourra s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\frac{(1+x)^{m}-1}{m}=x-\frac{x^{2}}{2}(1-m)+\frac{x^{3}}{3}(1-m)\left(1-\frac{1}{2}m\right)-\ldots$$

$$(x=-1,x=+1);$$

et, si dans cette dernière on fait converger μ vers la limite zéro, on trouvera, en passant aux limites,

De plus, comme en désignant par l la caractéristique des logarithmes népériens pris dans le système dont la base est e, on a évidemment

$$(1+x)^{m}=e^{ml(1+x)}=1+ml(1+x)+\frac{m^{2}[l(1+x)]^{2}}{1.2}+\ldots,$$

on en conclura

$$\frac{(1+x)^{m}-1}{m}=l(1+x)+\frac{m^{2}[l(1+x)]^{2}}{}+\ldots$$

et, par suite,

Cela posé, la formule (24) deviendra

L'équation précédente subsiste tant que la valeur numérique de x reste inférieure à l'unité ; et, dans ce cas, la série

est convergente, aussi bien que la série (4), qui en diffère seulement par les signes des termes de rang impair. Les mêmes séries devenant divergentes, dès qu'on suppose la valeur numérique de x supérieure à l'unité, l'équation (26) cesse d'avoir lieu dans cette hypothèse.

Dans le cas particulier où l'on prend x=1, la série (27) se réduit à la série (3) du troisième paragraphe, laquelle est convergente, comme on l'a fait voir. L'équation (26) doit donc alors subsister, en sorte qu'on a

Si l'on prenait au contraire x=−1, la série (27) deviendrait divergente et n'aurait plus de somme.

On peut remarquer encore que, si après avoir écrit −x au lieu de x dans la formule (26), on change à la fois les signes des deux membres, on obtiendra la suivante

Problème II. — Développer la fonction

$$Ax,$$

dans laquelle A désigne un nombre quelconque, en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Solution. — Désignons toujours par la caractéristique l les logarithmes népériens pris dans le système dont la base est e. On aura, d'après la définition même des logarithmes,

$$A=\mathrm{EL}(A),$$

et l'on en conclura

Par suite, en ayant égard à l'équation (23), on trouvera

Cette dernière formule subsiste pour toutes les valeurs réelles possibles de la variable x.

Probleme III. — La caractéristique L désignant les logarithmes pris dans le système dont la base est A, développer, lorsque cela se peut, la fonction

en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x.

Solution. — Désignons toujours par l la caractéristique des logarithmes népériens. On aura, en vertu des propriétés connues des logarithmes,

et par suite, en ayant égard à l'équation (26), on trouvera, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites −1,+1,

Cette dernière formule subsiste dans le cas même où l'on prend x=1; mais elle cesse d'avoir lieu lorsqu'on suppose x=−1 ou x2>1.

Chapitre VII

DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES ET DE LEURS MODULES.

En Analyse, on appelle expression symbolique ou symbole toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même équations symboliques toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant et altérant selon des règles fixes, ou ces équations elles-mêmes, ou les symboles qu'elles renferment. L'emploi des expressions ou équations symboliques est souvent un moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats assez compliqués en apparence. C'est ce qu'on a déjà vu dans le second paragraphe du troisième Chapitre, où la formule (9) fournit une valeur symbolique très simple de l'inconnue x assujettie à vérifier les équations (4). Parmi les expressions ou équations symboliques dont la considération est de quelque importance en Analyse, on doit surtout distinguer celles que l'on a nommées imaginaires. Nous allons montrer comment on peut être conduit à en faire usage.

On sait que les sinus et cosinus de l'arc a+b sont donnés en fonction des sinus et cosinus des arcs a et b par les formules

Or, sans prendre la peine de retenir ces formules, on a un moyen fort simple de les retrouver à volonté. Il suffit, en effet, d'avoir égard à la remarque suivante.

Supposons que l'on multiplie l'une par l'autre les deux expressions symboliques

$$\cos a + -1 \sin a, \cos b + -1 \sin b,$$

en opérant d'après les règles connues de la multiplication algébrique, comme si -1 était une quantité réelle dont le carré fût égal à -1. Le produit obtenu se composera de deux parties : l'une toute réelle, l'autre ayant pour facteur -1; et la partie réelle fournira la valeur de cos(a+b), tandis que le coefficient -1 fournira celle de sin(a+b). Pour constater cette remarque, on écrit la formule

Les trois expressions que renferme l'équation précédente, savoir

$$\cos a + -1 \sin a, \cos b + -1 \sin b, \cos(a+b) + -1 \sin(a+b),$$

sont trois expressions symboliques qui ne peuvent s'interpréter d'après les conventions généralement établies, et ne représentent rien de réel. On les a nommées pour cette raison expressions imaginaires. L'équation (2) elle-même, prise à la lettre, se trouve inexacte et n'a pas de sens. Pour en tirer des résultats exacts, il faut, en premier lieu, développer son second membre par la multiplication algébrique, ce qui réduit cette équation à

Il faut, en second lieu, dans l'équation (3), égaler la partie réelle du premier membre à la partie réelle du second, puis le coefficient de -1 dans le premier membre au coefficient de -1 dans le second. On est ainsi ramené aux équations (1) que l'on doit considérer comme implicitement renfermées l'une et l'autre dans la formule (2).

En général, on appelle expression imaginaire toute expression symbolique de la forme

$$a + b - 1,$$

α,β désignant deux quantités réelles ; et l'on dit que deux expressions imaginaires

$$\alpha+\beta-1,\gamma+\delta-1$$

sont égales entre elles, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre : 1 entre les parties réelles α et γ; 2 entre les coefficients de −1, savoir β et δ. L'égalité de deux expressions imaginaires s'indique, comme celle de deux quantités réelles, par le signe =, et il en résulte ce qu'on appelle une équation imaginaire. Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. Par exemple, l'équation symbolique

$$\alpha+\beta-1=\gamma+\delta-1$$

équivaut seule aux deux équations réelles

$$\alpha=\gamma,\beta=\delta.$$

Lorsque, dans l'expression imaginaire

$$\alpha+\beta-1,$$

le coefficient β de −1 s'évanouit, le terme β−1 est censé réduit à zéro, et l'expression elle-même à la quantité réelle α. En vertu de cette convention, les expressions imaginaires comprennent, comme cas particuliers, les quantités réelles.

Les expressions imaginaires peuvent être soumises, aussi bien que les quantités réelles, aux diverses opérations de l'Algèbre. Si l'on effectue en particulier l'addition, la soustraction ou la multiplication de deux ou de plusieurs expressions imaginaires, en opérant d'après les règles établies pour les quantités réelles, on obtiendra pour résultat une nouvelle expression imaginaire qui sera ce qu'on appelle la somme, la différence ou le produit des expressions données ; et l'on se servira des notations ordinaires pour indiquer cette somme, cette différence ou ce produit. Par exemple, si l'on donne seulement deux expressions imaginaires

$$\alpha+\beta-1,\gamma+\delta-1,$$

on trouvera

Il est bon de remarquer que le produit de deux ou plusieurs expressions imaginaires, comme celui de deux ou plusieurs binômes réels, restera le même, dans quelque ordre qu'on multiplie ses différents facteurs.

Diviser une première expression imaginaire par une seconde, c'est trouver une troisième expression imaginaire qui, multipliée par la seconde, reproduise la première. Le résultat de cette opération est le quotient des deux expressions données. On se sert pour l'indiquer du signe ordinaire de la division. Ainsi, par exemple,

$$\alpha+\beta-1\gamma+\delta-1$$

représente le quotient des deux expressions imaginaires

$$\alpha+\beta-1,\gamma+\delta-1.$$

Élever une expression imaginaire à la puissance du degré m (m désignant un nombre entier), c'est former le produit de m facteurs égaux à cette expression. On indique la puissance m de α+β−1

par la notation

$$(A+B-1)M.$$

Extraire la racine n de l'expression imaginaire α+β−1, ou, en d'autres termes, élever cette expression à la puissance du degré 1n (n désignant un nombre entier quelconque), c'est former une nouvelle expression imaginaire dont la puissance n reproduise α+β−1. Ce problème admettant plusieurs solutions (voir le § IV), il en résulte que l'expression imaginaire α+β−1 a plusieurs racines du degré n. Lorsque nous voudrons désigner indistinctement l'une quelconque d'entre elles, nous emploierons la notation

$$A+B-1N$$

ou la suivante

$$((A+B-1))1N.$$

Dans le cas particulier où β s'évanouit, α+β−1 se réduit à une quantité réelle α, et parmi les valeurs de l'expression

$$AN=((A))1N$$

il peut s'en trouver une ou deux de réelles, comme on le verra ci-après.

Outre les puissances entières et les racines correspondantes des expressions imaginaires, on a souvent à considérer ce qu'on appelle leurs puissances fractionnaires ou négatives. On doit faire à ce sujet les remarques suivantes.

Pour élever l'expression imaginaire α+β−1 à la puissance fractionnaire du degré mn, il faut, en supposant la fraction mn réduite à sa plus simple expression : 1 extraire la racine n de l'expression donnée ; 2 élever cette racine à la puissance entière du degré m. Le problème pouvant être résolu de plusieurs manières (voir ci-après le § IV), nous désignerons indistinctement l'une quelconque des puissances du degré mn par la notation

$$((A+B-1))MN.$$

Dans le cas particulier où β se réduit à zéro, une ou deux de ces puissances peuvent devenir réelles.

Élever l'expression imaginaire α+β−1 à la puissance négative du degré −m, ou −1n, ou −mn c'est diviser l'unité par la puissance du degré m, ou 1n, ou mn de la même expression. Le problème admettant une solution seulement, dans le premier cas, et plusieurs solutions dans chacun des deux autres, on indique la puissance du degré −m par la notation simple

$$(A+B-1)-M,$$

tandis que les deux notations

$$((A+B-1))-1N,$$

$$((A+B-1))-MN$$

représentent, la première, une quelconque des puissances du degré −1n, et la seconde une quelconque des puissances du degré −mn.

On dit que deux expressions imaginaires sont conjuguées l'une à l'autre, lorsque ces deux expressions ne different entre elles que par le signe du coefficient de −1. La somme de deux semblables expressions est toujours réelle, ainsi que leur produit. En effet les deux expressions imaginaires conjuguées

$$A+B-1, A-B-1$$

donnent pour somme 2α et pour produit α2+β2. La dernière partie de cette observation conduit à un théorème relatif aux nombres, et dont voici l'énoncé :

Théorème I. — Si l'on multiplie l'un par l'autre deux nombres entiers dont chacun soit la somme de deux carrés, le produit sera encore une somme de deux carrés.

Démonstration. — Soient

$$A2+B2, A'2+B'2$$

les deux nombres entiers dont il s'agit, α2,β2,α'2,β'2, désignant des carrés parfaits. On aura évidemment les deux équations

$$(A+B-1)(A'+B'-1)=AA'-BB'+(AB'+A'B)-1, (A-B-1)(A'-B'-1)=AA'-BB'-(AB'+A'B)-1,$$

et, en multipliant celles-ci membre à membre, on obtiendra la suivante

Si l'on échange entre elles dans cette dernière les lettres α′ et β′, on trouvera

Il y a donc en général deux manières de décomposer en deux carrés le produit de deux nombres entiers dont chacun est la somme de deux carrés. Ainsi, par exemple, on tire des équations (7) et (8)

$$(22+1)(32+22)=42+72=12+82.$$

On voit par ces considérations que l'emploi des expressions imaginaires peut être d'une grande utilité, non seulement dans l'Algèbre ordinaire, mais encore dans la Théorie des nombres.

Quelquefois on représente une expression imaginaire par une seule lettre. C'est un artifice qui augmente les ressources de l'Analyse, et dont nous ferons usage dans ce qui va suivre.

§ II. — Sur les modules des expressions imaginaires et sur les expressions réduites.

Une propriété remarquable de toute expression imaginaire

$$A+B-1,$$

c'est de pouvoir se mettre sous la forme

$$\rho(\cos\theta+-1\sin\theta),$$

ρ désignant une quantité positive et θ un arc réel. En effet, si l'on pose l'équation symbolique

ou, ce qui revient au même, les deux équations réelles

on en tirera

et, après avoir ainsi déterminé la valeur du nombre ρ, il ne restera, pour vérifier complètement les équations (2), qu'à trouver un arc θ dont le cosinus et le sinus soient respectivement

Ce dernier problème est toujours soluble, attendu que chacune des quantités αα2+β2,βα2+β2 a une valeur numérique inférieure à l'unité, et que la somme de leurs carrés est égale à 1. De plus, il admet une infinité de solutions différentes, puisque, après avoir calculé une valeur convenable de l'arc θ, on pourra, sans changer ni le sinus ni le cosinus, augmenter ou diminuer cet arc d'un nombre quelconque de circonférences.

Lorsque l'expression imaginaire α+β−1 se trouve ramenée à la forme

$$\rho(\cos\theta+-1\sin\theta),$$

la quantité positive ρ est ce qu'on appelle le module de cette expression imaginaire ; et ce qui reste après la suppression du module, c'està-dire le facteur

$$\cos\theta+-1\sin\theta,$$

est ce que nous nommerons l'expression réduite. Comme des quantités α et β supposées connues on ne déduit pour le module ρ qu'une valeur unique déterminée par l'équation (3), il en résulte que le module reste le même pour deux expressions imaginaires égales. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — L'égalité de deux expressions imaginaires entraîne toujours l'égalité des modules et, par conséquent, celle des expressions réduites.

Si l'on compare entre elles deux expressions imaginaires conjuguées, on trouvera encore que leurs modules sont égaux. Le carré du module commun à ces deux expressions ne sera autre chose que leur produit.

Lorsque dans l'expression imaginaire α+β−1 le second terme β s'évanouit, cette expression se réduit à une quantité réelle α. Dans la même hypothèse, on tire des équations (3) et (4): 1 quand α est positif,

$$\rho=\alpha 2,$$

$$\cos\theta=1,\sin\theta=0$$

et, par suite,

$$\theta=\pm 2k\pi,$$

k désignant un nombre entier quelconque ; 2 quand α est négatif,

$$\rho=\alpha 2,$$

$$\cos\theta=-1,\sin\theta=0$$

et, par suite,

$$\theta=\pm(2k+1)\pi.$$

Ainsi le module d'une quantité réelle α n'est autre chose que sa valeur numérique α2, et l'expression réduite qui correspond à une semblable quantité est toujours +1 ou −1, savoir

$$+1=\cos(\pm 2k\pi)+-1\sin(\pm 2k\pi),$$

lorsqu'il s'agit d'une quantité positive, et

$$-1=\cos(\pm 2k+1\overline{\ }\pi)+-1\sin(\pm 2k+1\overline{\ }\pi).$$

lorsqu'il s'agit d'une quantité négative.

Toute expression imaginaire qui a zéro pour module se réduit ellemême à zéro, puisque ses deux termes s'évanouissent. Réciproquement, comme le cosinus et le sinus d'un arc ne deviennent jamais nuls en même temps, il en résulte qu'une expression imaginaire ne peut se réduire à zéro qu'autant que son module s'évanouit.

Toute expression imaginaire qui a l'unité pour module est nécessairement une expression réduite. Ainsi, par exemple,

$$\cos a+-1\sin a,\cos a--1\sin a,-\cos a--1\sin a,-\cos a+-1\sin a$$

sont quatre expressions réduites conjuguées deux à deux. Effectivement, pour tirer ces quatre expressions de la formule

$$\cos\theta+-1\sin\theta,$$

il suffira de poser successivement

$$\theta=\pm 2k\pi+a,\theta=\pm 2k\pi-a,\theta=\pm(2k+1)\pi+a,\theta=\pm(2k+1)\pi-a.$$

k désignant un nombre entier quelconque.

Les calculs relatifs aux expressions imaginaires pouvant être simplifiés par la considération des expressions réduites, il importe de faire connaître les principales propriétés de ces dernières. Ces propriétés sont comprises dans les théorèmes que je vais énoncer.

Théorème II. — Pour multiplier l'une par l'autre deux expressions réduites

$$\cos\theta+-1\sin\theta,\cos\theta'+-1\sin\theta',$$

il suffit d'ajouter les arcs θ et θ′ qui leur correspondent.

Démonstration. — On a, en effet,

Corollaire. — Si dans la formule précédente on fait θ=−θ, on trouvera, comme on devait s'y attendre,

Théorème III. — Pour multiplier les unes par les autres plusieurs expressions réduites

$$\cos\theta+-1\sin\theta,\cos\theta'+-1\sin\theta',\cos\theta''+-1\sin\theta'',\ldots,$$

il suffit d'ajouter les arcs θ,θ′,θ″,... qui leur correspondent.

Démonstration. — En effet, on aura successivement

$$(\cos\theta+-1\sin\theta)(\cos\theta'+-1\sin\theta'),=\cos(\theta+\theta')+-1\sin(\theta+\theta'),(\cos\theta+-1\sin\theta)(\cos\theta'+-1\sin\theta')(\cos\theta''+-1\sin\theta'')=$$
$$[\cos(\theta+\theta'+-1\sin(\theta+\theta')](\cos\theta''+-1\sin\theta'')=\cos(\theta+\theta'+\theta'')+-1\sin(\theta+\theta'+\theta''),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, en continuant de même, on trouvera généralement, quel que soit le nombre des arcs $\theta,\theta',\theta'',\ldots$,

Corollaire. — Si l'on développe par la multiplication immédiate le premier membre de l'équation (7), le développement se composera de deux parties, l'une toute réelle, l'autre ayant pour facteur -1. Cela posé, la partie réelle fournira la valeur de

$$\cos(\theta+\theta'+\theta''+\ldots).$$

et le coefficient de -1 dans la seconde partie la valeur de

$$\sin(\theta+\theta'+\theta''+\ldots).$$

Supposons, par exemple, que l'on considère seulement trois arcs $\theta,\theta',\theta'',\ldots$ L'équation (7) deviendra

$$(\cos\theta+-1\sin\theta)(\cos\theta'+-1\sin\theta')(\cos\theta''+-1\sin\theta'')=\cos(\theta+\theta'+\theta'')+-1\sin(\theta+\theta'+\theta''),$$

et, après avoir développé le premier membre de cette dernière par la multiplication algébrique, on en conclura

$$\cos(\theta+\theta'+\theta'')=\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''-\cos\theta\sin\theta'\sin\theta''-\sin\theta\cos\theta'\sin\theta''-\sin\theta\sin\theta'\cos\theta'',\sin(\theta+\theta'$$
$$+\theta'')=\sin\theta\cos\theta'\cos\theta''+\cos\theta\sin\theta'\cos\theta''+\cos\theta\cos\theta'\sin\theta''+\sin\theta\sin\theta'\sin\theta''.$$

Théorème IV. — Pour diviser l'expression réduite

$$\cos\theta+-1\sin\theta$$

par la suivante

$$\cos\theta'+-1\sin\theta',$$

il suffit de retrancher l'arc θ', qui correspond à la seconde, de l'arc θ correspondant à la première.

Démonstration. — Soit x le quotient cherché, en sorte qu'on ait

$$x=\cos\theta+-1\sin\theta\cos\theta'+-1\sin\theta'.$$

Ce quotient devra être une nouvelle expression imaginaire tellement choisie, que, en la multipliant par $\cos\theta'+-1\sin\theta'$ on reproduise $\cos\theta+-1\sin\theta$. En d'autres termes, x devra satisfaire à l'équation

$$(\cos\theta'+-1\sin\theta')x=\cos\theta+-1\sin\theta.$$

Pour tirer de cette équation la valeur de x, il suffira de multiplier les deux membres par

$$\cos\theta'--1\sin\theta'.$$

On réduira de cette manière le coefficient de x à l'unité (voir le théorème II, corollaire I), et l'on trouvera

$$x=(\cos\theta+-1\sin\theta)(\cos\theta'--1\sin\theta')=(\cos\theta+-1\sin\theta)[\cos(-\theta')+-1\sin(-\theta')]=\cos(\theta-\theta')+-1\sin(\theta-\theta').$$

On aura donc en définitive

Corollaire. — Si dans l'équation (8) on fait $\theta=0$, elle donnera

Théorème V. — Pour élever l'expression imaginaire

$$\cos\theta+-1\sin\theta$$

à la puissance du degré m (m désignant un nombre entier quelconque), il suffit de multiplier dans cette expression l'arc θ par le nombre m.

Démonstration. — En effet, les arcs $\theta,\theta',\theta'',\ldots$ pouvant être quelconques dans la formule (7), si on les suppose tous égaux à l'arc θ et en nombre m, on trouvera

Corollaire. — Si dans l'équation (10) on fait successivement $\theta=z$, $\theta=-z$, on obtiendra les deux suivantes :

Le premier membre de chacune de ces dernières, étant toujours un produit de m facteurs égaux, pourra être développé par la multiplication immédiate de ces facteurs ou, ce qui revient au même, par la formule de Newton. Si, après avoir effectué le développement dont il s'agit, on égale de part et d'autre dans chaque équation : 1 les parties réelles ; 2 les coefficients de −1, on en conclura

On trouvera, par exemple, en supposant m=2,

$$\cos2z=\cos2z-\sin2z,\sin2z=2\sin z\cos z;$$

en supposant m=3,

$$\cos3z=\cos3z-3\cos z\sin2z,\sin3z=3\cos2z\sin z-\sin2z,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème VI. — Pour élever l'expression imaginaire

$$\cos\theta+-1\sin\theta$$

à la puissance du degré −m (m désignant un nombre entier quelconque), il suffit de multiplier dans cette expression l'arc θ par le degré −m.

Démonstration. — En effet, d'après la définition que nous avons donnée des puissances négatives (voir le § I), on aura

$$(\cos\theta+-1\sin\theta)-m=1(\cos\theta+-1\sin\theta)m=1\cos m\theta+-1\sin m\theta.$$

Par suite, en ayant égard à la formule (9), on trouvera

ou, ce qui revient au même,

Après avoir établi, comme nous venons de le faire, les principales propriétés des expressions réduites, il devient facile de multiplier ou de diviser l'une par l'autre deux ou plusieurs expressions imaginaires, quels que soient leurs modules, aussi bien que d'élever une expression imaginaire quelconque à la puissance du degré m ou −m (m désignant un nombre entier). On peut, en effet, exécuter simplement ces diverses opérations à l'aide des théorèmes suivants :

Théorème VII. — Pour obtenir le produit de deux ou de plusieurs expressions imaginaires, il suffit de multiplier le produit des expressions réduites qui leur correspondent par le produit des modules.

Démonstration. — Le théorème énoncé se déduit immédiatement de ce principe, que le produit de plusieurs facteurs réels ou imaginaires reste le même dans quelque ordre qu'on les multiplie. Soient effectivement

$$r(\cos\theta+-1\sin\theta),\ r'(\cos\theta'+-1\sin\theta'),\ r''(\cos\theta''+-1\sin\theta''),\ \ldots$$

plusieurs expressions imaginaires, dont $\rho,\rho',\rho'',\ldots$ désignent les modules. Lorsqu'on voudra multiplier entre elles ces expressions dont chacune est le produit d'un module par une expression réduite, on pourra, en vertu du principe qu'on vient de rappeler, former, d'une part, le produit de tous les modules, de l'autre, celui de toutes les expressions réduites, puis multiplier ces deux derniers produits l'un par l'autre. On trouvera de cette manière pour résultat définitif

Corollaire I. — Le produit de plusieurs expressions imaginaires est une nouvelle expression imaginaire qui a pour module le produit des modules de toutes les autres.

Corollaire II. — Comme une expression imaginaire ne s'évanouit jamais qu'avec son module, et que, pour faire évanouir le produit de plusieurs modules, il faut nécessairement supposer l'un d'eux réduit à zéro, il est clair qu'on peut tirer du théorème VII la conclusion suivante :

Le produit de deux ou de plusieurs expressions imaginaires ne peut s'évanouir qu'autant que l'une d'elles se réduit à zéro.

Théorème VIII. — Pour obtenir le quotient de deux expressions imaginaires, il suffit de multiplier le quotient des expressions réduites qui leur correspondent par le quotient des modules.

Démonstration. — Supposons qu'il s'agisse de diviser l'expression imaginaire

$$r(\cos\theta+-1\sin\theta),$$

dont le module est ρ, par la suivante

$$r'(\cos\theta'+-1\sin\theta'),$$

dont le module est ρ'. Si l'on désigne par x le quotient demandé, x devra être une nouvelle expression imaginaire propre à vérifier l'équation

$$r'(\cos\theta'+-1\sin\theta')x=r(\cos\theta+-1\sin\theta).$$

Pour tirer de cette équation la valeur de x, on multipliera les deux membres par le produit des deux facteurs

$$1r',\cos\theta'--1\sin\theta',$$

et l'on trouvera de cette manière, en écrivant $\rho\rho'$ au lieu de $\rho 1\rho'$,

$$x=rr'[\cos(\theta-\theta')+-1\sin(\theta-\theta')].$$

On aura donc en dernière analyse

et, puisque, en vertu du théorème IV,

$$\cos(\theta-\theta')+-1\sin(\theta-\theta')$$

est précisément le quotient des deux expressions réduites

$$\cos\theta+-1\sin\theta,\cos\theta'+-1\sin\theta',$$

il est clair que, après avoir établi la formule (16), nous devons considérer le théorème VIII comme démontré.

Corollaire. — Si dans l'équation (16) on fait $\theta=0$, elle donnera

Théorème IX. — Pour obtenir la m puissance d'une expression imaginaire (m désignant un nombre entier quelconque), il suffit de multiplier la m puissance de l'expression réduite correspondante par la m puissance du module.

Démonstration. — En effet, si dans le théorème VII on suppose les expressions imaginaires

$$r\ (\cos\theta+-1\sin\theta\ ),r'\ (\cos\theta'+-1\sin\theta'\ ),r''(\cos\theta''+-1\sin\theta''),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

toutes égales entre elles et en nombre m, leur produit sera équivalent à la puissance m de la première, c'est-à-dire à

$$[r(\cos\theta+-1\sin\theta)]_M;$$

et, comme dans cette hypothèse l'expression (15) deviendra

$$r_M(\cos M\theta+-1\sin M\theta),$$

on aura définitivement

L'expression réduite

$$\cos M\theta+-1\sin M\theta$$

étant égale (en vertu du théorème V) à

$$(\cos\theta+-1\sin\theta)_M,$$

il en résulte que, après avoir établi la formule (18), on doit considérer le théorème IX comme démontré.

Théorème X. — Pour élever une expression imaginaire à la puissance du degré –m (m désignant un nombre entier), il suffit de former les puissances semblables du module et de l'expression réduite, puis de multiplier ces deux dernières l'une par l'autre.

Démonstration. — Supposons qu'il s'agisse d'élever à la puissance du degré –m l'expression imaginaire

$$r(\cos\theta+-1\sin\theta),$$

dont le module est ρ. On aura, en vertu de la définition des puissances négatives,

$$[r(\cos\theta+-1\sin\theta)]-_M=1[r(\cos\theta+-1\sin\theta)]_M=1r_M(\cos M\theta+-1\sin M\theta).$$

Par suite, en ayant égard à la formule (17), on trouvera

$$[r(\cos\theta+-1\sin\theta)]-m=1rm(\cos m\theta--1\sin m\theta)$$

ou, ce qui revient au même,

Cette dernière formule réunie à l'équation (13) fournit la démonstration complète du théorème X.

§ III. — Sur les racines réelles ou imaginaires des deux quantités +1, −1, et sur leurs puissances fractionnaires.

Supposons que l'on désigne par m et n deux nombres entiers premiers entre eux. Si l'on fait usage des notations adoptées dans le § I, les racines n de l'unité, ou, ce qui revient au même, ses puissances du degré 1n seront les diverses valeurs de l'expression

$$1n=((1))1n;$$

et, de même, les puissances fractionnaires de l'unité, positives ou négatives, du degré mn ou −mn, seront les diverses valeurs de

$$((1))mnou((1))-mn.$$

On en conclura que, pour déterminer ces racines et ees puissances, il suffit de résoudre, l'un après l'autre, les trois problèmes suivants.

Problème I. — Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression

$$((1))1n.$$

Solution. — Soit x l'une de ces valeurs ; et, afin de la présenter sous la forme générale qui comprend à la fois toutes les quantités réelles et toutes les expressions imaginaires, supposons

r désignant une quantité positive, et t un arc réel. On aura, d'après la définition même de l'expression ((1))1n,

ou, ce qui revient au même,

$$rn(\cos nt+-1\sin nt)=1.$$

On tirera de cette dernière équation (à l'aide du théorème I, § II)

$$rn=1,$$

$$\cos nt+-1\sin nt=1,$$

et, par suite,

$$r=1,$$

$$\cos nt=1,\sin nt=0,nt=\pm 2k\pi,$$

$$t=\pm 2k\pi n,$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités r et t étant ainsi déterminées, les diverses valeurs propres à vérifier l'équation (1) seront évidemment comprises dans la formule

En d'autres termes, les diverses valeurs de ((1))1n seront données par l'équation

Soit maintenant h le nombre entier le plus rapproché du rapport kn. La différence entre les deux nombres h, kn sera tout au plus égale à 12, en sorte qu'on aura

$$kn=h\pm k'n,$$

k′n désignant une fraction égale ou inférieure à 12, et, par suite, k′ un nombre entier inférieur ou tout au plus égal à n2. On en conclura

$$2k\pi n=2h\pi\pm 2k'\pi n,$$

$$\cos 2k\pi n\pm -1\sin 2k\pi n=\cos 2k'\pi n\pm -1\sin 2k'\pi n.$$

Par conséquent, toutes les valeurs de ((1))1n seront comprises dans la formule

$$\cos 2k'\pi n\pm -1\sin 2k'\pi n,$$

si l'on y suppose k′ renfermé entre les limites 0,n2, ou, ce qui revient au même, dans la formule (3), si l'on y suppose k renfermé entre les mêmes limites.

Corollaire I. Lorsque n est pair, les diverses valeurs que le nombre entier k peut recevoir, sans sortir des limites 0,n2, sont respectivement

$$0,1,2,\ldots,n-22,n2.$$

Pour chacune de ces valeurs de k, la formule (3) fournit en général deux valeurs imaginaires conjuguées de l'expression ((1))1n, c'est-à-dire deux racines imaginaires de l'unité conjuguées et du degré n. Seulement, on trouve, pour k=0, une racine réelle +1, et, pour k=n2, une autre racine réelle −1. En résumé, lorsque n est pair, l'expression

$$((1))1n$$

admet deux valeurs réelles, savoir

$$+1,-1,$$

avec n−2 valeurs imaginaires conjuguées deux à deux, savoir

Le nombre total de ces valeurs réelles ou imaginaires est égal à n.

Supposons, par exemple, n=2. On trouvera qu'il existe deux valeurs de l'expression

$$((1))12,$$

ou, ce qui revient au même, deux valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x2=1,$$

et que ces valeurs, toutes deux réelles, sont respectivement

$$+1,-1.$$

Supposons encore n=4. On trouvera qu'il existe quatre valeurs de l'expression

$$((1))14,$$

ou, ce qui revient au même, quatre valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x4=1.$$

Parmi ces quatre valeurs, deux sont réelles, savoir

$$+1,-1.$$

Les deux autres sont imaginaires et respectivement égales, la première à

$$cosπ2+-1sinπ2=+-1,$$

la seconde à

$$cosπ2--1sinπ2=--1.$$

Corollaire II. — Lorsque n est impair, les diverses valeurs que le nombre entier k peut recevoir, sans sortir des limites 0,n2, sont respectivement

$$0,1,3,...,n-12.$$

Pour chacune de ces valeurs de k, la formule (3) fournit en général deux valeurs imaginaires conjuguées de l'expression ((1))1n, c'est-à-dire deux racines imaginaires conjuguées et du degré n. Seulement, on trouve, pour k=0, une racine unique et réelle, savoir +1. En résumé, lorsque n est impair, l'expression

$$((1))1n$$

admet, avec la seule valeur réelle

$$+1,$$

n−1 valeurs imaginaires conjuguées deux à deux, savoir

Le nombre total de ces valeurs réelles ou imaginaires est égal à n.

Supposons, par exemple, n=3. On trouvera qu'il existe trois valeurs de l'expression

$$((1))13,$$

ou, ce qui revient au même, trois valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x3=1,$$

et que ces valeurs, dont une est réelle, sont respectivement

$$+1,$$

$$cos2π3+-1sin2π3,cos2π3--1sin2π3.$$

De plus, le côté de l'hexagone étant, comme on sait, égal au rayon, et le supplément de l'arc sous-tendu par ce côté ayant pour mesure 2π3, on obtiendra facilement les équations

$$cos2π3=-12,sin2π3=+3122,$$

en vertu desquelles les valeurs imaginaires de l'expression ((1))12 se réduisent à

$$-12+3122-1,-12-3122-1.$$

Corollaire III. — n désignant un nombre entier quelconque, le nombre des valeurs, soit réelles, soit imaginaires, de l'expression ((1))1n, ou, ce qui revient au même, le nombre des valeurs de x propres à vérifier l'équation xn=1 restera toujours égal à n.

Problème II. — Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression

$$((1))_{MN}.$$

Solution. — Les nombres m et n étant supposés premiers entre eux, on aura, d'après la définition même de l'expression ((1))mn,

$$((1))_{MN}=[((1))_{1N}]_{M};$$

puis, en remettant pour ((1))1n sa valeur générale tirée de l'équation (3), on trouvera

$$((1))_{MN}=[\cos 2K\Pi N\pm -1\sin 2K\Pi N]_{M}$$

et, par suite,

Pour déduire de cette dernière formule toutes les valeurs de ((1))mn, il ne reste qu'à donner successivement à k toutes les valeurs entières comprises entre 0 et n2. Soient k′,k″ deux de ces valeurs supposées inégales. Je dis que les cosinus

$$\cos M.2K'\Pi N,\cos M.2K''\Pi N$$

seront nécessairement différents l'un de l'autre. En effet, ces cosinus ne pourraient devenir égaux que dans le cas où les arcs qui leur correspondent seraient liés entre eux par une équation de la forme

$$M.2K'\Pi N=2H\Pi\pm M.2K''\Pi N,$$

h désignant un nombre entier. Or on tire de cette équation

$$H=M(\pm K'\pm K'')N.$$

Il faudrait donc, puisque m est premier à n, que ±k′±k″ fut divisible par n, ce qu'on ne saurait admettre, attendu que, les nombres k′,k″ étant inégaux, et chacun d'eux ne pouvant surpasser 12n, leur somme ou leur différence est nécessairement inférieure à n. Ainsi, deux valeurs différentes de k comprises entre les limites 0 et 12n fournissent deux valeurs différentes de

$$\cos M.2K\Pi N.$$

On conclut aisément de cette remarque, que les valeurs réelles ou imaginaires de l'expression ((1))mn données par l'équation (6) sont en même nombre que les valeurs réelles ou imaginaires de ((1))1n déterminées par l'équation (3). De plus, comme on a évidemment

$$(\cos M.2K\Pi N\pm -1\sin M.2K\Pi N)N=\cos(M.2K\Pi)\pm\sin(M.2K\Pi)=1,$$

il en résulte que toute valeur de ((1))mn est une expression réelle ou imaginaire dont la puissance n équivaut à l'unité, par conséquent une valeur de ((1))1n. Ces observations conduisent à la

formule

dans laquelle le signe = indique seulement que l'une des valeurs du premier membre est toujours égale à l'une des valeurs du second.

Problème III. — Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression

$$((1))^{-mn}.$$

Solution. — On aura, d'après la définition des puissances négatives,

$$((1))^{-mn}=1((1))^{mn},$$

puis, en remettant pour ((1))mn sa valeur générale tirée de l'équation (6), et ayant égard à la formule (9) du paragraphe précédent,

Il suit de cette dernière équation que les diverses valeurs de ((1))−mn sont les mêmes que celles de ((1))mn et par conséquent égales à celles de ((1))1n. On a donc

le signe = devant être interprété comme dans l'équation (7).

Corollaire. — Si l'on fait m=1, la formule (9) donnera

Supposons maintenant que l'on cherche les racines et puissances fractionnaires, non plus de l'unité, mais de la quantité −1. Les racines n de cette quantité, ou, ce qui revient au même, ses puissances du degré 1n, seront les diverses valeurs de l'expression

$$-1^{n}=((-1))^{1n};$$

et de même, les puissances fractionnaires de −1, positives ou négatives, du degré mn ou −mn, seront les diverses valeurs de

$$((-1))^{mn} \text{ ou } ((-1))^{-mn}.$$

En conséquence, pour déterminer ces racines et ces puissances, il suffira de résoudre l'un après l'autre les trois nouveaux problèmes que je vais énoncer.

Probleme IV. — Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression

$$((-1))^{1n}.$$

Solution. — Soit

l'une de ces valeurs, r désignant une quantité positive, et t un arc réel. On aura, d'après la définition même de l'expression ((−1))1n,

ou, ce qui revient au même,

$$r^{n}(\cos nt+-1\sin nt)=-1.$$

On tirera de cette dernière équation (à l'aide du théorème I, § II),

$$r^{n}=1,$$

$$\cos nt+-1\sin nt=-1.$$

et, par suite,

$$r=1,$$

$$\cos nt=-1,\sin nt=0,nt=\pm(2k+1)\pi,$$

$$t=\pm(2k+1)\pi n,$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités r et t étant ainsi déterminées, les diverses valeurs de x propres à vérifier l'équation (11) se trouveront évidemment comprises dans la formule

En d'autres termes, les diverses valeurs de $((-1))1n$ seront données par l'équation

Soit maintenant h le nombre entier le plus rapproché du rapport $2k+12n$. La différence entre les deux nombres $h,2k+1n$ sera évidemment une fraction de numérateur impair, inférieure ou tout au plus égale à 12; en sorte qu'on aura

$$2k+12n=h\pm2k'+12n,$$

$2k'+1$ désignant un nombre impair égal ou inférieur à n. On en conclura

$$(2k+1)\pi n=2h\pi\pm(2k'+1)\pi n,$$

$$\cos(2k+1)\pi n\pm-1\sin(2k+1)\pi n=\cos(2k'+1)\pi n\pm-1\sin(2k'+1)\pi n.$$

Par conséquent toutes les valeurs de $((-1))1n$ seront comprises dans la formule

$$\cos(2k'+1)\pi n\pm-1\sin(2k'+1)\pi n,$$

si l'on y suppose $2k'+1$ renfermé entre les limites 0,n, ou, ce qui revient au même, dans la formule (13), si l'on y suppose $2k+1$ renfermé entre les mêmes limites.

Corollaire I. — Lorsque n est pair, les diverses valeurs que $2k+1$ peut recevoir, sans sortir des limites 0,n, sont respectivement

$$1,3,5,\ldots,\overline{n-1}.$$

Pour chacune de ces valeurs de $2k+1$, la formule (13) fournit toujours deux valeurs imaginaires conjuguées de l'expression $((-1))1n$. Par suite, cette expression, dans le cas que nous considérons ici, n'admet point de valeurs réelles, mais seulement n valeurs imaginaires conjuguées deux à deux, savoir :

Supposons, par exemple, n=2. On trouvera qu'il existe deux valeurs de l'expression $((-1))12$, ou, ce qui revient au même, deux valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x2=-1,$$

et que ces valeurs, toutes deux imaginaires, sont respectivement

$$\cos\pi2+-1\sin\pi2=+-1,\cos\pi2--1\sin\pi2=--1.$$

Supposons encore n=4. On verra qu'il existe quatre valeurs de l'expression $((-1))14$, ou, en d'autres termes, quatre valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x4=-1;$$

et que ces quatre valeurs sont comprises dans les deux formules

$$\cos\pi 4\pm-1\sin\pi 4,\cos 3\pi 4\pm-1\sin 3\pi 4,$$

ou, ce qui revient au même, dans la seule formule

$$\pm\cos\pi 4\pm-1\sin\pi 4.$$

Comme on a d'ailleurs

$$\cos\pi 4=\sin\pi 4=12,$$

on trouvera définitivement

$$((-1))14=\pm 1212\pm 1212-1.$$

Corollaire II. — Lorsque n est impair, les diverses valeurs que 2k+1 peut recevoir sans sortir des limites 0 et n sont respectivement

$$1,3,5,\ldots,n-2,n.$$

Pour chacune de ces valeurs de 2k+1, la formule (13) fournit en général deux valeurs imaginaires conjuguées de l'expression ((−1))1n, c'est-à-dire deux racines imaginaires de −1 conjuguées et du degré n. Seulement on trouve, pour 2k+1=n, une racine unique et réelle, savoir −1. En résumé, lorsque n est impair, l'expression ((−1))1n admet, avec la seule valeur réelle

$$-1,$$

n−1 valeurs imaginaires conjuguées deux à deux, savoir

Le nombre total de ces valeurs réelles ou imaginaires est égal à n.

Supposons, par exemple, n=3. On trouvera qu'il existe trois valeurs de l'expression ((−1))13, ou, ce qui revient au même, trois valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x3=-1,$$

et que ces valeurs, dont une est réelle, sont respectivement

$$-1,$$

$$\cos\pi 3+-1\sin\pi 3=12+3122-1,\cos\pi 3--1\sin\pi 3=12-3122-1.$$

Corollaire III. — n désignant un nombre entier quelconque, le nombre des valeurs, soit réelles, soit imaginaires, de l'expression ((−1))1n, ou, ce qui revient au même, le nombre des valeurs de x propres à vérifier l'équation xn=−1, restera toujours égal à n.

Problème V. — Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression

$$((-1))mn.$$

Solution. — Les nombres m et n étant supposés premiers entre eux, on aura, d'après la définition même de l'expression ((-1))^\frac mn,

$$((-1))_{MN}=[((-1))_{1N}]_M;$$

puis, en remettant pour $((-1))_{1n}$ sa valeur générale tirée de l'équation (13), on trouvera

Pour déduire de cette dernière formule toutes les valeurs de $((-1))_{mn}$, il ne reste qu'à donner successivement à $2k+1$ toutes les valeurs entières et impaires comprises entre 0 et n. Soient $2k'+1, 2k''+1$ deux de ces valeurs supposées inégales. Je dis que les cosinus

$$\cos m(2k'+1)\frac{\pi}{n}, \cos m(2k''+1)\frac{\pi}{n}$$

seront nécessairement différents l'un de l'autre. En effet, ces cosinus ne pourraient devenir égaux que dans le cas où les arcs qui leur correspondent seraient liés entre eux par une équation de la forme

$$m(2k'+1)\frac{\pi}{n}=\pm 2h\pi\pm m(2k''+1)\frac{\pi}{n},$$

h désignant un nombre entier. Or on tire de cette équation

$$h=m\left[\pm(2k'+1)\pm(2k''+1)2\right]_n.$$

Il faudrait donc, puisque m est premier à n, que le nombre entier

$$\pm(2k'+1)\pm(2k''+1)2$$

fût divisible par n, ce qu'on ne saurait admettre, attendu que, les nombres $2k'+1, 2k''+1$ étant inégaux, et chacun d'eux ne pouvant surpasser n, leur demi-somme, et, à plus forte raison ; leur demi-différence, est nécessairement inférieure à n. Ainsi deux valeurs différentes de $2k+1$ comprises entre les limites 0 et n fournissent deux valeurs différentes de

$$\cos m(2k+1)\frac{\pi}{n}.$$

On conclut aisément de cette remarque que les valeurs réelles ou imaginaires de l'expression $((-1))_{mn}$ données par l'équation (16) sont au nombre de n, comme celles de $((1))_{1n}$ et de $((-1))_{1n}$. De plus, comme on a évidemment

$$\left[\cos m(2k+1)\frac{\pi}{n}\pm -1\sin m(2k+1)\frac{\pi}{n}\right]_n=\cos m(2k+1)\pi\pm -1\sin m(2k+1)\pi=(-1)_m=\pm 1,$$

il en résulte que toute valeur de $((-1))_{mn}$ est une expression réelle ou imaginaire dont la puissance n équivaut à ± 1, par conséquent, une valeur de $((1))_{1n}$ ou de $((-1))_{1n}$. Cette remarque conduit à l'équation

toutes les fois que $(-1)_m=1$, c'est-à-dire toutes les fois que m est un nombre pair, et à la suivante

lorsque $(-1)_m=-1$, c'est-à-dire lorsque m est un nombre impair. Ajoutons que l'on peut comprendre les équations (17) et (18) dans une seule formule, en écrivant

Probleme VI. — Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression

$$((-1))_{-mn}.$$

Solution. — On aura, d'après la définition des puissances négatives,

$$((-1))_{-mn}=1((-1))_{mn};$$

puis, en remettant pour ((−1))mn sa valeur générale tirée de l'équation (16), et ayant égard à la formule (9) du paragraphe précédent,

Il suit de cette dernière équation que les diverses valeurs de ((−1))−mn sont les mêmes que celles de ((1))mn; on aura en conséquence

Àla place des deux formules qui précèdent, on peut se contenter d'écrire la suivante :

Corollaire. — Si l'on fait m=1, la formule (23) donnera

En terminant ce paragraphe, nous ferons remarquer que les équations (3), (6), (8), (13), (16) et (20), à l'aide desquelles on détermine les valeurs des expressions

$$((1))^{1n},((1))^{mn},((1))^{-mn},((-1))^{1n},((-1))^{mn},((-1))^{-mn},$$

peuvent être remplacées par deux formules. En effet, si l'on désigne par a une quantité positive ou négative dont la valeur numérique soit fractionnaire, la valeur de ((1))a déterminée par l'équation (3), (6) ou (8) sera évidemment

tandis que la valeur de ((−1))a déterminée par l'équation (13), (16) ou (20) sera

Dans les deux formules précédentes, on peut prendre pour k un nombre entier quelconque.

§ IV. — Sur les racines des expressions imaginaires et sur leurs puissances fractionnaires et irrationnelles.

Soit

$$\alpha+\beta-1$$

une expression imaginaire quelconque. On pourra toujours trouver (voir le § II) une valeur positive de ρ et une infinité de valeurs réelles de θ propres à vérifier l'équation

Cela posé, concevons que l'on désigne par m et n deux nombres entiers premiers entre eux. Si l'on fait usage des notations adoptées dans le § I, les racines n de l'expression α+β−1, ou, ce qui revient au même, ses puissances du degré 1n, seront les diverses valeurs de

$$\alpha+\beta-1^{1n}=((\alpha+\beta-1))^{1n};$$

et, de même, les puissances fractionnaires de α+β−1 positives ou négatives, du degré mn ou, −mn, seront les diverses valeurs de

$$((\alpha+\beta-1))^{mn} \text{ ou } ((\alpha+\beta-1))^{-mn}.$$

En conséquence, pour déterminer ces racines et ces puissances, il suffira de résoudre l'un après l'autre les trois problèmes suivants :

Problème I. — Trouver les diverses valeurs de l'expression

$$((\alpha+\beta-1))^{1n}.$$

Solution. — Soit

l'une de ces valeurs, r désignant une quantité positive et t un arc réel.

On aura, d'après la définition même de l'expression ((α+β−1))1n,

ou, ce qui revient au même,

$$rn(\cos nt+-1\sin nt)=p(\cos\theta+-1\sin\theta).$$

On tirera de cette dernière équation, à l'aide du théorème I, § II,

$$rn=p,$$

$$\cos nt+-1\sin nt=\cos\theta+-1\sin\theta$$

et, par suite,

$$r=p1n,$$

$$\cos nt=\cos\theta,\sin nt=\sin\theta,nt=\theta\pm 2k\pi,$$

$$t=\theta\pm 2k\pi n,$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités r et t étant ainsi déterminées, les diverses valeurs de x propres à vérifier l'équation (1) seront évidemment comprises dans la formule

ou, ce qui revient au même, dans la suivante :

En d'autres termes, l'expression ((α+β−1))1n, aussi bien que ((1))1n, admettra n valeurs différentes déterminées par l'équation

Corollaire I. — Supposons n=2; on trouvera qu'il existe deux valeurs de l'expression

$$((a+b-1))12,$$

ou, ce qui revient au même, deux valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x2=a+b-1=p(\cos\theta+-1\sin\theta).$$

et que ces deux valeurs sont comprises dans la formule

$$\pm p12(\cos\theta 2+-1\sin\theta 2).$$

Corollaire II. — Supposons encore n=3; on trouvera qu'il existe trois valeurs de l'expression

$$((a+b-1))13,$$

ou, ce qui revient au même, trois valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x3=a+b-1=p(\cos\theta+-1\sin\theta).$$

et que ces deux valeurs sont respectivement

$$p13(\cos\theta 3+-1\sin\theta 3),p13(\cos\theta 3+-1\sin\theta 3)(\cos 2\pi 3+-1\sin 2\pi 3)=p13(\cos\theta+2\pi 3+-1\sin\theta+2\pi 3),p13(\cos\theta 3+-1\sin\theta 3)(\cos 2\pi 3--1\sin 2\pi 3)=p13(\cos\theta-2\pi 3+-1\sin\theta-2\pi 3).$$

Corollaire III. — Supposons enfin n=4; on trouvera qu'il existe quatre valeurs de l'expression

$$((a+b-1))14,$$

ou, ce qui revient au même, quatre valeurs de x propres à vérifier l'équation

$$x4=a+b-1=p(\cos\theta+-1\sin\theta),$$

et que ces quatre valeurs sont comprises dans les deux formules

$$\pm p14(\cos\theta4+-1\sin\theta4),\pm p14(\cos\theta4--1\sin\theta4).$$

Problème II. — Trouver les diverses valeurs de l'expression

$$((a+b-1))mn.$$

Solution. — Les nombres m et n étant supposés premiers entre eux, on aura, d'après la définition même de l'expression ((α+β−1))mn,

$$((a+b-1))mn=[((a+b-1))1n]m;$$

puis, en remettant pour ((α+β−1))1n sa valeur générale tirée de l'équation (4), on trouvera

Corollaire I. — Si dans l'équation (5) on remet pour ((1))mn sa valeur tirée de la formule (6) (§ III), on obtiendra la suivante :

Problème III. — Trouver les diverses valeurs de l'expression

$$((a+b-1))-mn.$$

Solution. — On aura, d'après la définition même des puissances négatives,

$$((a+b-1))-mn=1((a+b-1))mn;$$

puis, en remettant pour ((α+β−1))mn sa valeur tirée de l'équation (6), et ayant égard à la formule (17) du § II, on trouvera

$$((a+b-1))-mn=p-mn[\cos m(\theta\pm2k\pi)n--1\sin m(\theta\pm2k\pi)n]=p-mn(\cos m\theta n--1\sin m\theta n)(\cos m.2k\pi n\mp -1\sin m.2k\pi n)$$

ou, en d'autres termes,

Corollaire I. — Si l'on fait m=1, l'équation (7) donnera

Après avoir fixé, comme on vient de le faire, les diverses valeurs des quatre expressions

$$((a+b-1))1n,((a+b-1))mn,((a+b-1))-1n,((a+b-1))-mn,$$

on reconnaîtra sans peine que les équations (4), (5), (8) et (7), à l'aide desquelles on détermine ces valeurs, peuvent être remplacées par une seule formule. Si l'on représente par a une quantité positive ou négative dont la valeur numérique soit fractionnaire, la formule dont il s'agit sera

Dans les calculs qui précèdent, ρ désigne toujours le module de l'expression imaginaire α+β−1, c'est-à-dire la quantité positive α2+β2, et θ l'un quelconque des arcs propres à vérifier l'équation (1) ou, ce qui revient au même, les équations (4) du § II, savoir

En divisant ces deux dernières l'une par l'autre, on en conclura

Par suite, si l'on nomme ζ le plus petit arc, abstraction faite du signe, qui ait pour tangente βα, ou, en d'autres termes, si l'on fait

on trouvera

Cela posé, il deviendra facile d'introduire au lieu de l'arc θ, dans les diverses formules rapportées plus haut, l'arc ζ, dont la valeur est complètement déterminée. On y parviendra, en effet, par les considérations suivantes.

Les arcs θ et ζ, ayant la même tangente, auront aussi, abstraction faite du signe, le même sinus et le même cosinus ; et, comme d'ailleurs l'équation (13) peut se mettre sous la forme

$$\sin\theta\cos\theta=\sin z\cos z,$$

il est clair que, pour y satisfaire, on devra poser en même temps ou

ou bien

De plus, la valeur de cosθ déterminée par la première des équations (10) étant évidemment de même signe que α, tandis que l'arc ζ compris entre les limites $-\pi 2,+\pi 2$ toujours un cosinus positif, il en résulte que, des équations (14) et (15), les deux premières subsisteront, si α est positif, et les deux dernières, si α est négatif. Voyons maintenant à quoi se réduisent, dans ces deux hypothèses, les formules (1) et (9).

Si d'abord on suppose α positif, les équations (10) pourront être remplacées par les équations (14), et l'on déduira de celles-ci une infinité de valeurs de θ, parmi lesquelles on doit remarquer la suivante :

Lorsqu'on fait usage de cette valeur, les formules (1) et (9) deviennent respectivement

Si l'on suppose en second lieu α négatif, les équations (10) pourront être remplacées par les équations (15), desquelles on déduira, entre autres valeurs de θ,

Par suite, on pourra, dans cette hypothèse, aux formules (1) et (9) substituer celles qui suivent :

Si l'on fait en particulier $\alpha+\beta-1=-1$, c'est-à-dire $\alpha=-1$, $\beta=0$, on trouvera

$$z=\operatorname{arctang} 0-1=0,$$

et la formule (21) deviendra

Il en résulte qu'on aura généralement dans l'hypothèse admise

En réunissant aux formules (17), (18), (20) et (23) les équations (25) et (26) du § III, on obtiendra définitivement les conclusions suivantes.

Soient $\alpha+\beta-1$ une expression imaginaire quelconque, a une quantité positive ou négative dont la valeur numérique soit fractionnaire, et k un nombre entier choisi arbitrairement. Si l'on fait, de plus,

on aura, pour des valeurs positives de α,

et, pour des valeurs négatives de α,

On doit ajouter que, si l'on désigne par n le dénominateur de la fraction la plus simple qui représente la valeur numérique de a, n sera précisément le nombre des valeurs distinctes de chacune des expressions

$$((1))_A,((-1))_A,((A+B-1))_A,$$

et que, pour déduire ces mêmes valeurs des formules (25) et (26), il suffira d'y substituer successivement, au lieu de 2k et de 2k+1, tous les nombres entiers qui ne sortent pas des limites 0 et n.

Si la valeur numérique de a devenait irrationnelle, chacune des expressions réduites

$$\cos 2k\pi \pm -1 \sin 2k\pi,$$

$$\cos(2k+1\overline{\ }\pi) \pm -1 \sin(2k+1\overline{\ }\pi),$$

aurait un nombre indéfini de valeurs correspondantes aux diverses valeurs entières de k; et, par suite, on ne pourrait plus admettre dans le calcul les notations

$$((1))_A,((-1))_A,((A+B-1))_A,$$

à moins de considérer chacune d'elles comme propre à représenter une infinité d'expressions imaginaires distinctes les unes des autres. Pour éviter cet inconvénient, nous n'emploierons jamais les notations dont il s'agit que dans le cas où la valeur numérique de a sera fractionnaire.

Parmi les diverses valeurs de ((1))a, il en est une toujours réelle et positive, savoir, +1, que l'on indique par la notation (1)a ou 1a, en faisant usage de parenthèses simples, ou même les supprimant entièrement. Si l'on substitue cette valeur particulière de ((1))a dans la seconde des équations (25), on obtiendra une valeur correspondante de

$$((A+B-1))_A,$$

que l'analogie nous porte à indiquer, à l'aide de parenthèses simples, par la notation

$$(A+B-1)_A.$$

C'est ce que nous ferons désormais. Par suite, on aura, en supposant α positif, et les quantités ρ,ζ déterminées par les équations (24),

Cette dernière équation ayant lieu toutes les fois que la valeur numérique de a est entière ou fractionnaire, l'analogie nous conduit encore à la considérer comme vraie dans le cas où cette valeur numérique devient irrationnelle. En conséquence, nous conviendrons de désigner par

$$(A+B-1)_A$$

le produit ρa(cosaζ+−1sinaζ), dans le cas où a sera positif, quelle que soit la valeur réelle attribuée à la quantité a. En d'autres termes, si l'on désigne par ζ un arc compris entre les limites $-\pi 2,+\pi 2$, on aura, quel que soit a,

$$[\rho(\cos z+-1\sin z)]_A=\rho_A(\cos az+-1\sin az).$$

Si dans l'équation précédente on fait ρ=1, elle deviendra

Cette dernière formule est entièrement semblable aux équations (10) et (14) du § II, avec cette seule différence qu'elle subsiste uniquement pour des valeurs de comprises entre les limites

$-\pi 2, +\pi 2$, tandis que les équations dont il s'agit s'étendent à des valeurs quelconques de θ.

Lorsque la quantité α devient négative, on ne voit plus, même en supposant fractionnaire la valeur numérique de a, quelle est celle des valeurs de l'expression $((\alpha+\beta-1))a$ que l'on pourrait distinguer des autres et désigner par la notation

$$(a+b-1)a.$$

Mais alors, $-\alpha$ étant une quantité positive, il est facile d'établir, pour des valeurs quelconques de a, la formule

Nous terminerons ce paragraphe en faisant observer que, dans le cas où la valeur numérique de a devient fractionnaire, les formules (27) et (29) réduisent les équations (18) et (23) à celles qui suivent

l'équation (30) ayant lieu seulement pour des valeurs positives de la quantité \alpha, et l'équation (31) pour des valeurs négatives de la même quantité.

§ V. — Applications des principes établis dans les paragraphes précédents.

Nous allons appliquer les principes établis dans les précédents paragraphes à la résolution de trois problèmes sur les sinus et cosinus.

Probleme I. — Transformer sinmz et cosmz (m désignant un nombre entier quelconque) en un polynôme ordonné suivant les puissances ascendantes et entières de sinz, ou du moins en un produit formé par la multiplication d'un semblable polynôme et de cosz.

Solution. — Lorsque dans les équations (12) du § II on remplace les puissances paires de cosz par des puissances entières de $1-\sin 2z$, ces équations deviennent, pour des valeurs paires de m,

$$\cos mz=(1-\sin 2z)^m 2-m(m-1)1.2(1-\sin 2z)^m-2 2\sin 2z+m(m-1)(m-2)$$
$$(m-3)1.2.3.4(1-\sin 2z)^m-4 2\sin 4z-\ldots, \sin mz=\cos z[m1(1-\sin 2z)^m-2 2\sin z-m(m-1)$$
$$(m-2)1.2.3(1-\sin 2z)^m-4 2\sin 3z+\ldots].$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$\cos mz=\cos z[(1-\sin 2z)^m-1 2-m(m-1)1.2(1-\sin 2z)^m-3 2\sin 2z+m(m-1)(m-2)(m-3)1.2.3.4(1-\sin 2z)^m-5 2-$$
$$\sin 4z-\ldots], \sin mz=m1(1-\sin 2z)^m-1 2\sin z-m(m-1)(m-2)1.2.3(1-\sin 2z)^m-3 2\sin 3z+\ldots.$$

Si l'on développe les seconds membres des quatre formules précédentes, ou du moins les coefficients de cosz dans ces seconds menibres, en polynômes ordonnés suivant les puissances ascendantes et entières de sinz, on trouvera, pour des valeurs paires de m, m

et, pour les valeurs impaires de m,

Les équations (1) et (2) comprennent évidemment la solution de la question proposée. Il ne reste plus qu'à les présenter sous la forme la plus simple. Pour y parvenir, il suffira d'observer que le coefficient de chaque puissance entière de sinz renferme généralement une somme de fractions à laquelle l'équation (5) du Chapitre IV (§ III) permet de substituer une fraction unique. Par suite de cette réduction, les développements de cosmz et de sinmz deviendront, pour des valeurs paires de m,

et

et, pour des valeurs impaires de m,

Corollaire I. — Si dans l'équation (3) on fait successivement

$$m=2, m=4, m=6, \ldots,$$

on obtiendra les suivantes :

Corollaire II. — Si dans l'équation (6) on fait successivement

$$m=1, m=3, m=5, \ldots,$$

on en tirera

Problème II. — Transformer sinmz et cosmz (m désignant un nombre entier quelconque) en un polynôme ordonné suivant les puissances ascendantes et entières de cosz, ou du moins en un produit formé par la multiplication d'un semblable polynôme et de sinz.

Solution. — Pour obtenir les formules qui résolvent la question proposée, il suffit de remplacer, dans les équations W(3), W(4), (5) et (6), z par $\pi 2 - z$, et d'observer en outre qu'on a, pour des valeurs paires de m,

$$\cos(m\pi 2 - mz) = (-1)m2\cos mz, \sin(m\pi 2 - mz) = (-1)m2 + 1\sin mz;$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$\cos(m\pi 2 - mz) = (-1)m - 12\sin mz, \sin(m\pi 2 - mz) = (-1)m - 12\cos mz.$$

On trouvera de cette manière, si m est un nombre pair,

et, si m est un nombre impair,

Corollaire I. — Si dans la formule (9) on fait successivement

$$m=2, m=4, m=6, \ldots,$$

on obtiendra les suivantes :

Corollaire II. — Si dans l'équation (12) on fait successivement

$$m=1, m=3, m=5, \ldots,$$

on en conclura

Problème III. — Exprimer les puissances entières de sinz et de cosz en fonction linéaire des sinus et cosinus des arcs z,2z,3z,....

Solution. — On résout facilement ce problème, en ayant égard aux propriétés des deux expressions imaginaires conjuguées

$$\cos z + -1\sin z, \cos z - -1\sin z.$$

Si l'on désigne la première par u, et la seconde par v, on aura

$$2\cos z = u + v, 2 - 1\sin z = u - v.$$

En élevant les deux membres de chacune des équations précédentes à la puissance entière du degré m, les divisant ensuite par 2 ou par 2−1, puis effectuant les réductions indiquées par les formules

$$uv=1,$$

$$un+vn2=cosnz,un-vn2-1=sinnz,$$

dont les deux dernières subsistent pour des valeurs entières quelconques de n, on trouvera, si m représente un nombre pair,

et, si m représente un nombre impair,

Corollaire I. — Si dans la formule (15) on fait successivement

$$m=2,m=4,m=6,...,$$

on en conclura

On arriverait aux mêmes équations, si l'on cherchait à déduire des formules (13) les valeurs successives de

$$cos2z,cos4z,cos6z,...$$

en fonctions linéaires de

$$cos2z,cos4z,cos6z,....$$

Corollaire II. — Si dans la formule (16) on fait successivement

$$m=2,m=4,m=6,...,$$

on obtiendra les équations

que l'on pourrait également déduire des formules (7), par l'élimination des quantités

$$sin2z,sin4z,sin6z,....$$

Corollaire III. — Si dans la formule (17) on fait successivement

$$m=1,m=3,m=5,...,$$

on en conclura

On arriverait aux mêmes équations, si l'on cherchait à déduire des formules (14) les valeurs successives de

$$cosz,cos3z,cos5z,...$$

en fonctions linéaires de

$$cosz,cos3z,cos5z,....$$

Corollaire IV. — Si dans la formule (18) on fait successivement

$$m=1,m=3,m=5,...,$$

on obtiendra les équations

que l'on pourrait également déduire des formules (8) par l'élimination des quantités

$$\sin z, \sin 3z, \sin 5z, \ldots.$$

Chapitre VIII

DES VARIABLES ET DES FONCTIONS IMAGINAIRES.

Lorsqu'on suppose variables les deux quantités réelles u,v, ou au moins l'une d'entre elles, l'expression

$$u+v\sqrt{-1}$$

est ce qu'on appelle une variable imaginaire. Si, de plus, la variable u converge vers la limite U et la variable v vers la limite V,

$$U+V\sqrt{-1}$$

sera la limite vers laquelle converge l'expression imaginaire

$$u+v\sqrt{-1}.$$

Lorsque les constantes ou variables comprises dans une fonction donnée, après avoir été considérées comme réelles, sont ensuite supposées imaginaires, la notation à l'aide de laquelle on exprimait la fonction dont il s'agit ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu de conventions nouvelles propres à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse. Ainsi, par exemple, en vertu des conventions établies dans le Chapitre précédent, les valeurs des notations

$$a+x, a-x, ax, \frac{a}{x}$$

se trouvent complètement déterminées dans le cas où la constante a et la variable x deviennent imaginaires. Supposons, pour fixer les idées, que, la constante a restant réelle, la variable x reçoive la valeur imaginaire

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

α,β exprimant deux quantités réelles qui peuvent être remplacées par le module ρ et l'arc réel θ. On conclura du Chapitre VII (§§ I et II) que les quatre notations

$$a+x, a-x, ax, \frac{a}{x}$$

désignent respectivement les quatre expressions imaginaires

$$a+\rho\cos\theta+\rho\sin\theta\sqrt{-1},$$

$$a-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta\sqrt{-1},$$

$$a\rho\cos\theta+a\rho\sin\theta\sqrt{-1},$$

$$\text{APCOS}\Theta-\text{APSIN}\Theta-1,$$

ou, en d'autres termes, les suivantes :

$$\text{A}+\text{A}+\text{B}-1,\text{A}-\text{A}-\text{B}-1,\text{AA}+\text{AB}-1,$$

$$\text{AAA}2+\text{B}2-\text{ABA}2+\text{B}2-1.$$

En général, on fixera sans difficulté, par le moyen des principes établis dans le Chapitre VII, les valeurs des expressions algébriques dans lesquelles plusieurs variables ou constantes imaginaires seraient liées entre elles par les signes de l'addition, de la soustraction, de la multiplication ou de la division ; et l'on reconnaitra sans peine que ces expressions conservent toutes les propriétés dont elles jouiraient si les variables et constantes qui s'y trouvent comprises étaient réelles. Par exemple, si l'on désigne par

plusieurs variables soit réelles, soit imaginaires, on aura, dans tous les cas possibles,

Considérons maintenant la notation

$$\text{XA},$$

dans le cas où, la constante a restant réelle, la variable x obtient la valeur imaginaire

$$\text{A}+\text{B}-1=\text{P}(\text{COS}\Theta+-1\text{SIN}\Theta).$$

Si l'on prend pour a une quantité dont la valeur numérique soit un nombre entier m, cette même notation, savoir

$$\text{XA}=\text{X}\pm\text{M},$$

aura, pour des valeurs réelles quelconques de α et de β, une signification précise. Elle représentera l'expression imaginaire

$$\text{PMCOSM}\Theta+\text{PMSINM}\Theta-1,$$

si a=+m, et la suivante

$$\text{P}-\text{MCOSM}\Theta-\text{P}-\text{MSINM}\Theta-1,$$

si a=−m [(voir le Chapitre VII, § II, équations (18) et (19)]. Mais, toutes les fois que la constante a recevra une valeur numérique fractionnaire ou irrationnelle, la notation

$$\text{XA}$$

n'aura plus de valeur précise et déterminée, à moins que la partie réelle α de l'expression imaginaire x ne soit positive. Si dans ce cas particulier on fait

$$\text{Z}=\text{ARCTANGBA},$$

l'arc ζ restera compris entre les limites $-\pi 2,+\pi 2$; et, en écrivant x au lieu de $\alpha+\beta-1$ dans le § IV du Chapitre VII [(équations (17) et (27)], on trouvera

en sorte que la notation xa désignera l'expression imaginaire

$$\text{PACOSAZ}+\text{PASINAZ}-1.$$

Il suit encore des conventions et des principes ci-dessus établis (Chap. VII, §§ III et IV), que, pour une valeur numérique fractionnaire de la constante a, la notation

$$((x))_a$$

représente à la fois plusieurs expressions imaginaires, dont les valeurs sont données par les deux formules

$$((x))_a = x_a((1))_a, ((1))_a = \cos 2k\pi \pm -1 \sin 2k\pi,$$

lorsque la partie réelle α de l'expression imaginaire x est positive, et par les deux suivantes

$$((x))_a = (-x)_a((-1))_a,$$

$$((-1))_a = \cos(2k+1)a\pi \pm -1 \sin(2k+1)a\pi,$$

lorsque la quantité α devient négative [(voir, à ce sujet, dans le § IV du Chapitre VII, les équations (25) et (26)]. La même notation ne peut plus être employée dans le cas où la valeur numérique de a devient irrationnelle.

Les expressions de la forme

$$x_a$$

conservent les mêmes propriétés pour des valeurs réelles et pour des valeurs imaginaires de la variable, tant que l'exposant a pour valeur numérique un nombre entier ; mais ces propriétés ne subsistent plus que sous certaines conditions dans le cas contraire. Soient, par exemple,

plusieurs expressions imaginaires, qui se réduiront à des quantités réelles si β, β', β'' s'évanouissent. Désignons, en outre, par a,b,c,... des quantités réelles quelconques, dont les valeurs numériques soient fractionnaires ou irrationnelles, et par m,m′,m″,... plusieurs nombres entiers. On aura constamment, en vertu des principes établis dans le Chapitre VII,

chacun des nombres m,m′,m″,... devant être affecté du même signe dans les deux membres ;

On trouvera, au contraire, que des trois formules

la première subsiste uniquement toutes les fois que la partie réelle α de l'expression imaginaire x est positive ; la seconde, toutes les fois que, α,α′,α″,... étant positifs, la somme

$$\operatorname{arctang} ba + \operatorname{arctang} b'a' + \operatorname{arctang} b''a'' + \ldots$$

reste comprise entre les limites $-\pi 2, +\pi 2$; et la dernière, toutes les fois que, α étant positif, le produit

$$a \operatorname{arctang} ba$$

est compris entre ces mêmes limites.

Les conventions faites dans le Chapitre VII ne suffisent pas encore pour fixer d'une manière précise le sens des notations

$$Ax, Lx, \sin x, \cos x, \arcsin x, \arccos x,$$

dans le cas où la variable x devient imaginaire. Le moyen le plus simple d'y parvenir étant la considération des séries imaginaires, nous renvoyons ce sujet au Chapitre IX.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, toute notation algébrique qui renfermerait, avec les variables x,y,z,... supposées réelles, des constantes imaginaires, ne peut être employée dans le calcul que dans le cas où, en vertu des conventions établies, elle aurait pour valeur une certaine expression imaginaire. Une semblable expression, dans laquelle la partie réelle et le coefficient de -1 sont nécessairement des fonctions réelles des variables x,y,z,..., est ce qu'on appelle une fonction imaginaire de ces mêmes variables. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ deux fonctions réelles de x, une fonction imaginaire de cette variable sera

$$\Phi(x)+\chi(x)-1.$$

Quelquefois nous indiquerons une semblable fonction à l'aide d'une seule caractéristique π, et nous écrirons, en conséquence,

$$\Pi(x)=\Phi(x)+\chi(x)-1.$$

Pareillement, si l'on désigne par $\varphi(x,y,z,...)$, $\chi(x,y,z,...)$ deux fonctions réelles des variables x,y,z,...,

$$\Pi(x,y,z,...)=\Phi(x,y,z,...)+\chi(x,y,z,...)-1$$

sera une fonction imaginaire de ces diverses variables.

La fonction imaginaire

$$\Phi(x,y,z,...)+\chi(x,y,z,...)-1$$

prend le nom de fonction algébrique, ou exponentielle, ou logarithmique, ou circulaire, etc., et, dans le premier cas, le nom de fonction rationnelle ou irrationnelle, entière ou fractionnaire, etc., toutes les fois que les fonctions réelles $\varphi(x,y,z,...)$,$\chi(x,y,z,...)$ jouissent l'une et l'autre des propriétés que suppose le nom dont il s'agit. Ainsi, en particulier, la forme générale d'une fonction imaginaire et linéaire des variables x,y,z,... sera

$$(A+Bx+Cy+Dz+...)+(A'+B'x+C'y+D'z+...)-1$$

ou, ce qui revient au même,

$$(A+A'-1)+(B+B'-1)x+(C+C'-1)y+(D+D'-1)z+...,$$

a,b,c,d,..., a′,b′,c′,d′,... désignant des constantes réelles.

On doit distinguer encore parmi les fonctions imaginaires, comme parmi les fonctions réelles, celles qu'on nomme explicites, et qui sont immédiatement exprimées au moyen des variables, de celles qu'on nomme implicites, et dont les valeurs déterminées par certaines équations ne peuvent être explicitement connues qu'après la résolution des équations dont il s'agit. Soit

$$\Pi(x) \text{ ou } \Pi(x,y,z,...)$$

une fonction imaginaire implicite déterminée par une seule équation. On pourra représenter cette fonction par $u+v-1$, u,v désignant deux quantités réelles ; et, si dans l'équation imaginaire qu'elle doit vérifier, on écrit, au lieu de $\pi(x)$ ou de $\pi(x,y,z,...)$,

$$u+v\sqrt{-1},$$

après avoir développé les deux membres, puis égalé de part et d'autre les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$, on obtiendra deux équations réelles entre les fonctions inconnues u et v. La résolution de ces dernières équations, lorsqu'elle pourra s'effectuer, fera connaître les valeurs explicites de u et de v, et, par suite, la valeur explicite de l'expression imaginaire

$$u+v\sqrt{-1},$$

Pour qu'une fonction imaginaire d'une seule variable soit complètement déterminée, il est nécessaire et il suffit que de chaque valeur particulière attribuée à la variable on puisse déduire la valeur correspondante de la fonction. Quelquefois, pour chaque valeur de la variable, la fonction donnée en obtient plusieurs différentes les unes des autres. Conformément aux conventions précédemment admises, nous désignerons ordinairement ces valeurs multiples d'une fonction imaginaire par des notations dans lesquelles nous ferons usage de doubles traits ou de doubles parenthèses. Ainsi, par exemple,

$$\cos z+\sqrt{-1}\sin z\,\|_n$$

ou

$$((\cos z+\sqrt{-1}\sin z))^{\frac{1}{n}}$$

indiquera l'une quelconque des racines du degré n de l'expression imaginaire

$$\cos z+\sqrt{-1}\sin z.$$

§ II. — Sur les expressions imaginaires infiniment petites et sur la continuité des fonctions imaginaires.

Une expression imaginaire est appelée infiniment petite, lorsqu'elle converge vers la limite zéro, ce qui suppose que, dans l'expression donnée, la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ convergent en même temps vers cette limite. Cela posé, représentons par

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$$

une expression imaginaire variable, α,β désignant deux quantités réelles auxquelles on peut substituer le module ρ et l'arc réel θ. Pour que cette expression soit infiniment petite, il sera évidemment nécessaire et suffisant que son module

$$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

soit lui-même infiniment petit.

Une fonction imaginaire de la variable x supposée réelle est appelée continue entre deux limites données de cette variable lorsque, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Il en résulte que la fonction imaginaire

$$\varphi(x)+\chi(x)\sqrt{-1}$$

sera continue entre deux limites de x si les fonctions réelles φ(x) et χ(x) restent continues entre ces limites.

On dit qu'une fonction imaginaire de la variable x est, dans le voisinage d'une valeur particulière de x, fonction continue de cette variable toutes les fois qu'elle reste continue entre deux limites même très rapprochées qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction imaginaire de la variable x cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de cette variable, on dit qu'elle devient alors discontinue, et qu'il y a pour cette valeur particulière solution de continuité.

En partant des notions qu'on vient d'établir relativement à la continuité des fonctions imaginaires, on reconnaitra facilement que les théorèmes I, II et III du Chapitre II (§ II) subsistent dans le cas même où l'on remplace les fonctions réelles

$$F(x) \text{ ET } F(x,y,z,\ldots)$$

par des fonctions imaginaires

$$\Phi(x)+\chi(x)-1 \text{ ET } \Phi(x,y,z,\ldots)+\chi(x,y,z,\ldots)-1.$$

On peut, en conséquence, énoncer les propositions suivantes :

Théorème I. — Si les variables réelles x,y,z,... ont pour limites les quantités fixes et déterminées X,Y,Z, et que la fonction imaginaire

$$\Phi(x,y,z,\ldots)+\chi(x,y,z,\ldots)-1$$

soit continue par rapport à chacune des variables x,y,z,... dans le voisinage du système des valeurs particulières

$\varphi(x,y,z,\ldots)+\chi(x,y,z,\ldots)-1$ aura pour limite

$$\Phi(X,Y,Z,\ldots)+\chi(X,Y,Z,\ldots)-1,$$

ou, si l'on fait, pour abréger,

$$\Phi(x,y,z,\ldots)+\chi(x,y,z,\ldots)-1=\Pi(x,y,z,\ldots),$$

$\pi(x,y,z,\ldots)$ aura pour limite

$$\Pi(X,Y,Z,\ldots).$$

Théorème II. — Désignons par x,y,z,... plusieurs fonctions réelles de la variable t, qui soient continues par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur réelle t=T. Soient de plus X,Y,Z,... les valeurs particulières de x,y,z,... correspondantes à t=T, et supposons que, dans le voisinage de ces valeurs particulières, la fonction imaginaire

$$\Pi(x,y,z,\ldots)=\Phi(x,y,z,\ldots)+\chi(x,y,z,\ldots)-1$$

soit en même temps continue par rapport à x, par rapport à y, par rapport à z, etc.; $\pi(x,y,z,\ldots)$, considérée comme une fonction imaginaire de t, sera encore continue par rapport à t, dans le voisinage de la valeur particulière t=T.

Si, dans le théorème précédent, on réduit les variables x,y,z,... à une seule, on obtiendra l'énoncé suivant :

Théorème III. — Supposons que dans l'expression

$$\Pi(x)=\Phi(x)+\chi(x)-1$$

la variable x soit fonction réelle d'une autre variable t. Concevons de plus que la variable x soit fonction continue de t dans le voisinage de la valeur particulière t=T, et $\pi(x)$ fonction continue de x dans le voisinage de la valeur particulière x=X, correspondante à t=T. L'expression imaginaire $\pi(x)$, considérée comme une fonction de t, sera encore continue par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière t=T.

§ III. — Des fonctions imaginaires symétriques, alternées ou homogènes.

En étendant aux fonctions imaginaires les définitions que nous avons données (Chapitre III) des fonctions symétriques, ou alternées, ou homogènes de plusieurs variables x,y,z,..., on reconnait immédiatement que

$$\Phi(x,y,z,\ldots)+\chi(x,y,z,\ldots)-1$$

est une fonction symétrique, ou alternée, ou homogène du degré a par rapport aux variables x,y,z,..., lorsque les fonctions réelles

$$\Phi(x,y,z,\ldots),\chi(x,y,z,\ldots)$$

sont l'une et l'autre symétriques, ou alternées, ou homogènes du degré a par rapport à ces mêmes variables.

§ IV. — Sur les fonctions imaginaires et entières d'une ou de plusieurs variables.

En vertu de ce qui a été dit ci-dessus (§ I),

$$\Phi(x)+\chi(x)-1$$

et

$$\Phi(x,y,z,\ldots)+\chi(x,y,z,\ldots)-1$$

sont deux fonctions imaginaires et entières, l'une de la variable x, l'autre des variables x,y,z,..., lorsque

$$\Phi(x)\text{etc}\chi(x),\Phi(x,y,z,\ldots)\text{etc}\chi(x,y,z,\ldots)$$

sont des fonctions réelles et entières de ces mêmes variables. Par suite, si $\pi(x)$ représente une fonction imaginaire et entière de la variable x, la valeur de $\pi(x)$ sera déterminée par une équation de la forme

$$\Pi(x)=\Phi(x)+\chi(x)-1=A0+A1x+A2x2+\ldots+(B0+B1x+B2x2+\ldots)-1,$$

a0,a1,a2,..., b0,b1,b2,... désignant des constantes réelles. On conclura de cette équation, en réunissant les coefficients des puissances semblables de x,

Pour que la fonction $\pi(x)$, déterminée par la formule précédente, s'évanouisse avec x, il faut que l'on ait

$$a_0+b_0-1=0,$$

c'est-à-dire $a_0=0$ et $b=0$, auquel cas la valeur de $\pi(x)$ se réduit à

$$\pi(x)=(a_1+b_1-1)x+(a_2+b_2-1)x^2+\ldots=x[a_1+b_1-1+(a_2+b_2-1)x+\ldots].$$

Ainsi, toute fonction imaginaire et entière de la variable x, lorsqu'elle s'évanouit avec cette variable, est le produit du facteur x par une seconde fonction de la même espèce ou, en d'autres termes, est divisible par x. En partant de cette remarque, on étendra facilement les théorèmes I et II du Chapitre IV (§ I) au cas où les fonctions entières qui s'y trouvent mentionnées sont en même temps imaginaires. J'ajoute que ces deux théorèmes subsisteront encore si l'on y remplace les valeurs particulières et réelles attribuées à la variable x, telles que

$$x_0,x_1,x_2,\ldots$$

par des variables imaginaires

$$a_0+b_0-1,a_1+b_1-1,a_2+b_2-1,\ldots.$$

Pour démontrer cette assertion, il suffit d'établir les deux propositions suivantes :

Théorème I. — Si une fonction imaginaire et entière de la variable x s'évanouit pour une valeur particulière de cette variable, par exemple pour

cette fonction sera divisible algébriquement par

$$x-a_0-b_0-1.$$

Démonstration. — En effet, soit

$$\pi(x)=\varphi(x)+\chi(x)-1$$

la fonction imaginaire dont il s'agit. Si l'on y fait

z désignant une nouvelle variable, on obtiendra évidemment pour résultat de la substitution une fonction imaginaire et entière de z, savoir

$$\pi(a_0+b_0-1+z);$$

et, comme cette fonction de z devra s'évanouir pour $z=0$, on en conclura que

$$\pi(x)=\pi(a_0+b_0-1+z)$$

est divisible par

$$z=x-a_0-b_0-1.$$

Corollaire I. — La proposition précédente subsiste dans le cas même où la fonction $\chi(x)$ s'évanouit, c'est-à-dire dans le cas où $\pi(x)$ se réduit à une fonction réelle $\varphi(x)$.

Corollaire II. — Le théorème précédent subsiste encore lorsqu'on suppose $\beta=0$, et par conséquent lorsque la valeur particulière attribuée à la variable x est réelle.

Théorème II. — Si une fonction imaginaire et entière de la variable x s'évanouit pour chacune des valeurs particulières de x comprises dans la suite

$$A0+B0-1,A1+B1-1,A2+B2-1,\ldots AN-1+BN-1-1,$$

n désignant un nombre entier quelconque, cette fonction sera équivalente au produit des facteurs

$$\ldots,x-\alpha n-1-\beta n-1-1$$

par une nouvelle fonction imaginaire et entière de la variable x.

Démonstration. — Soit

$$\Pi(x)=\Phi(x)+X(x)-1$$

la fonction proposée. Comme elle doit s'évanouir pour

elle sera, en vertu du théorème I, algébriquement divisible par

et l'on aura, en conséquence,

Q0 désignant une nouvelle fonction imaginaire et entière de la variable x. La fonction $\pi(x)$ devant s'évanouir encore lorsqu'on suppose

cette supposition réduira nécessairement à zéro le second membre de l'équation (2), et, par conséquent, l'un des deux facteurs qui le composent (voir le Chapitre VII, § II, théorème VII, corollaire II). De plus, comme le premier facteur

ne peut devenir nul pour

tant que les valeurs particulières

$$A0+B0-1,A1+B1-1$$

sont distinctes l'une de l'autre, il est clair qu'en attribuant à x la seconde de ces deux valeurs, on devra réduire à zéro la fonction entière Q0, et, par suite, que cette fonction entière sera divisible algébriquement par

$$X-A1-B1-1.$$

On aura donc

$$Q0=(X-A1-B1-1)Q1,$$

Q1 désignant une nouvelle fonction imaginaire et entière de la variable x; en sorte que l'équation (2) pourra se mettre sous la forme

En raisonnant comme on vient de le faire, on trouvera : 1 que, la fonction $\pi(x)$ devant s'évanouir en vertu de la supposition

cette supposition réduit nécessairement à zéro le second membre de l'équation (3), et, par conséquent, l'un de ses trois facteurs ; 2 que le facteur réduit à zéro ne peut être que la fonction entière Q1, tant que les trois valeurs particulières de x, désignées par

$$A0+B0-1, A1+B1-1, A2+B2-1.$$

sont distinctes l'une de l'autre ; 3 que la fonction entière Q1, devant s'évanouir pour

est algébriquement divisible par

$$x-A2-B2-1.$$

On aura, par conséquent,

$$Q1=(x-A2-B2-1)Q2$$

et, par suite,

Q2 désignant encore une fonction imaginaire et entière de la variable x. En continuant de la même manière, on finira par reconnaître que, dans le cas où la fonction entière $\pi(x)$ s'évanouit pour n valeurs différentes de x, respectivement désignées par

$$A0+B0-1, A1+B1-1, A2+B2-1, \ldots, AN-1+BN-1-1,$$

on a nécessairement

Qdésignant une nouvelle fonction entière de la variable x.

Il est à peu près inutile d'observer que le théorème précédent subsiste lorsqu'on suppose

$$X(x)=0$$

ou bien

$$B0=0, B1=0, B2=0, \ldots, BN-1=0,$$

c'est-à-dire lorsque la fonction $\pi(x)$ ou les valeurs particulières attribuées à la variable x deviennent réelles.

Àl'aide des principes établis dans ce paragraphe, on démontrera sans difficulté que, dans le Chapitre IV (§ I), les théorèmes III et IV, avec la formule (1), peuvent être étendus au cas où les fonctions et les variables deviennent imaginaires, ainsi que les valeurs particulières attribuées aux unes et aux autres. On prouvera de même que les propositions I, II et III, avec les formules (1) et (2), dans le § II du Chapitre IV, et les formules (2), (3), (4), (5), (6) dans le § III du même Chapitre, subsistent quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires des variables, des fonctions et des constantes. Ainsi, par exemple, on reconnaitra, en particulier, que l'équation (6) du § III, savoir

a lieu pour des valeurs imaginaires quelconques des variables x et y.

§ V. — Détermination des fonctions imaginaires continues d'une seule variable propres à vérifier certaines conditions.

Soit

$$\Pi(x)=\Phi(x)+-1X(x)$$

une fonction imaginaire continue de la variable x, $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ désignant deux fonctions continues, mais réelles. La fonction imaginaire $\pi(x)$ sera complètement déterminée, si elle est assujettie à vérifier, pour toutes les valeurs réelles possibles des variables x et y, l'une des équations

ou bien, pour toutes les valeurs réelles et positives des mêmes variables, l'une des équations suivantes :

Nous allons résoudre successivement ces quatre équations, ce qui nous fournira quatre problèmes analogues à ceux que nous avons déjà traités dans le § I du Chapitre V.

Problème I. — Déterminer la fonction imaginaire $\pi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait, pour toutes les valeurs réelles des variables x et y,

Solution. — Si, à l'aide de la formule

$$\Pi(x)=\Phi(x)+\chi(x)-1,$$

on remplace dans l'équation (1) la fonction imaginaire par les fonctions réelles φ et χ, cette équation deviendra

$$\Phi(x+y)+\chi(x+y)-1=\Phi(x)+\chi(x)-1+\Phi(y)+\chi(y)-1;$$

puis l'on en conclura, en égalant de part et d'autre les parties réelles et les coefficients de -1,

$$\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y),\chi(x+y)=\chi(x)+\chi(y).$$

On tirera de ces dernières formules (voir le Chapitre V, § I, problème I)

$$\Phi(x)=x\Phi(1),\chi(x)=x\chi(1)$$

et, par suite,

ou, ce qui revient au même,

Il suit de l'équation (5) que toute valeur de $\pi(x)$ propre à résoudre la question proposée est nécessairement de la forme

a,b désignant deux quantités constantes. Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'une semblable valeur de $\pi(x)$ vérifie l'équation (1), quelles que soient les deux quantités a et b. Ces quantités sont donc deux constantes arbitraires.

On peut remarquer que, pour obtenir la valeur précédente de $\pi(x)$, il suffit de remplacer, dans la valeur de $\varphi(x)$ que fournit l'équation (7) du Chapitre V (§ I), la constante arbitraire et réelle a par la constante arbitraire, mais imaginaire,

$$a+b-1.$$

Problème II. — Déterminer la fonction imaginaire $\pi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x, et que l'on ait, pour toutes les valeurs réelles des variables x et y,

Solution. — Si dans l'équation (2) on fait $x=0$, on en tirera

$$\Pi(0)=1$$

ou, ce qui revient au même, à cause de la formule

$$\Pi(x)=\Phi(x)+\chi(x)-1,$$

$$\Phi(0)+\chi(0)-1=1$$

et, par suite,

$$\Phi(0)=1,\chi(0)=0.$$

La fonction φ(x) se réduira donc à l'unité pour la valeur particulière 0 attribuée à la variable x; et, puisqu'on la suppose continue entre des limites quelconques, il est clair qu'elle sera, dans le voisinage de cette valeur particulière, très peu différente de l'unité, par conséquent positive. On pourra donc, en désignant par α un nombre très petit, choisir ce nombre de manière que la fonction φ(x) reste constamment positive entre les limites

$$x=0,x=\alpha.$$

Cette condition étant remplie, comme la quantité φ(α) sera elle-même positive, si l'on fait

$$p=\Phi(\alpha)2+\chi(\alpha)2,z=\text{arctang}\chi(\alpha)\Phi(\alpha),$$

on en conclura

$$\Pi(\alpha)=\Phi(\alpha)+\chi(\alpha)-1=p(\cos z+-1\sin z).$$

Concevons maintenant que dans l'équation (2) on remplace successivement y par y+z, puis z par z+u,..., on en déduira

$$\Pi(x+y+z+\ldots)=\Pi(x)\Pi(y)\Pi(z)\ldots,$$

quel que soit le nombre des variables x,y,z,...; si, de plus, on désigne par m ce même nombre, et que l'on fasse

l'équation que l'on vient de trouver donnera

$$\Pi(m\alpha)=[\Pi(\alpha)]m=pm(\cos mz+-1\sin mz).$$

J'ajoute que la formule

$$\Pi(m\alpha)=pm(\cos mz+-1\sin mz)$$

subsistera encore si l'on y remplace le nombre entier m par une fraction ou même par un nombre quelconque μ. C'est ce que l'on prouvera facilement ainsi qu'il suit.

Si dans l'équation (2) on fait

on en tirera

$$[\Pi(12\alpha)]2=\Pi(\alpha)=p[\cos z+-1\sin z];$$

puis, en extrayant les racines carrées des deux membres, de manière que les parties réelles soient positives, et observant que les deux fonctions φ(x),cosx restent positives, la première entre les limites x=0, x=α, la seconde entre les limites x=0, x=ζ, on trouvera

$$\Pi(12\alpha)=\Phi(12\alpha)+\chi(12\alpha)-1=p12\alpha(\cos z2+-1\sin z2).$$

De même, si dans l'équation (2) on fait

on en tirera

$$[\Pi(14\alpha)]2=\Pi(12\alpha)=P12(\cos z2+-1\sin z2);$$

puis, en extrayant les racines carrées des deux membres, de manière à obtenir des parties réelles positives,

$$\Pi(14\alpha)=P14(\cos z4+-1\sin z4);$$

Par des raisonnements semblables, on établira successivement les formules

$$\Pi(18\alpha) =P18(\cos z8 +-1\sin z8),\Pi(116\alpha)=P116(\cos z16+-1\sin z16),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et, en général, n désignant un nombre entier quelconque,

$$\Pi(12n\alpha)=P12n[\cos(12nz)+-1\sin(12nz)].$$

Si l'on opère sur la valeur précédente de $\pi(12n\alpha)$ pour en déduire celle de $\pi(m2n\alpha)$, comme on a opéré sur la valeur de $\pi(\alpha)$ pour en déduire celle de $\pi(m\alpha)$, on trouvera

$$\Pi(m2n\alpha)=Pm2n[\cos(m2nz)+-1\sin(m2nz)],$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Phi(m2n\alpha)+X(m2n\alpha)-1=Pm2n[\cos(m2nz)+-1\sin(m2nz)],$$

et, par suite,

$$\Phi(m2n\alpha)=Pm2n\cos(m2nz),X(m2n\alpha)=Pm2n\sin(m2nz);$$

puis, en supposant que la fraction m2n varie de manière à s'approcher indéfiniment du nombre μ, et passant aux limites, on obtiendra les équations

$$\Phi(mx)=Pm\cos mz,X(mx)=Pm\sin mz,$$

desquelles on conclura

De plus, si dans l'équation (2) on pose

on en tirera

$$\Pi(-m\alpha)=\Pi(0)\Pi(m\alpha)=P-m[\cos(-mz)+-1\sin(-mz)].$$

La formule (8) subsistera donc lorsqu'on y remplacera μ par $-\mu$. En d'autres termes, on aura, pour des valeurs réelles quelconques positives ou négatives de la variable x,

Si dans cette dernière formule on écrit $x\alpha$ au lieu de x, elle deviendra

et si l'on fait ensuite, pour abréger,

on trouvera

Ainsi toute valeur de $\pi(x)$, propre à résoudre la question proposée, sera nécessairement de la forme

$$Ax(\cos bx+-1\sin bx),$$

A,b désignant deux constantes réelles, dont la première ne pourra être que positive. Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'une semblable valeur de $\pi(x)$ vérifie l'équation (2), quelles que soient la valeur du nombre A et celle de la quantité b. Ce nombre et cette quantité sont donc des constantes arbitraires.

Corollaire. — Dans le cas particulier où la fonction $\varphi(x)$ doit rester positive entre les limites $x=0$, $x=1$, on peut, au lieu de supposer très petit, prendre $\alpha=1$; et l'on conclut alors immédiatement des équations (9) et (10)

Problème III. — Déterminer la fonction imaginaire $\pi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites positives quelconques de la variable x, et que l'on ait, pour toutes les valeurs positives des variables x et y,

Solution. — Si, à l'aide de la formule

$$\Pi(x)=\Phi(x)+\chi(x)-1,$$

on remplace dans l'équation (3) la fonction imaginaire π par les fonctions réelles φ et χ, puis, que l'on égale de part et d'autre les parties réelles et les coefficients de -1, on trouvera

$$\Phi(xy)=\Phi(x)+\Phi(y),\chi(xy)=\chi(x)+\chi(y).$$

Si, de plus, on désigne par A un nombre quelconque et par L la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A, on tirera des équations précédentes (voir le Chapitre V, § I, problème III)

$$\Phi(x)=\Phi(A)L(x),\chi(x)=\chi(A)L(x),$$

et l'on en conclura

ou, ce qui revient au même,

Il suit de la formule (14) que toute valeur $\pi(x)$ propre à résoudre la question proposée est nécessairement de la forme

a,b désignant deux quantités constantes. Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'une semblable valeur de $\pi(x)$ vérifie l'équation (3), quelles que soient les quantités a et b. Ces quantités sont donc deux constantes arbitraires.

On peut remarquer que, pour obtenir la valeur précédente de $\pi(x)$, il suffit de remplacer, dans la valeur de $\varphi(x)$ que fournit l'équation (12) du Chapitre V (§ I), la constante arbitraire et réelle a par la constante arbitraire, mais imaginaire,

$$A+B-1.$$

Nota. — On pourrait arriver très simplement à l'équation (15) de la manière suivante.

En vertu des formules identiques

l'équation (3) devient

$$\Pi(AL_x+L_y)=\Pi(AL_x)+\Pi(AL_y).$$

Comme, dans cette dernière, les quantités variables Lx,Ly, admettent des valeurs réelles quelconques positives ou négatives, il en résulte qu'on aura, pour toutes les valeurs réelles possibles des variables x et y,

$$\Pi(A^{x+y})=\Pi(A^x)+\Pi(A^y).$$

On en conclura [voir le problème I, équation (6)]

$$\Pi(A^x)=x\Pi(A^1)=x\Pi(A)$$

et, par suite,

$$\Pi(AL^x)=\Pi(A)L^x$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Pi(x)=\Pi(A)L^x.$$

Problème IV. — Déterminer la fonction imaginaire $\pi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites positives quelconques de la variable x, et que l'on ait, pour toutes les valeurs positives des variables x et y,

Solution. — Il serait facile d'appliquer à la solution de ce problème une méthode semblable à celle que nous avons employée pour résoudre le second ; mais on arrivera plus promptement à la solution cherchée, si l'on observe que, en désignant par L la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A, on peut mettre l'équation (4) sous la forme

$$\Pi(AL^{x+y})=\Pi(AL^x)\Pi(AL^y).$$

Comme, dans cette dernière équation, les quantités variables Lx,Ly, admettent des valeurs réelles quelconques positives ou négatives, il en résulte qu'on aura, pour toutes les valeurs réelles possibles des variables x et y,

$$\Pi(A^{x+y})=\Pi(A^x)\Pi(A^y).$$

On en conclura, en représentant par α un nombre très petit et en remplaçant dans l'équation (10) du second problème $\pi(x)$ par $\pi(A^x)$,

$$\Pi(A^x)=[\Pi(A^\alpha)]^{x\alpha}.$$

On trouvera par suite

$$\Pi(AL^x)=[\Pi(A^\alpha)]L^{x\alpha}$$

ou, ce qui revient au même,

Il est essentiel d'observer que la fonction imaginaire $\pi(A^x)$, et par conséquent sa partie réelle $\varphi(A^x)$, se réduisent à l'unité pour x=0, ou, en d'autres termes, que la fonction imaginaire $\pi(x)$ et sa partie réelle $\varphi(x)$ se réduisent à l'unité pour x=1. C'est ce que l'on peut démontrer directement, en prenant dans l'équation (4),

$$x=A^0=1.$$

Quant au nombre α, il doit seulement être assez petit pour que la partie réelle de la fonction imaginaire π(Ax) reste constamment positive entre les limites x=0, x=α. Cette condition étant remplie, la partie réelle de l'expression imaginaire

$$\Pi(A_A)=\Phi(A_A)+\chi(A_A)-1$$

sera elle-même positive ; et par suite, si l'on fait

$$P=[\Phi(A_A)]2+[\chi(A_A)]2,Z=\text{ARCTANG}\chi(A_A)\Phi(A_A),$$

on aura

$$\Pi(A_A)=P(\cos Z+-1\sin Z).$$

Cela posé, l'équation (17) deviendra

En vertu de cette dernière équation, toute valeur de π(x) propre à résoudre la question proposée sera nécessairement de la forme

a,b désignant deux quantités constantes. Il est aisé, de plus, de s'assurer que ces deux quantités constantes doivent demeurer entièrement arbitraires.

Chapitre IX

Soient respectivement

deux séries réelles. La suite des expressions imaginaires

formera ce qu'on appelle une série imaginaire. Soit, de plus,

la somme des n premiers termes de cette série. Selon que, pour des valeurs croissantes de n, sn convergera ou non vers une limite fixe, on dira que la série (3) est convergente et qu'elle a pour somme cette limite, ou bien qu'elle est divergente et n'a pas de somme. Le premier cas aura évidemment lieu si les deux sommes

$$P0+P1+\ldots+P_N-1,Q0+Q1+\ldots+Q_N-1$$

convergent elles-mêmes, pour des valeurs croissantes de n, vers des limites fixes, et le second, dans la supposition contraire. En d'autres termes, la série (3) sera toujours convergente en même temps que les séries réelles (1) et (2). Si ces dernières, ou l'une d'elles seulement, deviennent divergentes, la série (3) le sera également.

Dans tous les cas possibles, le terme de la série (3) qui correspond à l'indice n, savoir

$$P_N+Q_N-1,$$

est ce qu'on nomme son terme général.

L'une des séries imaginaires les plus simples est celle qu'on obtient en attribuant à la variable x, dans la progression géométrique

une valeur imaginaire. Concevons, pour fixer les idées, que l'on fasse

z désignant une nouvelle variable supposée réelle, et θ un arc réel. La progression géométrique dont il s'agit deviendra

Pour obtenir l'équation qui détermine la somme des n premiers termes de la série précédente, il suffit de remplacer x par z(cosθ+−1sinθ) dans la formule

$$1+x+x2+...+xn-1=11-x-xn1-x.$$

On trouve de cette manière

et, comme, pour des valeurs croissantes de n, le module de l'expression imaginaire

$$zn(cosnθ+-1sinnθ)1-zcosθ-zsinθ-1,$$

savoir

$$±zn(1-2zcosθ+z2)12,$$

converge vers la limite zéro ou croît au delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de z inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure de l'équation (6) que la série (5) est, dans la première hypothèse, une série convergente qui a pour somme

et, dans la seconde hypothèse, une série divergente qui n'a plus de somme.

La somme d'une série imaginaire convergente s'indique, comme si la série était réelle, par la somme de ses premiers termes, suivie de points....

Cela posé, si l'on appelle s la somme de la série (3) supposée convergente, et que, dans la formule (4), on fasse croître n indéfiniment, on trouvera, en passant aux limites,

De même, lorsqu'on supposera la valeur numérique de z inférieure à l'unité, on tirera de l'équation (6), en faisant croître n au delà de toute limite assignable,

En vertu de la formule (7), le premier membre de l'équation (8) peut être présenté sous la forme suivante :

$$(1+zcosθ+z2cos2θ+...)+(zsinθ+z2sin2θ+...)-1.$$

On aura donc, pour des valeurs numériques de z inférieures à l'unité,

On en conclura

Ainsi la substitution d'une valeur imaginaire de x dans la progression géométrique

suffit pour conduire à la sommation des deux séries

toutes les fois que la variable z reste comprise entre les limites

$$z=-1,z=+1,$$

c'est-à-dire toutes les fois que ces deux séries sont convergentes.

Les premiers membres des équations (10) étant (en vertu du théorème I, Chapitre VI, § I) fonctions continues de la variable z, dans le voisinage de toute valeur particulière comprise entre les limites

$$z=-1, z=+1,$$

le premier membre de l'équation (9) sera lui-même, dans le voisinage d'une semblable valeur, fonction continue de z. Or, ce premier membre n'est autre chose que la somme de la série (5), dont les différents termes restent fonctions continues de entre des limites quelconques. En généralisant la remarque qu'on vient de faire, on obtient la proposition suivante :

Théorème I. — Lorsque les différents termes de la série (3) sont des fonctions d'une même variable z, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle cette série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de z.

Démonstration. — En effet, dans le voisinage de la valeur particulière attribuée à la variable 5, la série (3) ne peut être convergente et avoir pour ses différents termes des fonctions continues de z, qu'autant que les séries réelles (1) et (2) jouissent l'une et l'autre des mêmes propriétés : or, dans cette hypothèse, chacune des sommes

$$p_0+p_1+p_2+\ldots, q_0+q_1+q_2+\ldots,$$

étant (en vertu du théorème I, Chapitre VI, § I) fonction continue de la variable z, il en résulte que la somme de la série (3), savoir

$$s=(p_0+p_1+p_2+\ldots)+(q_0+q_1+q_2+\ldots)-1$$

sera aussi fonction continue de cette variable.

Supposons maintenant que l'on désigne par

$$p_0, p_1, p_2, \ldots$$

les modules des différents termes de la série (3), et par

$$\cos\theta_0+-1\sin\theta_0, \cos\theta_1+-1\sin\theta_1, \cos\theta_2+-1\sin\theta_2, \ldots$$

les expressions réduites correspondantes, en sorte qu'on ait généralement

$$p_n=(p_n^2+q_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$p_n+q_n-1=p_n(\cos\theta_n+-1\sin\theta_n).$$

La série (3) deviendra

et l'on pourra ordinairement décider si cette série est convergente ou divergente, à l'aide du théorème que je vais énoncer.

Théorème II. — Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$. Suivant que la plus grande de ces limites sera inférieure ou supérieure à l'unité, la série (3) sera convergente ou divergente.

Démonstration. — Considérons d'abord le cas où les plus grandes valeurs de l'expression $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ convergent, tandis que n croit indéfiniment, vers une limite inférieure à l'unité. Dans ce cas, la série

étant convergente (Chapitre VI, § II, théorème I), les séries

le seront également (Chapitre VI, § III, théorème IV), et la convergence de ces dernières entraînera celle de la série (12), qui n'est que la série (3) présentée sous une autre forme.

Supposons en second lieu que, pour des valeurs croissantes de n, les plus grandes valeurs de $(\rho n)^{1n}$ convergent vers une limite supérieure à l'unité. Dans cette hypothèse, on prouvera, par un raisonnement semblable à celui que nous avons employé dans le Chapitre VI (§ II, théorème I), que les plus grandes valeurs du module

$$p_n=(p_n^2+q_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

croissent avec n au delà de toute limite, ce qui ne peut être vrai qu'autant que les plus grandes valeurs des deux quantités pn,qn, ou au moins de l'une d'elles, croissent de même indéfiniment. Or, comme ces deux quantités sont les termes généraux des séries (1) et (2), on doit conclure que, de ces deux séries, l'une au moins est divergente, ce qui suffit pour assurer la divergence de la série (3).

Scolie I. — Le théorème qu'on vient d'établir ne laisse d'incertitude sur la convergence ou la divergence d'une série imaginaire que dans le cas particulier où la limite des plus grandes valeurs de $(\rho n)^{1n}$ devient égale à l'unité. Dans ce cas particulier, il n'est pas toujours facile de décider la question. Toutefois on peut affirmer que, si la série (13) est convergente, les séries (14), et par suite la série (12), le seront pareillement. La réciproque n'est pas vraie, et il pourrait arriver que, la série (12) restant convergente, la série (13) fût divergente. Ainsi, par exemple, si l'on suppose

$$p_n=1^n+1,\theta_n=(n+1^2)^{\pi},$$

on obtiendra, à la place des séries (12) et (13), les deux suivantes

$$-1,-1^2-1,+1^3-1,-1^4-1,\ldots,1,1^2,1^3,1^4,\ldots,$$

dont la seconde est divergente, tandis que la première reste convergente et a pour somme

$$-1^L(2),$$

l désignant la caractéristique des logarithmes népériens.

Scolie II. — Lorsque, pour des valeurs croissantes de n, le rapport

$$p_{n+1}:p_n$$

s'approche indéfiniment d'une limite fixe, cette limite est également celle vers laquelle convergent les plus grandes valeurs de l'expression $(\rho n)^{1n}$.

Le théorème V du § III (Chapitre VI) est évidemment applicable aux séries imaginaires aussi bien qu'aux séries réelles. Quant au théorème VI du même paragraphe, on doit, lorsqu'il est question des séries imaginaires, le remplacer par le suivant :

Théorème III. — Soient

deux séries convergentes, mais imaginaires, qui aient respectivement pour sommes s et s′. Si chacune de ces séries reste convergente lorsqu'on réduu ses différents termes à leurs modules respectifs,

sera une nouvelle série convergente imaginaire, qui aura pour somme ss′.

Démonstration. — Désignons respectivement par sn,s'n les sommes des n premiers termes des deux séries (15), et par s″n la somme des n premiers termes de la série (16). On trouvera

$$s_n s'_n - s''_n = u_n - 1 v_n - 1 + (u_n - 1 v_n - 2 + u_n - 2 v_n - 1) + \ldots + (u_n - 1 v_1 + u_n - 2 v_2 + \ldots + u_2 v_n - 2 + u_1 v_n - 1).$$

Désignons encore par ρn et ρ'n les modules des expressions imaginaires un et vn, en sorte que ces expressions soient déterminées par des équations de la forme

$$u_n = \rho_n(\cos\theta_n + -1 \sin\theta_n), \quad v_n = \rho'_n(\cos\theta'_n + -1 \sin\theta'_n).$$

Les séries réelles

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots, \rho'_0, \rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_n, \ldots$$

étant convergentes par hypothèse, on en conclura, comme dans le Chapitre VI (§ III, théorème VI), que la somme

$$\rho_n - 1 \rho'_n - 1 + (\rho_n - 1 \rho'_n - 2 + \rho_n - 2 \rho'_n - 1) + \ldots + (\rho_n - 1 \rho'_1 + \rho_n - 2 \rho'_2 + \ldots + \rho_2 \rho'_n - 2 + \rho_1 \rho'_n - 1)$$

converge, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro. Il en sera de même a fortiori des deux sommes

$$\begin{gathered} \rho_n - 1 \rho'_n - 1 \cos(\theta_n - 1 + \theta'_n - 1) + \\ [\rho_n - 1 \rho'_n - 2 \cos(\theta_n - 1 + \theta'_n - 2) + \rho_n - 2 \rho'_n - 1 \cos(\theta_n - 2 + \theta'_n - 1)] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ [\rho_n - 1 \rho'_1 \cos(\theta_n - 1 + \theta'_1) + \rho_n - 2 \rho'_2 \cos(\theta_n - 2 + \theta'_2) + \ldots + \rho_2 \rho'_n - 2 \cos(\theta_2 + \theta'_n - 2) + \rho_1 \rho'_n - 1 \cos(\theta_1 + \theta'_n - 1)] \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} \rho_n - 1 \rho'_n - 1 \sin(\theta_n - 1 + \theta'_n - 1) + \\ [\rho_n - 1 \rho'_n - 2 \sin(\theta_n - 1 + \theta'_n - 2) + \rho_n - 2 \rho'_n - 1 \sin(\theta_n - 2 + \theta'_n - 1)] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ [\rho_n - 1 \rho'_1 \sin(\theta_n - 1 + \theta'_1) + \rho_n - 2 \rho'_2 \sin(\theta_n - 2 + \theta'_2) + \ldots + \rho_2 \rho'_n - 2 \sin(\theta_2 + \theta'_n - 2) + \rho_1 \rho'_n - 1 \sin(\theta_1 + \theta'_n - 1)], \end{gathered}$$

dont la première représente évidemment la partie réelle de l'expression imaginaire

$$s_n s'_n - s''_n$$

tandis que la seconde représente le coefficient de −1 dans cette expression. Par suite, sns'n−s″n convergera aussi, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite zéro ; et, comme sns'n s'approche indéfiniment de la limite ss′, il faudra de toute nécessité que l'expression s″n, c'est-à-dire la somme des n premiers termes de la série (16), s'approche elle-même indéfiniment de cette dernière limite. Il en résulte 1 que la série (16) est convergente ; 2 que cette série convergente a pour somme ss′.

§ II. — Des séries imaginaires ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable.

Soit x une variable imaginaire. Toute série imaginaire ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x sera de la forme

$$a_0 + b_0 - 1, (a_1 + b_1 - 1)x, (a_2 + b_2 - 1)x_2, \ldots,$$

$$\ldots, (a_n + b_n - 1)x_n, \ldots,$$

a0,a1,a2,...,an,..., b0,b1,b2,...,bn,..., dots désignant deux suites de quantités constantes. Dans le cas où les constantes de la seconde suite s'évanouissent, la série précédente se réduit à

Nous considérerons en particulier dans ce paragraphe les séries de cette dernière espèce. Si, pour plus de commodité, on pose

z désignant une variable réelle et θ un arc réel, la série (1) deviendra

Soit maintenant, comme dans le Chapitre VI (§ IV), A la plus grande des limites vers lesquelles converge, tandis que n croit indéfiniment, la racine n de la valeur numérique de an. La plus grande des limites vers lesquelles convergera dans la même hypothèse la racine n du module de l'expression imaginaire

$$\text{ANXN=ANZN(COSNΘ+−1SINNΘ)}$$

sera équivalente à la valeur numérique du produit

$$\text{Az;}$$

et en conséquence (voir ci-dessus le § I, théorème II) la série (3) sera convergente ou divergente suivant que le produit Az aura une valeur numérique inférieure ou supérieure à l'unité. On déduit immédiatement de cette remarque la proposition suivante :

Théorème I. — La série (3) est convergente pour toutes les valeurs de z comprises entre les limites

$$\text{z=−1A,z=+1A,}$$

et divergente pour toutes les valeurs de z situées hors des mêmes limites. En d'autres termes, la série (1) est convergente ou divergente suivant que le module de l'expression imaginaire x est inférieur ou supérieur à 1A.

Scolie. — Lorsque la valeur numérique du rapport an+1an converge, pour des valeurs croissantes de n, vers une limite fixe, cette limite est précisément la valeur de la quantité positive désignée par A.

Corollaire I. — En comparant le théorème précédent au théorème du Chapitre VI (§ IV), on reconnaîtra que, si la série (1) est convergente pour une certaine valeur réelle de la variable, elle demeurera convergente pour toute valeur imaginaire dont cette valeur réelle serait, au signe près, le module. Par suite, si la série (1) est convergente pour toutes les valeurs réelles de la variable x, elle restera convergente, quelle que soit la valeur imaginaire que l'on attribue à cette variable.

Corollaire II. — Pour appliquer le théorème I et le précédent corollaire, considérons les quatre séries

μ désignant dans la seconde une quantité quelconque. De ces quatre séries les deux premières, ainsi que la dernière, restent convergentes pour toutes les valeurs réelles de x comprises entre les limites

et la troisième pour des valeurs réelles quelconques de la variable x. Mais si, au lieu d'attribuer à x une valeur réelle, on suppose

à la place de ces quatre séries, on obtiendra les suivantes

dont les deux premières et la dernière resteront convergentes pour toutes les valeurs de z comprises entre les limites

$$z=-1,z=+1,$$

tandis que l'avant-dernière sera toujours convergente, quelle que soit la valeur réelle de z.

Après avoir fixé les limites entre lesquelles il faut renfermer z pour rendre la série (3) convergente, nous ferons remarquer que, en vertu des principes établis dans le paragraphe précédent, les théorèmes III, IV et V du Chapitre VI (§ IV), avec leurs corollaires, peuvent être étendus au cas où la variable x devient imaginaire. On devra seulement admettre, dans l'énoncé du théorème IV, que chacune des séries

$$a_0,a_1x,a_2x_2,\ldots;b_0,b_1x,b_2x_2,\ldots$$

reste convergente lorsqu'on réduit ses différents termes non plus à leurs valeurs numériques, mais à leurs modules respectifs. Cela posé, si l'on désigne par $\pi(\mu)$ ce que devient le second membre de l'équation (15) (Chapitre VI, § IV), lorsqu'on attribue à x la valeur imaginaire

$$z(\cos\theta+-1\sin\theta),$$

ou, en d'autres termes, si l'on fait

on trouvera, au lieu de la formule (16) (Chapitre VI, § IV), la suivante :

Il est essentiel de remarquer que cette dernière formule subsistera uniquement pour les valeurs de z comprises entre les limites $z=-1$, $z=+1$, et qu'entre ces limites la fonction imaginaire $\pi(\mu)$, c'est-à-dire la somme de la série (9), sera en même temps continue par rapport à z et par rapport à μ (voir ci-dessus le § I, théorème I).

Concevons à présent qu'au lieu de la série (9) on considère généralement la série (3), et que dans cette dernière on fasse varier la valeur de z par degrés insensibles. Tant que la série (3) sera convergente, c'est-à-dire tant que la valeur de z restera comprise entre les limites

$$-1A,+1A,$$

la somme de la série sera une fonction imaginaire continue de la variable z. Soit $\pi(z)$ cette fonction continue. L'équation

$$\Pi(M)=a_0+a_1z(\cos\theta+-1\sin\theta)+a_2z_2(\cos 2\theta+-1\sin 2\theta)+\ldots$$

subsistera pour toutes les valeurs de z renfermées entre les limites $-1A,+1A$, ce que nous indiquerons en écrivant ces limites à côté de la série, comme on le voit ici :

$$(z=-1A,z=+1A).$$

On doit observer que l'équation précédente équivaut toujours à deux équations réelles. En effet, si l'on pose

$\varphi(z)$ et $\chi(z)$ désignant deux fonctions réelles, on tirera de l'équation (14)

$$(z=-1A,z=+1A).$$

Lorsque la série (3) est donnée, on peut quelquefois en déduire la valeur de la fonction $\pi(x)$ sous forme finie, et c'est là ce qu'on appelle sommer la série. Nous avons déjà, dans le § I, résolu cette

question pour la série (8). Nous allons maintenant chercher à la résoudre pour les séries (9), (10), (11); et, en conséquence, nous traiterons l'un après l'autre les trois problèmes qui suivent.

Probleme I. — Trouver la somme de la série

dans le cas où l'on attribue à la variable z une valeur comprise entre les limites

$$z=-1, z=+1.$$

Solution. — Soit $\pi(\mu)$ la somme cherchée. En désignant par μ' une quantité réelle différente de μ, on trouvera

L'équation précédente, étant semblable à l'équation (2) du Chapitre VIII (§ V), se résoudra de la même manière ; et l'on en conclura

$$\Pi(M)=RM(\cos MT+-1\sin MT),$$

le module r et l'angle t étant deux quantités constantes par rapport à μ, mais qui dépendent nécessairement de z et de θ. On aura donc, entre les limites $z=-1$, $z=+1$,

Pour déterminer les valeurs inconnues de r et de t, on fera, dans l'équation (17), $\mu=1$, et l'on en tirera

ou, ce qui revient au même,

$$1+z\cos\Theta=R\cos T, z\sin\Theta=R\sin T.$$

On trouvera par suite

$$R=(1+2z\cos\Theta+z2)12;$$

puis, en observant que $\cos t=1+z\cos\theta r$ reste positif pour toute valeur numérique de z inférieure à l'unité, et désignant par k un nombre entier quelconque,

$$T=\operatorname{ARCTANG}z\sin\Theta 1+z\cos\Theta\pm 2K\Pi.$$

Cela posé, si l'on fait, pour abréger,

l'équation (17) deviendra

$$(z=-1, z=+1),$$

la valeur de t étant déterminée par la formule

dans laquelle le nombre entier k ne peut dépendre que des quantités z et θ.

Remarquons à présent que le premier membre de l'équation (19) est, entre les limites $z=-1$, $z=+1$, une fonction continue de z, qui varie avec z par degrés insensibles, quelle que soit la valeur de μ. Le second membre de l'équation devra donc jouir de la même propriété, ou, en d'autres termes, les quantités

$$(1+2z\cos\Theta+z2)M2\cos MT, (1+2z\cos\Theta+z2)M2\sin MT$$

et, par conséquent, les suivantes

devront varier avec z par degrés insensibles, pour toutes les valeurs possibles de μ. Or cette condition ne peut être remplie que dans le cas où t lui-même varie avec z par degrés insensibles. En effet, si un accroissement infiniment petit de z produisait un accroissement fini de t, de manière à changer t en t+a, a désignant une quantité finie, les cosinus et sinus des deux arcs

$$\mathrm{MT,M(T+A)}$$

ne pourraient demeurer sensiblement égaux, qu'autant que la valeur numérique du produit μa serait à très peu près un multiple de la circonférence, ce qui ne peut être vrai que pour des valeurs particulières du coefficient μ, et non pas généralement pour des valeurs finies quelconques de ce coefficient. On doit donc conclure que l'arc $t=s\pm 2k\pi$ est fonction continue de z; et, comme des deux quantités s,k, la première, déterminée par l'équation (18), varie avec z d'une manière continue entre les limites $z=-1$, $z=+1$, tandis que la seconde, assujettie à rester toujours entière, n'admet que des variations finies d'une ou de plusieurs unités, il est clair que, pour satisfaire à la condition énoncée, la quantité s devra varier toute seule, et la quantité k demeurer constante. Cette dernière quantité sera donc indépendante de z, et, pour en connaître la valeur dans tous les cas possibles, il suffira de la chercher en supposant $z=0$. Comme on a, dans cette hypothèse, $s=0$, $t=\pm 2k\pi$, on tirera de l'équation (19)

quelle que soit la valeur de μ, et par suite

$$\mathrm{K=0.}$$

Cela posé, la formule (20) donnera généralement

$$\mathrm{T=S,}$$

et l'équation (19) se trouvera réduite à

$$\mathrm{(Z=-1,Z=+1).}$$

De plus, si l'on a égard à la formule (27) du Chapitre VII (§ IV), on reconnaîtra facilement que le second membre de l'équation (21) peut être représenté par la notation

$$\mathrm{[1+Z(COS\Theta+-1SIN\Theta)]M.}$$

On aura donc, en supposant toujours la valeur de z comprise entre les limites −1 et +1,

$$\mathrm{(Z=-1,Z=+1),}$$

En d'autres termes, l'équation (20) du Chapitre VI (§ IV), savoir

subsistera, non seulement si l'on attribue à la variable x des valeurs réelles comprises entre les limites −1,+1, mais encore si l'on fait

la valeur numérique de z étant inférieure à l'unité.

Corollaire I. — La formule (21), comme toutes les équations imaginaires, équivaut à deux équations réelles, qu'on obtient en égalant de part et d'autre les parties réelles et les coefficients de −1. On trouvera de cette manière

$$(z=-1, z=+1),$$

la valeur de s étant toujours déterminée par l'équation (18).

Corollaire II. — Si dans les formules (22) et (23) on pose $\mu=-1$, et que l'on y remplace z par $-z$, on obtiendra les équations (8) et (10) du § I.

Corollaire III. — Si l'on pose $\theta=\pi 2$ ou, ce qui revient au même,

$$\cos\theta=0, \sin\theta=1,$$

la valeur de s, donnée par la formule (18), deviendra

$$s=\operatorname{arctang} z,$$

et restera comprise entre les limites $-\pi 4, +\pi 4$ pour toute valeur numérique de z inférieure à l'unité. Dans la même hypothèse, on aura évidemment

$$z=\operatorname{tang} s=\frac{\sin s}{\cos s},$$

$$(1+2z\cos\theta+z2)^{m}2=(\sec s)^{m}=1(\cos s)^{m},$$

et l'on tirera des équations (23), mais seulement pour les valeurs de s comprises entre les limites dont il s'agit,

$$(s=-\pi 4, s=+\pi 4).$$

Par conséquent, si dans les formules (12) du Chapitre VII (§ II) on remplace le nombre entier m par une quantité quelconque μ, ces formules, qui avaient lieu pour toutes les valeurs réelles possibles de l'arc z, ne seront plus vraies généralement que pour des valeurs numériques de cet arc inférieures à $\pi 4$.

Problème II. — Trouver la somme de la série

quelle que soit la valeur numérique de z.

Solution. — Si dans les équations (18) et (21) on remplace z par αz et μ par 1α, α désignant une quantité infiniment petite, on trouvera, pour toutes les valeurs de αz comprises entre les limites $-1, +1$, ou, ce qui revient au même, pour toutes les valeurs de z comprises entre les limites $-1\alpha, +1\alpha$,

$$(z=-1a, z=+1a),$$

l'arc s étant déterminé par la formule

Si maintenant on fait décroitre indéfiniment dans l'équation (25) la valeur numérique de α, on trouvera, en passant aux limites,

$$(z=-\infty, z=+\infty).$$

Il reste à chercher la limite du produit

$$(1+2az\cos\theta+a2z2)^{\frac{1}{2}a}(\cos sa+-1\sin sa),$$

et, par conséquent, celle de chacune des quantités

$$(1+2\alpha z\cos\theta+\alpha^2z^2)^{\frac{1}{2}}=\alpha^s.$$

Or, en premier lieu, si l'on fait

$$2\alpha z\cos\theta+\alpha^2z^2=\beta,$$

on en conclura

$$(1+2\alpha z\cos\theta+\alpha^2z^2)^{\frac{1}{2}}=(1+\beta)z\cos\theta+\alpha z^2\frac{\beta^2}{2}$$

et, par suite,

$$\lim(1+2\alpha z\cos\theta+\alpha^2z^2)^{\frac{1}{2}}=\left[\lim\frac{(1+\beta)-1}{\beta}\right]\lim(z\cos\theta+\alpha z^2\frac{\beta}{2})=ez\cos\theta.$$

De plus, la valeur de s donnée par l'équation (26) étant infiniment petite, le rapport

$$\frac{\sin s}{\cos s}=\frac{\sin s}{s}\cos s$$

aura pour limite l'unité ; et, comme on tire de l'équation (26)

$$\frac{\sin s}{\alpha}=\frac{z\sin\theta}{1+\alpha z\cos\theta},\quad s=\frac{\alpha z\sin\theta}{1+\alpha z\cos\theta},$$

on trouvera, en passant aux limites,

$$\lim(s)=z\sin\theta.$$

Cela posé, il est clair que le second membre de l'équation (25) aura pour limite l'expression imaginaire

$$ez\cos\theta[\cos(z\sin\theta)+-1\sin(z\sin\theta)].$$

en sorte que la formule (27) deviendra

$$(z=-\infty,z=+\infty).$$

la valeur de la variable réelle z étant complètement arbitraire, puisqu'elle peut être choisie à volonté entre les valeurs extrêmes $z=-\infty$, $z=+\infty$.

Corollaire I. — Si, en comparant les deux membres de l'équation (28), on égale de part et d'autre : 1 les parties réelles ; 2 les coefficients de -1 on obtiendra les deux équations réelles

$$(z=-\infty,z=+\infty).$$

Corollaire II. - Si l'on suppose $\theta=\pi$ 2 o ou, ce qui revient au même,

$$\cos\theta=0,\sin\theta=1,$$

les équations (29) deviendront

$$(z=-\infty,z=+\infty).$$

Ces dernières subsistant, aussi bien que les équations (29), pour des valeurs réelles quelconques de z, il en résulte que les fonctions sinz et cosz sont toujours développables en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable qu'elles renferment. Comme cette proposition mérite d'être remarquée, je vais la démontrer ici directement.

La série

étant convergente pour toutes les valeurs réelles possibles de la variable x, restera convergente (en vertu du théorème I, corollaire I) pour des valeurs imaginaires quelconques de cette même variable. Si l'on multiplie la somme de cette série par la somme de la série semblable y

en ayant égard à la fois au théorème III du § I et à la formule (6) du Chapitre VIII (§ IV), on trouvera, pour toutes les valeurs possibles réelles ou imaginaires attribuées à x et à y,

Lorsque, dans l'équation qui précède, on remplace x par x−1 et y par y−1, on obtient la suivante

dans laquelle on pourra, si l'on veut, supposer réelles les variables x et y. Faisons, dans cette hypothèse,

$$\Pi(x)=1+x-11-x21.2-x3-11.2.3+....$$

L'équation (32) deviendra

$$\Pi(x)\Pi(y)=\Pi(x+y);$$

et l'on en conclura [voir le Chapitre VIII, § V, équation (12)]

$$\Pi(x)=Ax(\cos bx+-1\sin bx)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(x=-\infty,x=+\infty),$$

les lettres A et b représentant deux constantes inconnues dont la première est nécessairement positive. On aura par suite

$$(x=-\infty,x=+\infty).$$

Pour déterminer les constantes inconnues A et b, il suffira d'observer :

1 que les formules (34) doivent subsister lorsqu'on y change x en −x, et que, pour remplir cette condition, il faut nécessairement supposer

$$Ax=A-x,$$

par conséquent

$$A=1;$$

2 que, si, après avoir divisé par x les deux membres de la seconde des formules (34), on fait converger la variable x vers la limite zéro, le premier membre convergera vers la limite 1, et le second membre, savoir

$$Axsinbxx=Axsinbxbx\times b,$$

vers la limite b; d'où résulte l'équation

$$b=1.$$

Cela posé, les formules (33) et (34) deviendront respectivement

$$(x=-\infty,x=+\infty),$$

$$(x=-\infty,x=+\infty).$$

Si dans les deux dernières on remplace la variable x par la variable z, on retrouvera les formules (30).

Il est essentiel d'observer que l'équation (35), lorsqu'on y suppose $x=z\sin\theta$, fournit le développement de

$$\cos(z\sin\theta)+-1\sin(z\sin\theta)$$

suivant les puissances ascendantes de z. Si l'on multiplie ce développement par celui de

$$ez\cos\theta,$$

en ayant égard à la formule (31), qui subsiste pour toutes les valeurs réelles et imaginaires des variables qu'elle renferme, on obtiendra précisément l'équation (28).

Problème III. — Trouver la somme de la série

dans le cas où l'on attribue à la variable z une valeur comprise entre les limites

$$z=-1,z=+1.$$

Solution. — Si l'on prend à l'ordinaire la lettre l pour la caractéristique des logarithmes néperiens, on aura

$$(1+2z\cos\theta+z2)12m=e12ml(1+2z\cos\theta+z2),$$

et par suite l'équation (21) pourra être mise sous la forme

$$=e12ml(1+2z\cos\theta+z2)(\cos ms+-1\sin ms)$$

$$(z=-1,z=+1),$$

la valeur de s étant toujours donnée par la formule (18). Si dans l'équation précédente on développe les deux facteurs du second membre en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de μ, puis, que l'on effectue le produit des deux développements à l'aide de la formule (31), on trouvera

$$1+m1z(\cos\theta+-1\sin\theta)+m(m-1)1.2z2(\cos2\theta+-1\sin2\theta)+\ldots$$
$$=1+m1[12l(1+2z\cos\theta+z2)+s-1]+m21.2[12l(1+2z\cos\theta+z2)+s-1]2+\ldots$$

$$(z=-1,z=+1).$$

Enfin, si, après avoir retranché l'unité de chaque membre, puis divisé les deux membres par μ, on fait converger la quantité μ vers la limite zéro, on obtiendra l'équation

$$(z=-1,z=+1).$$

Corollaire I. — Si l'on égale, dans les deux membres de l'équation (37) : 1 les parties réelles ; 2 les coefficients de −1, et que l'on remette pour s sa valeur déterminée par la formule (18), on obtiendra les deux équations réelles

$$(z=-1, z=+1).$$

Corollaire II. — Si l'on suppose $\theta=\frac{\pi}{2}$ ou, ce qui revient au même,

$$\cos\theta=0, \sin\theta=1,$$

la seconde des équations (38) deviendra

La série qui forme le premier membre de cette dernière équation étant convergente, non seulement pour toute valeur numérique de z inférieure à l'unité, mais aussi lorsqu'on suppose z=1 (voir le Chapitre VI, § III, théorème III), il en résulte que l'équation subsistera dans cette dernière hypothèse ; et, comme on a d'ailleurs

$$\operatorname{arctang}(1)=\frac{\pi}{4},$$

on en conclura

La formule (40) peut servir à calculer par approximation la valeur de π, c'est-à-dire le rapport de la circonférence au diamètre.

§ III. — Notations employées pour représenter quelques fonctions imaginaires auxquelles on est conduit par la sommation des séries convergentes. Propriétés de ces mêmes fonctions.

Considérons les six notations

$$Ax, \sin x, \cos x, Lx, \operatorname{arcsin} x, \operatorname{arccos} x.$$

Si l'on attribue à la variable x une valeur réelle, ces six notations représenteront, comme l'on sait, autant de fonctions réelles de x, qui, prises deux à deux, seront inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire données par des opérations inverses, pourvu toutefois que, A désignant un nombre, L exprime la caractéristique des logarithmes dans le système dont la base est A. Il reste à fixer le sens de ces mêmes notations, dans le cas où la variable x devient imaginaire. C'est ce que nous ferons ici, en commençant par les trois premières.

On a prouvé que, dans le cas où la variable x est supposée réelle, les trois fonctions représentées par

$$Ax, \sin x, \cos x$$

sont toujours développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable. On aura, en effet, dans cette hypothèse,

la caractéristique l désignant un logarithme népérien. De plus, comme (en vertu du théorème I, corollaire I, § II) les séries qu'on vient de rappeler restent convergentes pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable x, on est convenu d'étendre les équations (1) à tous les cas possibles, et de les considérer comme pouvant servir à fixer, lors même que la variable devient imaginaire, le sens des trois notations

$$Ax, \sin x, \cos x$$

Observons maintenant que, si dans la première des équations (1) on fait

$$A=e,$$

e désignant la base des logarithmes népériens, on en tirera

puis, en écrivant successivement, au lieu de x, xlA,x−1,−x−1,

On aura par suite

la variable x pouvant toujours être ou réelle, ou imaginaire. De plus, l'équation (31) (§ II) donnera, quels que soient x et y,

Cela posé, il deviendra facile d'obtenir sous forme finie les valeurs de Ax,sinx et cosx correspondantes à des valeurs imaginaires de la variable x. En effet, si l'on suppose

α,β représentant des quantités réelles, on conclura des deux premières équations (4) jointes à l'équation (5)

et des deux dernières équations (4)

puis, en remettant pour x sa valeur α+β−1, et développant les seconds membres,

Ainsi, dans l'hypothèse admise, les trois notations

$$Ax,\sin x,\cos x$$

désignent respectivement les trois expressions imaginaires

$$Ax(\cos bLA+-1\sin bLA),$$

$$eb+e-b2\sin a+eb-e-b2\cos a-1,$$

$$eb+e-b2\cos a-eb-e-b2\sin a-1.$$

Dans la même hypothèse, si l'on fait

$$A=e,$$

l'équation (7) fournira pour la notation

$$ex$$

la valeur suivante :

$$ea(\cos b+-1\sin b).$$

Les valeurs des trois fonctions

$$Ax,\sin x,\cos x$$

se trouvant fixées par ce qui précède, dans le cas où la variable x devient imaginaire, nous avons encore à chercher quelles définitions on doit donner, dans le même cas, des fonctions inverses

ou plus généralement quel sens on doit alors attribuer aux notations

$$L((x)),\arcsin((x)),\arccos((x)).$$

Supposons toujours

α,β désignant deux quantités réelles qui peuvent être remplacées par le module ρ et l'arc réel θ. Toute expression imaginaire u+v−1 propre à vérifier l'équation

sera ce qu'on appelle un logarithme imaginaire de x pris dans le système dont la base est A. Comme l'équation (10) fournit, ainsi qu'on le verra ci-après, plusieurs valeurs de u+v−1, dans le cas même où β se réduit à zéro, il en résulte que toute expression, soit imaginaire, soit réelle, a plusieurs logarithmes imaginaires. Lorsque l'on voudra désigner indistinctement un quelconque de ces logarithmes (parmi lesquels on doit comprendre le logarithme réel, s'il y en a), on emploiera la caractéristique L ou l suivie de doubles parenthèses, en ayant soin d'énoncer dans le discours la base du système. Nous choisirons de préférence la caractéristique l, lorsqu'il s'agira de logarithmes népériens pris dans le système dont la base est e. En vertu de ces conventions, les divers logarithmes des quantités réelles ou expressions imaginaires

se trouveront respectivement désignés, dans le système dont la base est A, par

et, dans le système népérien dont la base est e, par

$$\mathrm{L}((1)),\mathrm{L}((-1)),\mathrm{L}((\mathrm{A}+\mathrm{B}-1)),\mathrm{L}((\mathrm{X})).$$

Cela posé, pour déterminer ces divers logarithmes, il suffira de résoudre les problèmes suivants.

Problème I. — Trouver les diverses valeurs réelles ou imaginaires de l'expression

$$\mathrm{L}((1)).$$

Solution. — Soit u+v−1 l'une de ces valeurs, u,v désignant deux quantités réelles. On aura, d'après la définition même de l'expression l((1)),

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{EU}(\mathrm{COSV}+-1\mathrm{SINV})=1.$$

On tirera de cette dernière équation

$$\mathrm{EU}=1,$$

$$\mathrm{COSV}+-1\mathrm{SINV}=1$$

et, par suite,

$$\mathrm{U}=0,$$

$$\mathrm{COSV}=1,\mathrm{SINV}=0,\mathrm{V}=\pm 2\mathrm{K}\Pi,$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités u et v étant ainsi déterminées, les diverses valeurs de u+v−1 propres à vérifier l'équation (11) seront évidemment comprises dans la formule

$$\mathrm{U}+\mathrm{V}-1=\pm 2\mathrm{K}\Pi-1.$$

En d'autres termes, les diverses valeurs de l((1)) seront données par l'équation

Parmi ces valeurs une seule est réelle, savoir, celle qu'on obtient en posant k=0, et qui se réduit elle-même à zéro. C'est pour représenter cette valeur réelle qu'on emploie communément la nota-

tion simple

$$\text{L}(1)\text{OUL}1.$$

Quant aux valeurs imaginaires de l((1)), elles sont évidemment en nombre infini.

Problème II. — Trouver les diverses valeurs de l'expression

$$\text{L}((-1)).$$

Solution. — Soit u+v−1 l'une de ces valeurs, u,v désignant deux quantités réelles. On aura, d'après la définition même de l'expression l((−1)),

ou, ce qui revient au même,

$$\text{EU}(\text{COSV}+-1\text{SINV})=-1.$$

On tirera de cette dernière équation

$$\text{EU}=1,$$

$$\text{COSV}+-1\text{SINV}=-1$$

et, par suite,

$$\text{U}=0,$$

$$\text{COSV}=-1,\text{SINV}=0,\text{V}=\pm(2\text{K}+1)\Pi,$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités u,v étant ainsi déterminées, les diverses valeurs de u+v−1 propres à vérifier l'équation (13) se trouveront évidemment comprises dans la formule

$$\text{U}+\text{V}-1=\pm(2\text{K}+1)\Pi-1.$$

En d'autres termes, les diverses valeurs de l((−1)) seront données par l'équation

Par conséquent ces valeurs seront toutes imaginaires et en nombre infini.

Problème III. — Trouver les diverses valeurs de l'expression

$$\text{L}((\text{A}+\text{B}-1)).$$

Solution. — Soit u+v−1 l'une de ces valeurs. On aura, d'après la définition même de l'expression l((α+β−1)),

ou, ce qui revient au même,

$$\text{EU}(\text{COSV}+-1\text{SINV})=\text{P}(\text{COS}\Theta+-1\text{SIN}\Theta),$$

ρ désignant le module de α+β−1. On tirera de l'équation précédente

$$\text{EU}=\text{P},$$

$$\text{COSV}+-1\text{SINV}=\text{COS}\Theta+-1\text{SIN}\Theta$$

et, par suite,

$$u=l(p),$$

$$\cos v=\cos\theta,\sin v=\sin\theta,v=\theta\pm 2k\pi,$$

k représentant un nombre entier quelconque. Les quantités u,v étant ainsi déterminées, les diverses valeurs de u+v−1 se trouveront comprises dans la formule

$$u+v-1=l(p)+\theta-1\pm 2k\pi-1.$$

En d'autres termes, les diverses valeurs de

seront données par l'équation

Il est bon d'observer que dans cette dernière équation la valeur de ρ est complètement déterminée et égale à

$$a2+b2,$$

tandis que l'arc θ peut être l'un quelconque de ceux qui ont pour cosinus αα2+β2, et pour sinus βα2+β2.

Corollaire I. — Si l'on fait, pour plus de commodité,

il sera facile d'introduire dans la formule (16) l'arc ζ au lieu de l'arc θ. En effet, on pourra supposer

$$\theta=z$$

si α est positif, et

$$\theta=z+\pi$$

si α est négatif. On trouvera, dans la première hypothèse,

et, dans la seconde,

Si dans cette dernière équation on fait, en particulier,

$$a+b-1=-1c'est\text{-}à\text{-}direa=-1,b=0$$

et, par suite,

$$p=1,z=0,$$

on obtiendra la suivante

Il en résulte qu'on aura généralement, pour des valeurs négatives de α,

Supposons maintenant que dans les formules (18) et (21) on substitue à la place de ρ et de ζ leurs valeurs

$$(a2+b2)12etarctangba.$$

On trouvera, pour les diverses valeurs de

1 Si α est positif,

2 Si α est négatif,

Corollaire II. — Si, dans les équations (22) et (23), on suppose β=0, elles donneront respectivement, pour des valeurs positives de α,

et, pour des valeurs négatives de α,

k devant toujours être un nombre entier. Il suit de ces dernières formules qu'une quantité réelle α a une infinité de logarithmes imaginaires, parmi lesquels se trouve un seul logarithme réel, dans le cas où α est positif. On obtient ce logarithme réel, désigné par la notation simple l(α) ou lα, en posant, dans l'équation (24), k=0.

Scolie I. — Parmi les diverses valeurs de l((1)), ainsi qu'on l'a déjà remarqué, il en est une égale à zéro, que l'on indique par la notation l(1) ou l1, en faisant usage de parenthèses simples, ou même les supprimant tout à fait. Si l'on substitue cette valeur particulière dans l'équation (22), on obtiendra une valeur correspondante de

que l'analogie nous porte à indiquer, à l'aide de parenthèses simples, par la notation

$$\mathrm{L}(A+B-1).$$

C'est ce que nous ferons désormais. Par suite, on aura, en supposant α positif,

Si, au contraire, α devient négatif, −α étant alors positif, on trouvera

ou, ce qui revient au même,

En faisant usage des notations précédentes, on réduira les équations (22) et (23) à celles qui suivent

la première se rapportant à des valeurs positives de α, et la seconde à des valeurs négatives de la même quantité. En d'autres termes, suivant que la partie réelle d'une expression imaginaire représentée par x sera positive ou négative, on aura

ou bien

En résumant ce qu'on vient de dire, on voit que la notation

a une signification précise déterminée par l'équation (26), dans le cas seulement où la partie réelle de l'expression imaginaire représentée par x est positive, tandis que la notation

a, dans tous les cas possibles, une infinité de valeurs déterminées par l'une des équations (28) et (29).

Problème IV. — Trouver les diverses valeurs de l'expression

la caractéristique L indiquant un logarithme pris dans le système dont la base est A.

Solution. — Soit toujours u+v−1 l'une des valeurs de l'expresque l'on considère. On aura, d'après la définition même de cette expression,

ou, ce qui revient au même,

$$e(u+v-1)lA=a+b-1,$$

l étant la caractéristique relative aux logarithmes népériens. On en conclura

$$(u+v-1)lA=l((a+b-1))$$

et, par suite,

$$u+v-1=l((a+b-1))lA$$

ou, en d'autres termes,

Cette dernière équation subsiste dans le cas même où β s'évanouit, c'est-à-dire lorsque l'expression imaginaire α+β−1 se réduit à une quantité réelle.

Scolie. — Si l'on suppose la quantité α positive, à la valeur particulière de l((α+β−1)) représentée par l(α+β−1) correspondra une valeur particulière de L((α+β−1)), que l'analogie nous porte à désigner à l'aide de parenthèses simples par la notation

$$L(a+b-1).$$

Cela posé, on aura, pour des valeurs positives de α,

De plus, si dans l'équation (33) on substitue pour l((α+β−1)) sa valeur tirée successivement des formules (28) et (29), on trouvera, pour des valeurs positives de la quantité α,

et, pour des valeurs négatives de la même quantité,

En d'autres termes, suivant que la partie réelle d'une expression imaginaire représentée par x sera positive ou négative, on aura

ou bien

k désignant un nombre entier quelconque. On peut ajouter que des deux formules précédentes la première subsiste pour toutes les valeurs réelles positives x, et la seconde pour toutes les valeurs réelles négatives de la même variable.

Après avoir calculé les divers logarithmes de l'expression imaginaire

proposons-nous de trouver les arcs imaginaires dont le cosinus est égal à x. Si l'on désigne par

$$arccos((x))=u+v-1$$

l'un quelconque de ces arcs, on aura, pour déterminer u+v−1 l'équation

$$cos(u+v-1)=a+b-1$$

ou, ce qui revient au même, la suivante

laquelle se divise en deux autres, savoir

Àces dernières on peut substituer le système équivalent des deux formules

De plus, si l'on élimine v entre les formules (41), on en tirera successivement

$$a2cos2u-b2sin2u=1,$$

$$\sin 4u-(1-a2-b2)\sin 2u-b2=0;$$

puis, en observant que sin2u est nécessairement une quantité positive,

$$\sin 2u=1-a2-b22+(1-a2-b22)2+b2.$$

On aura, par suite,

$$\cos 2u=1+a2+b22-(1+a2+b22)2-a2=a21+a2+b22+(1+a2+b22)2-a2;$$

et, comme [en vertu de la première des équations (40)] cosu et α doivent être de même signe, on trouvera, en extrayant les racines carrées,

Cela posé, si l'on fait, pour plus de commodité,

on conclura des équations (41) et (42)

k désignant un nombre entier quelconque, et les deux lettres U,V devant être affectées du même signe ; en sorte qu'on aura définitivement

Parmi les diverses valeurs de arccos((x)) que fournit l'équation précédente, la plus simple est celle qu'on obtient en posant k=0 dans le premier terme du second membre, et prenant l'autre terme avec le signe +. Nous la désignerons à l'aide de parenthèses simples, et nous écrirons en conséquence

$$\arccos(x)=U+V-1$$

ou même, en supprimant tout à fait les parenthèses,

Dans le cas particulier où, β étant nul, la quantité α reste comprise entre les limites −1,+1, la formule (46) se réduit, comme on devait s'y attendre, à l'équation identique

$$\arccos a=\arccos a.$$

D'autre part, si l'on observe que ±2kπ représente un quelconque des arcs qui ont l'unité pour cosinus, on reconnaîtra que l'équation (45) peut être mise sous la forme

Il est encore essentiel de remarquer que, dans le cas où l'on suppose β=0 et la valeur numérique de α supérieure à l'unité, l'expression

$$\arccos a$$

obtient toujours une valeur imaginaire. Cette valeur sera donnée par l'équation

si α est positif, et par la suivante

si α devient négatif.

Considérons maintenant les arcs imaginaires dont le sinus est x=α+β−1. Si l'on désigne un quelconque de ces arcs par

$$\arcsin((x))=u+v-1,$$

on trouvera, en ayant égard à la seconde des équations (9),

et l'on en conclura

Si, dans la formule précédente, on substitue les diverses valeurs de arccos((x)), dont l'une a été désignée par la notation arccos(x) ou arccosx on obtiendra les diverses valeurs de arcsin((x)), dont l'une

sera désignée par la notation arccos(x) ou arcsinx, et déterminée par l'équation

Àl'aide des principes que nous venons d'établir, il est aisé de reconnaître les propriétés les plus essentielles dont jouissent les fonctions de la variable imaginaire x représentées par les notations

$$Ax, \cos x, \sin x, Lx, \arccos x, \arcsin x.$$

Pour obtenir ces propriétés, il suffit d'étendre les formules que ces fonctions vérifient dans le cas où la variable x est réelle, au cas où la variable devient imaginaire. Cette extension s'effectue d'ordinaire sans difficulté pour chacune des trois fonctions

$$Ax, \cos x, \sin x.$$

Ainsi, par exemple, A,B,C,... désignant plusieurs nombres, on prouvera facilement que les équations

subsistent également pour des valeurs réelles et pour des valeurs imaginaires quelconques des variables x,y,z,.... Mais, si l'on considère des formules dans lesquelles entrent les fonctions inverses

on trouvera le plus souvent que ces formules, étendues au cas où les variables deviennent imaginaires, ne subsistent plus qu'avec des restrictions considérables, et pour certaines valeurs des variables dont il s'agit. Par exemple, si l'on fait

et, si l'on désigne par μ une quantité réelle quelconque, on reconnaîtra que la formule

subsiste seulement dans le cas où, α,α′,α″,... étant positifs, la somme

$$\arctang ba + \arctang b'a' + \arctang b''a'' + \dots$$

reste comprise entre les limites $-\pi 2, +\pi 2$; et la formule

dans le cas où, α étant positif, le produit

$$M \arctang ba$$

reste compris entre les mêmes limites.

Chapitre X

Considérons une équation algébrique dont le premier membre soit une fonction rationnelle et entière de la variable x. Si n représente le degré de cette équation, elle pourra se mettre sous la forme

a0,a1,a2,...,an−1,an étant des coefficients constants réels ou imaginaires. On appelle racine de cette même équation toute expression réelle ou imaginaire qui, substituée à la place de l'inconnue x, rend le premier membre égal à zéro. Supposons d'abord, pour fixer les idées, que les constantes a0,a1,a2,...,an se réduisent à des quantités réelles. Alors, si deux valeurs réelles de x substituées dans le premier membre de l'équation (1) fournissent deux résultats entre lesquels zéro se trouve

compris, c'est-à-dire deux résultats de signes contraires, on conclura du Chapitre II (§ II, théorème IV) que l'équation (1) admet une ou plusieurs racines réelles comprises entre ces valeurs. Il en résulte que toute équation de degré impair aura au moins une racine réelle. En effet, si n est un nombre impair, le premier membre de l'équation (1) changera de signe, avec son premier terme a_0x^n, toutes les fois qu'en attribuant à la variable x des valeurs numériques très considérables on fera passer cette variable du positif au négatif (voir le théorème VIII du Chapitre II, § I).

Lorsque n devient un nombre pair, la quantité x^n demeurant positive tant que la variable x est réelle, le premier membre de l'équation (1) finit par être, pour de très grandes valeurs numériques de x, constamment de même signe que a_0. Si, dans la même hypothèse, a_n et a_0 sont de signes contraires, le premier membre changera évidemment de signe, lorsqu'on passera d'une très grande valeur numérique de x à une très petite, en laissant la variable toujours positive ou toujours négative. L'équation (1) aura donc alors deux racines réelles : l'une positive et l'autre négative.

Lorsque, n étant un nombre pair, a_0 et a_n sont de même signe, il peut arriver que le premier membre de l'équation (1) reste, pour toutes les valeurs réelles de x, de même signe que a_0, sans jamais s'évanouir. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour chacune des équations binômes

$$x^2+1=0, x^4+1=0, x^6+1=0, \ldots.$$

Dans un cas semblable, l'équation (1) n'aura plus de racines réelles ; mais on y satisfera en prenant pour x une expression imaginaire

$$u+v\sqrt{-1},$$

u,v désignant deux quantités réelles et finies. Cette proposition et celles que nous venons d'établir se trouvent renfermées dans le théorème suivant :

Théorème I. — Quelles que soient les valeurs réelles ou les valeurs imaginaires des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, l'équation

dans laquelle n désigne un nombre entier égal ou supérieur à l'unité, a toujours des racines réelles ou imaginaires.

Démonstration. — Désignons, pour abréger, par f(x) le premier membre de l'équation (1): f(x) sera une fonction réelle ou imaginaire, mais toujours entière, de la variable x; et, puisque toute expression réelle u se trouve comprise comme cas particulier dans une expression imaginaire $u+v\sqrt{-1}$, il suffira, pour établir le théorème énoncé, de démontrer généralement qu'on peut satisfaire à l'équation

en prenant

puis attribuant aux nouvelles variables u et v des valeurs réelles. Or, si l'on substitue la valeur précédente de x dans la fonction f(x), le résultat sera de la forme

$$\Phi(u,v)+\sqrt{-1}\chi(u,v),$$

$\varphi(u,v), \chi(u,v)$ désignant deux fonctions réelles et entières des variables u et v. Cela posé, l'équation (1) deviendra

$$\Phi(u,v)+\sqrt{-1}\chi(u,v)=0;$$

et, pour y satisfaire, il suffira de vérifier les deux équations réelles

ou, ce qui revient au même, l'équation unique

Donc, si l'on pose, pour plus de commodité,

il restera seulement à montrer que l'on peut obtenir des valeurs réelles de u et de v propres à faire évanouir la fonction

$$F(u,v).$$

On y parviendra sans peine à l'aide des considérations suivantes.

D'abord, pour déterminer la valeur générale de la fonction F(u,v), on représentera chacune des constantes réelles ou imaginaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, ainsi que la variable imaginaire $u+v\sqrt{-1}$, par le produit d'un module et d'une expression réduite ; et l'on écrira, en conséquence,

On aura, par suite,

et l'on en déduira

Il résulte de cette dernière formule que la fonction F(u,v), toujours évidemment positive, est le produit de deux facteurs, dont l'un, savoir

$$r_{2n}=(u^2+v^2)^n,$$

croîtra indéfiniment si l'on attribue aux variables u,v, ou à l'une d'elles seulement, des valeurs numériques de plus en plus grandes, tandis que l'autre facteur convergera dans la même hypothèse vers la limite ρ_{02}, c'est-à-dire vers une limite finie différente de zéro. On en conclura que la fonction F(u,v) ne peut conserver une valeur finie qu'autant que les deux quantités u,v reçoivent elles-mêmes des valeurs de cette espèce, et devient infiniment grande dès que l'une des deux quantités croît indéfiniment. De plus, comme l'équation (4) donne pour F(u,v) une fonction entière, et par conséquent une fonction continue des variables u et v, il est clair que F(u,v), variant avec elles par degrés insensibles, et ne pouvant s'abaisser au-dessous de zéro, atteindra une ou plusieurs fois une certaine limite inférieure qu'elle ne dépassera jamais. Représentons par A cette limite, et par u_0, v_0 un des systèmes de valeurs finies de u et de v, pour lesquels F(u,v) se réduit à A, en sorte qu'on ait identiquement

La différence $F(u,v)-F(u_0,v_0)$ ne s'abaissera jamais au-dessous de zéro ; par conséquent, si l'on fait

α désignant une quantité infiniment petite, et h,k deux quantités finies, l'expression

$$F(u_0+\alpha h, v_0+\alpha k)-F(u_0,v_0)$$

ne sera jamais négative. En partant de ce principe, il sera facile de déterminer la valeur de la constante A, ainsi qu'on va le faire voir.

Si dans l'expression imaginaire $f(u+v\sqrt{-1})$ on substitue pour u et v leurs valeurs données par les formules (11), cette expression, devenant alors une fonction imaginaire et entière du produit

$$\alpha(h+k\sqrt{-1}),$$

pourra être développée suivant les puissances entières et ascendantes de ce même produit. En désignant par

$$R\ (\cos T\ +-1\sin T\ ),R1(\cos T1+-1\sin T1),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,R_N(\cos T_N+-1\sin T_N)$$

les coefficients imaginaires de ces puissances dont quelques-uns peuvent se réduire à zéro, et faisant, pour plus de commodité,

on obtiendra l'équation

dans laquelle les termes du second membre, et par conséquent les modules

$$R,R1,\ldots,R_N,$$

ne sauraient s'évanouir tous en même temps. Comme on aura d'ailleurs

on conclura de l'équation (13)

et, par suite,

Si dans cette dernière formule on pose $\alpha=0$, on en tirera

$$F(u0,v0)=R2.$$

Donc R2=A, R=A12. Si maintenant on développe le second membre de l'équation (16) suivant les puissances descendantes de R, et que l'on y remplace ensuite R par A12, cette équation deviendra

et, si l'on fait passer dans le premier membre la quantité A=F(u0,v0), on trouvera définitivement

Cela posé, puisque la différence

$$F(u0+ah,v0+ak)-F(u0,v0)$$

ne doit jamais s'abaisser au-dessous de la limite zéro, il faudra de toute nécessité que, pour de très petites valeurs numériques de α, le second membre de l'équation précédente, et par suite le premier terme de ce second membre, c'est-à-dire le terme qui renferme la plus petite puissance de α, ne puisse devenir négatif. Or, en désignant par Rm la première des quantités

$$R1,R2,\ldots,R_N$$

qui obtient une valeur différente de zéro, on trouvera, pour le terme dont il s'agit,

$$2A12_{AMPM}R_M\cos(T_M-T+m\theta),$$

si A n'est pas nul, et

$$a2_{MPP}2_MR_M2$$

dans l'hypothèse contraire. De plus, comme, la valeur de l'arc étant tout à fait indéterminée, on peut en disposer de manière à donner au facteur

$$\cos(T_M-T+m\theta),$$

et par conséquent au produit

$$2A_{12}\alpha_m\beta_m R_m \cos(T_m - T + m\theta),$$

tel signe que l'on voudra, il est clair que la seconde hypothèse reste seule admissible. On aura donc nécessairement

ce qui réduira l'équation (10) à

Il en résulte que la fonction F(u,v) s'évanouira si l'on attribue aux variables u,v les valeurs réelles u_0, v_0; et, par suite, que l'on vérifiera l'équation

en prenant

$$x = u_0 + v_0 \sqrt{-1}.$$

En d'autres termes, $u_0 + v_0\sqrt{-1}$ sera une racine de l'équation

La démonstration précédente du théorème I, quoique différente en plusieurs points de celle qu'en a donnée M. Legendre (Théorie des Nombres, I Partie, § XIV), est fondée sur les mêmes principes.

Corollaire. — Le polynôme

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

s'évanouissant, ainsi qu'on vient de le dire, pour

sera, en vertu du théorème I (Chapitre VIII, § IV), algébriquement divisible par le facteur

$$x - u_0 - v_0\sqrt{-1}.$$

Le quotient, ne pouvant être qu'un nouveau polynome du degré $n-1$ par rapport à x, sera encore nécessairement divisible par un nouveau facteur de même forme que le précédent, c'est-à-dire du premier degré par rapport à x. Désignons par

ce nouveau facteur. Le polynôme f(x) sera équivalent au produit des deux facteurs

par un troisième polynome du degré $n-2$. On prouvera que ce troisième polynôme est divisible par un troisième facteur semblable aux deux autres ; et, en continuant à opérer de la même manière, on finira par obtenir n facteurs linéaires du polynôme f(x). Soient respectivement

ces mêmes facteurs. n divisant le polynôme f(x) par leur produit, on trouvera pour quotient une constante évidemment égale au coefficient a_0 de la plus haute puissance de x dans f(x). On aura, en conséquence,

Cette dernière équation renferme un théorème que l'on peut énoncer ainsi qu'il suit :

Théorème II. — Quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, le polynôme

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = f(x)$$

sera équivalent au produit de la constante a_0 par n facteurs linéaires de la forme

$$x-a-b-1.$$

Déterminer les facteurs dont il est ici question, c'est ce qu'on appelle décomposer le polynôme f(x) en ses facteurs linéaires. Il n'y a qu'une seule manière d'effectuer cette décomposition. Pour le démontrer, supposons que deux méthodes différentes aient fourni les deux équations

On en tirera

Le dernier membre de la formule précédente s'évanouissant lorsqu'on attribue à la variable x la valeur particulière u0+v0−1, il faudra de toute nécessité que, pour cette même valeur de x, le premier membre, et par conséquent l'un de ses facteurs (voir le Chapitre VII, § II, théorème VII, corollaire II), se réduise à zéro. Soit

le facteur dont il s'agit. On aura identiquement

$$a0+b0-1=u0+v0-1$$

et, par suite,

$$x-a0-b0-1=x-u0-v0-1.$$

Cela posé, la formule (23) pourra être remplacée par la suivante :

$$(x-a1-b1-1)\dots(x-an-1-bn-1-1)=(x-u1-v1-1)\dots(x-un-1-vn-1-1).$$

Le second membre de celle-ci s'évanouissant lorsqu'on suppose

l'un des facteurs du premier membre, par exemple,

devra s'évanouir dans la même hypothèse, ce qui entraînera deux nouvelles équations identiques de la forme

$$a1+b1-1=u1+v1-1, x-a1-b1-1=x-u1-v1-1.$$

En répétant plusieurs fois le même raisonnement, on prouvera que les différents facteurs linéaires dont se composent les seconds membres des équations (22) sont absolument les mêmes dans l'une et l'autre équation. Il est essentiel d'ajouter que chaque facteur imaginaire de la forme

se change en un facteur réel $x-\alpha$, toutes les fois que la quantité β se réduit à zéro.

Le premier membre de l'équation (1), étant, d'après ce qu'on vient de dire, décomposable d'une seule manière en facteurs linéaires, ne peut s'évanouir qu'avec l'un de ces facteurs. Si donc on les égale successivement à zéro, on obtiendra toutes les valeurs possibles de x propres à vérifier l'équation (1), c'est-à-dire toutes les racines de cette équation. Le nombre de ces racines, comme celui des facteurs linéaires, sera égal à n. De plus, à chaque facteur réel de la forme $x-\alpha$ correspondra une racine réelle α, et à chaque facteur imaginaire de la forme

une racine imaginaire

$$a+b-1.$$

Ces remarques suffisent pour établir la proposition suivante :

Théorème III. — Quelles que soient les valeurs réelles ou les valeurs imaginaires des constantes a0,a1,...,an−1,an, l'équation

a toujours n racines réelles ou imaginaires, et n'en saurait avoir un plus grand nombre.

Il peut arriver que plusieurs des racines de l'équation (1) soient égales entre elles. Dans ce cas, le nombre des valeurs différentes de la variable propres à vérifier cette même équation devient nécessairement inférieur à n. Ainsi, par exemple, l'équation du second degré

$$x2−2ax+a2=0$$

ayant ses deux racines égales, on ne pourra y satisfaire que par une seule valeur de x, savoir

$$x=a.$$

Lorsque les constantes a0,a1,...,an−1,an sont toutes réelles, l'expression imaginaire

$$a+b−1$$

ne peut évidemment être une racine de l'équation (1), sans que l'expression conjuguée

$$a−b−1$$

soit une autre racine de la même équation. Par conséquent, dans cette hypothèse, les facteurs imaginaires et linéaires du polynome qui forme le premier membre de l'équation (1) sont deux à deux conjugués et de la forme

$$x−a−b−1,x−a+b−1.$$

Le produit de deux semblables facteurs étant un polynôme réel du second degré, savoir

$$(x−a)2+b2,$$

on déduit immédiatement de l'observation qu'on vient de faire le théorème suivant :

Théorème IV. — Lorsque a0,a1,...,an−1,an désignent des constantes réelles, le polynôme

est décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré.

Dans ce qui précède, nous avons présenté les racines imaginaires de l'équation (1) sous la forme

$$a±b−1.$$

Alors, pour le polynôme (24), un facteur réel du second degré correspondant à deux racines imaginaires conjuguées

$$a+b−1,a−b−1$$

était de la forme

$$(x−a)2+b2.$$

Si l'on fait, pour plus de commodité,

$$a±b−1=r(\cos\theta±−1\sin\theta)$$

(ρ désignant une quantité positive et θ un angle que l'on pourra supposer compris entre les limites 0,π), le même facteur réel du second degré deviendra

$$(x-\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2=x^2-2\rho x\cos\theta+\rho^2.$$

Il est facile de construire géométriquement cette dernière expression dans le cas où l'on attribue à la variable x une valeur réelle. En effet, si l'on trace un triangle dans lequel un angle soit égal à θ, les deux côtés adjacents étant respectivement représentés l'un par la valeur numérique de x, l'autre par le module ρ, le carré du troisième côté sera (d'après un théorème connu de Trigonométrie) la valeur du trinôme

$$x^2-2\rho x\cos\theta+\rho^2,$$

toutes les fois que la variable x sera positive. Si la variable x devient négative, il suffira de remplacer dans la construction indiquée l'angle θ par son supplément.

Le troisième côté du triangle dont il est ici question ne peut s'évanouir que dans le cas où les deux premiers côtés tombent sur une même droite, et où leurs extrémités coïncident, ce qui exige : 1 que l'angle se réduise à zéro ou à π; 2 que la valeur numérique de x soit égale à ρ. Par suite, le facteur

$$x^2-2\rho x\cos\theta+\rho^2$$

ne pourra devenir nul pour une valeur réelle de x, à moins que l'on ne suppose

$$\cos\theta=1 \text{ ou } \cos\theta=-1;$$

et la seule valeur de x propre à faire évanouir ce facteur sera, dans la première hypothèse,

dans la seconde,

$$x=-\rho.$$

On arriverait directement au même but en observant que l'équation

$$x^2-2\rho x\cos\theta+\rho^2=0$$

a deux racines

$$\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),\rho(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta),$$

qui ne peuvent cesser d'être imaginaires sans devenir égales, et que les seules valeurs de θ capables de produire cet effet sont celles qui vérifient la formule

$$\sin\theta=0,$$

de laquelle on tire

$$\cos\theta=\pm1$$

et, par conséquent,

pour la valeur commune des deux racines.

Jusqu'à présent, nous nous sommes bornés à déterminer le nombre des racines de l'équation (1), avec la forme de ces mêmes racines et celle des facteurs qui leur correspondent. Nous allons, dans les paragraphes suivants, passer en revue quelques cas particuliers dans lesquels on est parvenu à résoudre de semblables équations, sans être obligé de concevoir leurs coefficients convertis en nombres, et à exprimer les racines en fonctions algébriques ou trigonométriques de ces coefficients. Nous observerons ici à ce sujet que, dans toute équation algébrique dont le premier membre est une fonction rationnelle et entière de la variable x, on peut réduire par la division le coefficient de la plus haute puissance de x à l'unité, et celui de la puissance immédiatement inférieure à zéro par un changement de variable. En effet, si dans l'équation

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

a_0 n'est pas égal à 1, il suffira de diviser l'équation par a_0 pour réduire le coefficient de x^n à l'unité ; et, si dans une équation mise sous la forme

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

a_1 n'est pas nul, il suffira de poser

pour obtenir une transformée en z du degré n, qui n'ait plus de second terme, c'est-à-dire une transformée dans laquelle le coefficient de z^{n-1} s'évanouisse.

§ II. — Résolution algébrique ou trigonométrique des équations binômes et de quelques équations trinômes. Théorèmes de Moivre et de Cotes.

Considérons l'équation binôme

p désignant une quantité constante. On en tirera

$$x^n=-p$$

ou, si l'on désigne par ρ la valeur numérique de ρ,

$$x^n=\pm p.$$

On aura donc à résoudre l'équation

si −p est positif, et la suivante

si −p est négatif. On satisfait à la première en prenant

et à la seconde en prenant

Quant aux diverses valeurs de chacune des deux expressions $((1))^{\frac{1}{n}}$, $((-1))^{\frac{1}{n}}$, elles sont toujours en nombre égal à n (voir le Chapitre VII, § III), et se déduisent des deux formules

dans lesquelles il suffit d'attribuer successivement à k toutes les valeurs entières qui ne surpassent pas $\frac{n}{2}$. Lorsque n est un nombre pair, la première des équations (6) fournit deux valeurs réelles de $((1))^{\frac{1}{n}}$, savoir +1 et −1, correspondantes l'une à $k=0$, l'autre à $k=\frac{n}{2}$. Dans la même hypothèse, toutes les valeurs de $((-1))^{\frac{1}{n}}$ sont imaginaires. Lorsque n devient un nombre impair, l'expression $((1))^{\frac{1}{n}}$ a une seule valeur réelle +1 correspondante à $k=0$, et l'expression $((-1))^{\frac{1}{n}}$ une seule valeur réelle −1 correspondante à $k=\frac{n-1}{2}$. Par suite, l'équation (1) admet deux racines réelles, ou n'en admet aucune, lorsque n est un nombre pair, et la même équation admet une seule racine

réelle dans le cas contraire. De plus, on reconnaît immédiatement à l'inspection des formules (6) que les racines imaginaires sont conjuguées deux à deux, ainsi qu'on devait s'y attendre.

Considérons maintenant l'équation trinôme

p,q désignant deux quantités constantes choisies à volonté. On en tirera

$$x2n+pxn=-q$$

et, par suite,

Si p24−q est positif, l'équation qui précède entraînera l'une des deux suivantes :

$$xn+p2=+p24-q,xn+p2=-p24-q;$$

en sorte que xn admettra deux valeurs réelles comprises dans la formule

Lorsque le nombre n se réduit à l'unité, la formule (9) fournit immédiatement les deux racines réelles de l'équation trinôme du second degré

Dans le cas contraire, en substituant la formule dont il s'agit à l'équation (7), on n'a plus à résoudre que deux équations binômes semblables à celles que nous avons traitées ci-dessus.

Supposons maintenant la quantité p24−q négative. L'équation (8) entraînera l'une des deux suivantes :

$$xn+p2=+q-p24-1,xn+p2=-q-p24-1;$$

en sorte que xn admettra deux valeurs imaginaires comprises dans la formule

Si le nombre n se réduit à l'unité, ces valeurs seront les racines imaginaires de l'équation (10). Mais, si l'on suppose n>1, il restera encore à déduire des valeurs connues de xn les valeurs de x. Désignons par ρ, dans cette hypothèse, le module de l'expression imaginaire qui sert de second membre à la formule (11). On aura évidemment

Faisons en outre, pour plus de commodité,

Lorsque p sera négatif, les deux valeurs de xn données par la formule (11) deviendront

et l'on en conclura

Si au contraire p est positif, on trouvera

et, par suite,

Dans le cas particulier où l'on a

$$p24-q=0,$$

ζ devient nul ; en sorte que les équations (15) et (17) prennent la forme des équations (4) et (5).

Si l'on désigne, pour abréger, ρ1n par r, on tirera des équations (12) et (13), en supposant la quantité p négative,

$$p=-2rncosz,q=r2n,$$

$$x^{2n}+px^n+q=x^{2n}-2rx^n\cos nz+r^{2n}.$$

Dans la même hypothèse, la formule (15) donnera

k représentant un nombre entier, et l'on en conclura que le trinôme

$$x^{2n}-2rx^n\cos nz+r^{2n}$$

est décomposable en facteurs réels du second degré de la forme

$$x^2-2rx\cos z\pm 2ki\pi n+r^2,$$

Si l'on suppose au contraire la quantité p positive, le trinôme

$$x^{2n}+px^n+q$$

deviendra

$$x^{2n}+2rx^n\cos nz+r^{2n},$$

et ses facteurs réels du second degré seront de la forme

$$x^2-2rx\cos z\pm(2k+1)i\pi n+r^2.$$

Dans l'une et l'autre hypothèse, on pourra construire géométriquement les facteurs réels du second degré par la méthode ci-dessus indiquée (voir le § I), toutes les fois que l'on attribuera des valeurs réelles à la variable x. Si l'on prend la valeur numérique de cette variable pour base commune de tous les triangles qui correspondent aux différents facteurs, et que dans chaque triangle on fasse aboutir constamment à une même extrémité de cette base le côté connu, représenté par r, on trouvera que les sommets des divers triangles coïncident avec les points de division d'une circonférence décrite du rayon r en parties égales. Il en résulte que, si l'on multiplie entre eux les carrés des lignes menées de la seconde extrémité de la base aux points dont il s'agit, le produit de ces carrés sera la valeur du trinôme

$$x^{2n}+px^n+q=x^{2n}\pm 2rx^n\cos nz+r^{2n}.$$

Dans le cas particulier où $\zeta=0$ le produit des lignes elles-mêmes représente la valeur numérique du binôme

$$x^n\pm r^n,$$

laquelle se confond avec la racine carrée positive du trinôme

$$x^{2n}\pm 2rx^n+r^{2n}.$$

Des deux propositions qu'on vient d'énoncer, la première est le théorème de Moivre, et la seconde celui de Cotes.

§ III. — Résolution algébrique ou trigonométrique des équations du troisième et du quatrième degré.

Considérons l'équation générale du troisième degré. On pourra toujours, en faisant disparaître le second terme de cette équation. la ramener à la forme

p,q désignant deux quantités constantes. D'ailleurs, si l'on pose

u,v étant deux nouvelles variables, on en conclura

$$x3=(u+v)3=u3+v3+3uvx,$$

Pour rendre l'équation (2) identique avec la proposée, il suffira d'assujettir les inconnues u et v aux deux conditions

La résolution de l'équation (1) se trouve ainsi réduite à la résolution simultanée des équations (3) et (4).

Cherchons d'abord les valeurs de u3 et de v3. Si l'on fait

on aura, en vertu des équations (3) et (4),

$$z1+z2=-q,z1z2=-p327;$$

et, par suite, en nommant z une nouvelle variable,

$$(z-z1)(z-z2)=z2+qz-p327.$$

Il en résulte que z1,z2 seront les deux racines de l'équation

Ces deux racines étant connues, on déduira des formules (5) trois valeurs de u et trois valeurs de v, qui se correspondront deux à deux de manière à vérifier la formule (4). Soit U l'une quelconque des trois valeurs de u, et V la valeur correspondante de v, en sorte qu'on ait

$$UV=-p3.$$

Désignons en outre par α l'expression imaginaire

$$cos2π3+-1sin2π3;$$

les trois valeurs de l'expression ((1))13 seront respectivement

$$a0=1,$$

$$a\ =cos2π3+-1sin2π3=-12+3122-1,a2=cos2π3--1sin2π3=-12-3122-1,$$

et les trois valeurs de u, évidemment comprises dans la formule générale ((1))13U, deviendront

$$U,aU,a2U.$$

On trouvera, pour les valeurs correspondantes de v,

ou, ce qui revient au même,

$$V,a2V,aV.$$

Par conséquent, si l'on nomme x0,x1,x2 les trois racines de l'équation (1), on aura

Il est essentiel d'observer que, U,αU,α2U étant les trois valeurs de u=((z))13, et V,α2V,αV les valeurs correspondantes de v=− p 3((z1))13, les racines x0,x1,x2, déterminées par les équations (7), seront respectivement égales aux trois valeurs de x données par la formule

Lorsque l'équation (6) a ses racines réelles, les formules (5) fournissent un système de valeurs réelles de u et de v qui se correspondent de manière à vérifier l'équation (4). Si l'on prend ces mêmes valeurs pour U et V, on reconnaîtra immédiatement que des trois racines x0,x1,x2, la première est nécessairement réelle, et les deux autres réelles ou imaginaires, suivant que la quantité

$$Q24+P227$$

est nulle ou positive, c'est-à-dire suivant que l'équation (6) a ses racines égales ou inégales. Dans le premier cas, on trouve

$$X0=2U,X1=X2=-U.$$

Lorsque les racines de l'équation (6) deviennent imaginaires, on peut les présenter sous la forme

$$Z1=P(COS\Theta+-1SIN\Theta),Z2=P(COS\Theta--1SIN\Theta),$$

le module ρ étant déterminé par l'équation

$$P2=-P327.$$

Comme on a, dans cette hypothèse,

$$((Z))13=P13(COS\Theta3+-1SIN\Theta3)((1))13,$$

la formule (8) se trouve réduite à

De plus, en prenant pour U l'expression imaginaire

$$P13(COS\Theta3+-1SIN\Theta3),$$

on conclura des équations (7)

Ces trois dernières valeurs de x sont toutes réelles, et coïncident avec celles que fournit la formule (9).

Dans les calculs précédents, l'équation (6), dont la solution entraîne celle de l'équation (1), est ce qu'on appelle la réduite. Ses racines z1,z2 équivalent nécessairement à certaines fonctions des racines cherchées x0,x1,x2. Pour déterminer ces fonctions, il suffira d'observer que, U et V désignant des valeurs particulières de u et v, on aura, en vertu des formules (5),

$$Z1=U3,Z2=V3.$$

On tire d'ailleurs des équations (7)

$$3U=X0+AX2+A2X1=A(X2+AX1+A2X0)=A2(X1+AX0+A2X2),3V=X0+AX1+A2X2=A(X1+AX2+A2X0)=A2(X2+AXC$$

On trouvera donc, par suite,

Il en résulte que z1,z2 sont respectivement égales (à un coefficient numérique près) aux deux seules valeurs distinctes que présente le cube de la fonction linéaire

$$X0+AX1+A2X2,$$

lorsque dans cette fonction on échange entre elles les racines x0,x1,x2 de toutes les manières possibles. Le coefficient numérique est évidemment 127 ou le cube de la fraction 13.

Considérons maintenant l'équation générale du quatrième degré. On pourra, en faisant disparaître le second terme, la ramener à la forme

p,q,r désignant des quantités constantes. Si l'on pose, en outre,

u,v,w étant trois nouvelles variables, on en conclura

$$x2=u2+v2+w2+2(uv+uw+vw)$$

et, par suite,

$$[x2-(u2+y2+w2)]2=4(u2v2+u2w2+v2w2)+8uvw.x$$

ou, ce qui revient au même,

Pour rendre cette dernière équation identique avec la proposée, il suffira d'assujettir les inconnues u,v,w aux conditions

La résolution de l'équation (12) se trouve ainsi réduite à la résolution simultanée des équations (14).

Cherchons d'abord les valeurs de 4u2,4v2,4w2. Si l'on fait

on aura, en vertu des formules (14),

$$z1+z2+z3=-2p,z1z2+z1z3+z2z3=p2-4r,z1z2z3=q2;$$

et, par suite, en nommant z une nouvelle variable,

$$(z-z1)(z-z2)(z-z3)=z3+2pz2+(p2-4r)z-q2.$$

Il en résulte que z1,z2,z3 seront les trois racines de l'équation

et, puisque ces trois racines doivent vérifier la formule z1z2z3=q2, on peut assurer que l'une d'elles sera positive, les deux autres étant toutes deux à la fois positives, ou négatives, ou imaginaires. Lorsqu'on aura déterminé ces mêmes racines, les deux premières des équations (15) fourniront pour chacune des variables u et v deux valeurs égales, au signe près. Soient

$$u=\pm U,v=\pm V$$

les valeurs réelles ou imaginaires dont il s'agit ; et W une quantité réelle ou une expression imaginaire déterminée par l'équation

$$8UVW=-q.$$

Si dans la seconde des formules (14) on suppose

$$u=+U,v=+V$$

ou bien

$$u=-U,v=-V,$$

on en tirera

$$w=+W.$$

Si l'on y fait, au contraire,

$$u=+U,v=-V,$$

ou bien

$$u=-U,v=+V,$$

on trouvera

$$w=-W.$$

De cette manière on obtiendra pour les variables u,v,w quatre systèmes de valeurs propres à vérifier les équations (14) ; et, si l'on représente par x0,x1,x2,x3, les quatre valeurs correspondantes de l'inconnue

on aura

Il est aisé de reconnaître que ces quatre valeurs de x seront toutes réelles, si l'équation (16) a ses trois racines positives, et toutes imaginaires, si l'équation (16) a deux racines négatives inégales, tandis que deux valeurs seront réelles, et deux imaginaires, si l'équation (16) a deux racines négatives égales, ou deux racines imaginaires.

Par la méthode qu'on vient d'exposer, la résolution de l'équation (12) se trouve ramenée à celle de l'équation (16). Cette dernière, qu'on nomme la réduite, a nécessairement pour racines certaines fonctions des racines de la proposée. Si l'on veut déterminer ces fonctions, c'est-à-dire exprimer z1,z2,z3 par le moyen de x0,x1,x2,x3, il suffira d'observer que, U,V,W étant des valeurs particulières de u,v,w, on a, en vertu des formules (15),

$$z1=4U2,z2=4V2,z3=4W2.$$

On tire d'ailleurs des équations (17)

$$4U=x0-x1+x2-x3,4V=x0-x1+x3-x2,4W=x0-x2+x1-x3.$$

On trouvera, en conséquence,

Il en résulte que z1,z2,z3 sont, abstraction faite du coefficient numérique 14=(12)2, respectivement égales aux trois seules valeurs distinctes que présente le carré de la fonction linéaire

$$x0-x1+x2-x3$$

lorsque dans cette fonction on échange entre elles les racines x0,x1, x2,x3 de toutes les manières possibles. Cette même fonction linéaire, pouvant s'écrire ainsi qu'il suit

$$x0+(-1)x1+(-1)2x2+(-1)3x3,$$

n'est évidemment qu'un cas particulier de la formule générale

$$x0+ax1+a2x2+a3x3,$$

lorsqu'on désigne par α une des valeurs de l'expression ((1))14.

Chapitre XI

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

Prenons pour f(x) et F(x) deux fonctions entières de la variable x.

$$f(x)F(x)$$

sera ce qu'on appelle une fraction rationnelle. Si l'on désigne par m le degré de son dénominateur F(x), l'équation

admettra m racines réelles ou imaginaires, égales ou inégales ; et si, en les supposant d'abord toutes inégales, on les représente par

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1},$$

les facteurs linéaires du polynôme F(x) seront respectivement

$$x-x_0, x-x_1, x-x_2, \ldots, x-x_{m-1}.$$

Cela posé, faisons

et

φ(x) n'étant pas nul, la constante A restera finie, et la différence

$$f(x)\Phi(x)-A=f(x)-A\varphi(x)\Phi(x)$$

s'évanouira pour $x=x_0$. Par suite, il en sera de même du polynome

$$f(x)-A\Phi(x),$$

et ce polynôme sera divisible algébriquement par $x-x_0$; en sorte qu'on aura

$$f(x)-A\Phi(x)=(x-x_0)\chi(x),$$

χ(x) désignant une nouvelle fonction entière de la variable x. Si l'on divise par F(x) les deux membres de cette dernière équation, en ayant égard à la formule (2), on en conclura

Donc, si l'on partage le polynôme F(x) en deux facteurs dont l'un soit linéaire, on pourra décomposer la fraction rationnelle f(x)F(x) en deux autres qui aient pour dénominateurs respectifs les deux facteurs dont il s'agit, et dont la plus simple ait un numérateur constant.

Concevons maintenant que l'on partage la fonction F(x) en deux facteurs dont le premier, au lieu d'être linéaire, corresponde à plusieurs racines de l'équation F(x)=0. Prenons, par exemple, pour ce premier facteur le facteur du second degré

$$(x-x_0)(x-x_1),$$

et posons, en conséquence,

La fraction f(x)φ(x) conservera une valeur finie, non seulement pour $x=x_0$, mais encore pour $x=x_1$; et, si l'on désigne par u un polynôme du premier degré qui, dans l'une et l'autre hypothèse, devienne égal à f(x)φ(x), on trouvera (Chapitre IV, § I)

Le polynôme u étant déterminé, comme on vient de le dire, l'équation

$$F(x_0)\Phi(x_0)-U=0$$

ou

$$F(x)-U\Phi(x)=0$$

comptera parmi ses racines x0 et x1; et par suite le polynôme

$$F(x)-U\Phi(x)$$

sera divisible par le produit

$$(x-x_0)(x-x_1).$$

On aura donc

$$F(x)-U\Phi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\chi(x),$$

χ(x) désignant une nouvelle fonction entière de la variable x. Si l'on divise la dernière équation par F(x), en ayant égard à la formule (6), on en conclura

On prouverait de même qu'il suffit de poser

et

pour obtenir une équation de la forme

etc.

Ainsi généralement, lorsque l'équation F(x)=0 n'a pas de racines égales, si l'on partage le polynôme F(x) en deux facteurs dont le premier soit le produit de plusieurs facteurs linéaires, la fraction rationnelle f(x)F(x) sera décomposable en deux'autres fractions de même espèce qui recevront pour dénominateurs respectifs les deux facteurs cidessus mentionnés, et dont la première aura un numérateur d'un degré moins élevé que son dénominateur.

Je passe au cas où l'on suppose que l'équation F(x)=0 a des racines égales. Soient, dans cette seconde hypothèse,

$$a,b,c,\ldots$$

les diverses racines de cette même équation, et désignons par m′ le nombre des racines égales à a; par m″ le nombre des racines égales à b; par m‴ le nombre des racines égales à c, etc. La fonction F(x) sera équivalente au produit

$$(x-a)^{m'}(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\ldots$$

ou à ce produit multiplié par un coefficient constant, et l'on aura

$$m'+m''+m'''+\ldots=m.$$

Cela posé, faisons

et

φ(a) n'étant pas nul, la constante A restera finie, et la différence

$$F(x)\Phi(x)-A$$

s'évanouira pour x=a. On en conclura que le polynôme

$$F(x)-A\Phi(x)$$

est divisible par x−a, et l'on aura, par suite,

χ(x) désignant une nouvelle fonction entière de la variable x. Enfin, si l'on divise par F(x) les deux membres de l'équation (15) en ayant égard à la formule (13), on trouvera

On démontrerait, en raisonnant de la même manière, qu'il suffit de poser

et

pour obtenir une équation de la forme

.....

§ II. — Décomposition d'une fraction rationnelle, dont le dénominateur est le produit de plusieurs facteurs linéaires inégaux, en fractions simples qui aient pour dénominateurs respectifs ces mêmes facteurs lineaires et des numérateurs constants.

Soit

$$F(x)F(x)$$

la fraction rationnelle que l'on considère ; m le degré de la fonction F(x), et

$$x0,x1,x2,\ldots,xm-1$$

les racines de l'équation

supposées inégales. On aura, en désignant par k un coefficient constant,

et, en vertu des principes établis dans le paragraphe qui précède, la fraction rationnelle f(x)F(x) pourra être décomposée en deux autres, dont la première sera de la forme

$$A0x-x0,$$

A0 représentant une constante, tandis que la seconde aura pour dénominateur

$$F(x)x-x0=\kappa(x-x1)(x-x2)\ldots(x-xm-1).$$

En décomposant cette seconde fraction rationnelle par la même méthode, on obtiendra :

1 Une nouvelle fraction simple de la forme

$$A1x-x1;$$

2 Une fraction qui aura pour dénominateur

$$\kappa(x-x2)\ldots(x-xm-1).$$

En continuant ainsi, on fera disparaître successivement du polynome

$$F(x)=\kappa(x-x0)(x-x1)\ldots(x-x_{M-1})$$

tous les facteurs linéaires qu'il renferme ; en sorte qu'on réduira définitivement ce polynôme à la constante k. Donc, lorsque, par une suite de décompositions partielles semblables à celles que nous venons d'indiquer, on aura extrait de la fraction f(x)F(x) une suite de fractions simples de la forme

$$A0x-x0,A1x-x1,A2x-x2,\ldots,A_{M-1}x-x_{M-1},$$

le reste ne pourra être qu'une fraction rationnelle à dénominateur constant, c'est-à-dire une fonction entière de la variable x. En désignant par R cette fonction entière, on trouvera

Il reste maintenant à savoir quelles sont les valeurs des constantes

$$A0,A1,A2,\ldots,A_{M-1}.$$

Ces valeurs se déduiraient sans difficulté de la méthode de décomposition indiquée dans le § I. Mais on parvient plus directement à leur détermination à l'aide des considérations suivantes :

Si l'on multiplie par F(x) les deux membres de l'équation (3), on en tirera

Si dans les deux membres de cette dernière formule on fait

la somme

$$RF(x)+A1F(x)x-x1+A2F(x)x-x2+\ldots+A_{M-1}F(x)x-x_{M-1},$$

qui est évidemment un polynôme en x divisible par x−x0, prendra la forme

$$zZ,$$

Zdésignant une fonction entière de z, et l'on aura, par suite,

Supposons maintenant que la substitution de x+z au lieu de x dans la fonction F(x) donne généralement

On en déduira

$$F(x0+z)=zF1(x0)+z2F2(x0)+\ldots,$$

et l'équation (5) deviendra

$$F(x0+z)=A0[F1(x0)+zF2(x0)+\ldots]+zZ.$$

Lorsqu'on fait dans cette dernière z=0, elle se réduit à

$$F(x0)=A0F1(x0),$$

et l'on en conclut

On trouverait, par un calcul entièrement semblable,

Les valeurs qu'on vient d'obtenir pour

$$A0,A1,A2,\ldots,A_{M-1}$$

sont évidemment indépendantes du mode employé pour la décomposition de la fraction rationnelle f(x)F(x); d'où il résulte que cette fraction ne peut être décomposée que d'une seule manière en fractions simples qui aient pour dénominateurs les facteurs linéaires du polynome F(x) avec des numérateurs constants.

Il est aisé de voir comment l'équation (7) et la formule (3) du paragraphe précédent s'accordent entre elles. En effet, F1(x0) est ce que devient le polynôme

$$F_1(x_0)+zF_2(x_0)+\ldots=F(x_0+z)z=F(x)x-x_0$$

lorsqu'on y fait z=0 ou x=x0; et par suite, si l'on pose

on aura

$$F_1(x_0)=\Phi(x_0),$$

Pour montrer une application des formules ci-dessus établies, supposons qu'il s'agisse de décomposer en fractions simples la fraction rationnelle

$$x^nx^m-1,$$

n désignant un nombre entier inférieur à m. On aura, dans ce cas particulier,

$$f(x)=x^n, F(x)=x^m-1, k=1;$$

et, si l'on représente par h un nombre entier qui ne surpasse pas m2, les diverses racines de l'équation F(x)=0, toutes inégales entre elles, seront comprises dans la formule

$$\cos 2h\pi m\pm-1\sin 2h\pi m.$$

Soit a l'une de ces racines, et cherchons le numérateur A de la fraction simple qui a pour dénominateur x–a. Ce numérateur sera

$$A=f(a)F_1(a)=a^nF_1(a),$$

la valeur de F1(a) étant déterminée par l'équation

$$F(a)+zF_1(a)+\ldots=F(a+z)=(a+z)^m-1=a^m-1+ma^m-1z+\ldots,$$

et par conséquent égale à mam–1. On trouvera, par suite,

$$A=a^nma^m-1=1ma^n+1-m.$$

Comme on a d'ailleurs

$$(\cos 2h\pi m\pm-1\sin 2h\pi m)^n+1-m=\cos 2h(n+1)\pi m\pm-1\sin 2h(n+1)\pi m,$$

on conclura de ce qui précède, en faisant, pour abréger,

On trouverait, en raisonnant de la même manière,

Il est essentiel d'observer que la dernière des fractions simples comprises dans le second membre de l'équation (12) ou (13) sera, pour des valeurs paires de m, s'il s'agit de l'équation (12), et pour des valeurs impaires de m, s'il s'agit de l'équation (13),

$$\frac{\cos m\theta}{x+1}=\frac{\cos(n+1)\pi}{x+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{x+1}.$$

Ainsi, par exemple, on aura

$$(14)\quad \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right),\quad (15)\quad \frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right),\quad (16)\quad \frac{1}{x^3+1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}}{x-\cos\frac{\pi}{3}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}}+\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}}{x-\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{x+1}\right),\ldots\ldots$$

On peut remarquer encore que, si dans les seconds membres des équations (12) ou (13) on réunit par l'addition deux fractions simples correspondantes à deux facteurs linéaires conjugués du binôme $x^m\pm1$, la somme sera une nouvelle fraction qui aura pour dénominateur un facteur réel du second degré, et pour numérateur une fonction réelle et linéaire de la variable x. On trouvera, par exemple, en prenant $n=0$, $m=3$,

Il est facile de généraliser cette remarque ainsi qu'il suit.

Supposons que, les fonctions entières $f(x), F(x)$ étant réelles, on désigne par

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \alpha-\beta\sqrt{-1}$$

deux racines imaginaires conjuguées de l'équation (1), et prenons pour A et B deux quantités réelles propres à vérifier la formule

$F_1(x)$ représentant toujours le coefficient de z dans le développement de $F(x+z)$. On aura nécessairement

$$\frac{f(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{F_1(\alpha-\beta\sqrt{-1})}=A+B\sqrt{-1};$$

et par suite, si l'on décompose la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$, les deux fractions simples correspondantes aux facteurs linéaires conjugués

seront respectivement

En ajoutant ces deux fractions, on obtiendra la suivante :

Cette dernière, qui a pour numérateur une fonction réelle et linéaire de la variable x et pour dénominateur un facteur réel du second degré du polynôme $F(x)$, ne diffère pas de la fraction

$$\frac{u}{(x-x_0)(x-x_1)}$$

que renferme la formule (9) du paragraphe I, dans le cas où l'on suppose

$$x_0=\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad x_1=\alpha-\beta\sqrt{-1}.$$

Soient

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

la fraction rationnelle que l'on considère, m le degré du polynome $F(x)$, et

$$a, b, c, \ldots$$

les diverses racines de l'équation

On aura, en désignant par k un coefficient constant, et par $m, m', m'', \ldots$ plusieurs nombres entiers dont la somme sera égale à m,

Cela posé, si l'on fait usage de la méthode exposée dans le paragraphe I, on décomposera la fraction rationnelle f(x)F(x) en deux autres dont la première sera de la forme

$$A(x-a)m',$$

tandis que la seconde aura pour dénominateur

$$F(x)x-a==k(x-a)m'-1(x-b)m''(x-c)m'''....$$

En décomposant cette seconde fraction rationnelle par la même méthode, on obtiendra : 1 une nouvelle fraction simple

$$A1(x-a)m'-1,$$

dans laquelle A1, représentera une constante ; 2 une fraction qui aura pour dénominateur

$$k(x-a)m'-2(x-b)m''(x-c)m'''....$$

En continuant ainsi, on fera disparaître successivement du polynôme F(x) les différents facteurs linéaires dont se compose la puissance (x–a)m′; et, lorsqu'on aura extrait de f(x)F(x) une suite de fractions simples de la forme

$$A(x-a)m',A1(x-a)m'-1,A2(x-a)m'-2,...,Am'-1x-a,$$

le reste sera une nouvelle fraction rationnelle dont le dénominateur se trouvera réduit à

$$k(x-b)m''(x-c)m'''....$$

Si de ce reste on extrait une seconde suite de fractions simples de la forme

$$B(x-a)m'',B1(x-a)m''-1,B2(x-a)m''-2,...,Bm''-1x-a,$$

on obtiendra un second reste dont le dénominateur sera

$$k(x-c)m'''-1....$$

Enfin, si l'on prolonge ces opérations jusqu'à ce que le polynôme F(x) se trouve réduit à la constante k, le dernier de tous les restes sera une fonction rationnelle à dénominateur constant, c'est-à-dire une fonction entière de la variable x. Appelons R cette fonction entière. On aura définitivement pour la valeur de f(x)F(x) décomposée en fractions simples

A,A1,...,Am′–1; B,B1,...,Bm′–1; C,C1,...,Cm′–1; désignant des constantes que l'on peut facilement déduire des principes exposés dans le paragraphe I, ou calculer directement à l'aide des considérations suivantes.

(4) Faisons, pour plus de commodité,

Qsera une nouvelle fonction entière de la variable x, et l'équation (3) deviendra

$$f(x)F(x)=A(x-a)m'+A1(x-a)m'-1+...+Am'-1(x-a)+Q(x-b)m''(x-c)m'''....$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette dernière par

$$F(x)=k(x-a)m'(x-b)m''(x-c)m'''....$$

on en conclura

et par suite, en faisant

on trouvera

Zdésignant la valeur du polynome kQ exprimée en fonction de z. Supposons maintenant que la substitution de x+z, au lieu de x, dans les fonctions f(x) et F(x), donne généralement

On aura, en prenant x=a+z, et observant que le développement de la fonction

$$F(x)=F(a+z)$$

doit être divisible par (x−a)m′=zm′,

Cela posé, la formule (6) se trouvera réduite à

et l'on en tirera, en égalant dans les deux membres les coefficients des puissances semblables de z,

On trouvera par un calcul entièrement semblable

Ces diverses équations suffiront pour fixer complètement les valeurs des constantes A,A1,A2,..., B,B1,B2,..., C,C1,C2,..., Elles donneront, par exemple,

Les constantes ainsi déterminées étant évidemment indépendantes du mode employé pour la décomposition de la fraction rationnelle f(x)F(x), il en résulte que cette fraction est décomposable d'une manière seulement en fractions simples de la forme de celles que renferme le second membre de l'équation (3).

Il est aisé de voir que la première des équations (13) s'accorde avec la formule (14) du paragraphe I. En effet, la quantité Fm′(a) est ce que devient le polynôme

$$F_{M'}(a)+zF_{M'}+1(a)+z2F_{M'}+2(a)+\ldots=F(a+z)zM'=F(x)(x-a)M'$$

lorsqu'on y fait z=0 ou x=a; et par suite, si l'on pose

on aura

$$F_{M'}(a)=\Phi(a),$$

Dans le cas où, les fonctions f(x) et F(x) étant réelles l'une et l'autre, l'équation F(x)=0 admet m′ racines égales à α+β−1, la même équation admet encore m′ racines égales conjuguées aux premières, et par conséquent représentées par

$$a-b-1.$$

Dans cette hypothèse, si, après la décomposition de la fraction rationnelle

$$f(x)F(x),$$

on réunit deux à deux les fractions simples qui ont pour dénominateurs

$$(x-a-b-1)M'\text{ET}(x-a+b-1)M',(x-a-b-1)M'-1\text{ET}(x-a+b-1)M'-1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

enfin

les différentes sommes obtenues seront des fractions réelles et rationnelles qui auront pour dénominateurs respectifs

$$[(x-a)^2+b^2]^m,[(x-a)^2+b^2]^{m-1},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ (x-a)^2+b^2,$$

et dont le système pourra être remplacé par une suite d'autres fractions qui, avec les mêmes dénominateurs, auraient pour numérateurs des fonctions réelles et linéaires de la variable x. Au reste, il est facile de calculer directement cette nouvelle suite de fractions, en commençant par celles qui correspondent aux plus hautes puissances de $(x-\alpha)^2+\beta^2$. Cherchons, par exemple, celle qui a pour dénominateur

$$[(x-a)^2+b^2]^{m'}=(x-a-b\sqrt{-1})^{m'}(x-a+b\sqrt{-1})^{m'}.$$

D'après les principes établis dans le paragraphe I, elle sera

pourvu que l'on fasse

et

Ajoutons que, si dans la formule précédente, on pose successivement

on en conclura, eu égard à la seconde des équations (8),

$$\Phi(a+b\sqrt{-1}+z)=F^{m'}(a+b\sqrt{-1})+zF^{m'+1}(a+b\sqrt{-1})+\ldots(2b\sqrt{-1}+z)^{m'},\Phi(a-b\sqrt{-1}+z)=F^{m'}(a-b\sqrt{-1})+zF^{m'+1}(a-b\sqrt{-1})+\ldots(2b\sqrt{-1}+z)^{m'},$$

et, par suite,

Chapitre XII

DES SÉRIES RÉCURRENTES.

Une série

ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x, est appelée récurrente, lorsque dans cette série, considérée à partir d'un terme donné, le coefficient d'une puissance quelconque de la variable s'exprime en fonction linéaire des coefficients des puissances inférieures pris en nombre fixe, en sorte qu'il suffise de recourir aux valeurs de ces derniers coefficients pour en déduire celui que l'on cherche. Ainsi, par exemple, la série

est récurrente, attendu que, si l'on fait

$$a_n=n+1,$$

on aura constamment, pour des valeurs de n supérieures à l'unité,

En général, la série (1) sera récurrente, si, pour toutes les valeurs de n supérieures à une certaine limite, les coefficients

$$a_n,a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_{n-m}$$

de plusieurs puissances consécutives de x se trouvent liés entre eux par une équation du premier degré. Soit

l'équation dont il s'agit, k,l,...,p,q désignant des constantes déterminées. La suite de ces constantes formera ce qu'on appelle l'échelle de relation de la série, échelle dont les constantes elles-mêmes seront les différents termes.

Dans la série (1), supposée récurrente, la variable x et les coefficients a0,a1,a2,...,an, peuvent être ou des quantités réelles, ou des expressions imaginaires. Cela posé, représentons par ρn le module de l'expression an, et par conséquent la valeur numérique de cette expression, lorsqu'elle est réelle. On conclura immédiatement des principes établis dans les Chapitres VI et LX que la série (1) sera tantôt convergente, tantôt divergente, suivant que le module ou la valeur numérique de x sera inférieur ou supérieur à la plus petite des limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression (ρn)−1n.

§ II. — Développement des fractions rationnelles en séries récurrentes.

Toutes les fois qu'une fraction rationnelle peut se développer en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable, cette série est en même temps récurrente, ainsi qu'on va le faire voir.

Considérons d'abord la fraction rationnelle

dans laquelle a,A désignent deux constantes réelles ou imaginaires, et m un nombre entier. Elle pourra se mettre sous la forme

$$(-1)^m A^m (1-xA)^{-m},$$

et sera développable, aussi bien que l'expression

$$(1-xA)^{-m},$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x, si la valeur numérique du rapport xa supposé réel, ou le module du même rapport supposé imaginaire, est une quantité comprise entre les limites 0 et 1. Cette condition sera remplie, si le module de la variable x, module qui se réduit à la valeur numérique de la même variable quand celle-ci devient imaginaire, est inférieur au module de la constante a ; et l'on aura, dans cette hypothèse,

On trouvera par suite

et si l'on fait, pour abréger,

on obtiendra l'équation

Concevons maintenant que l'on multiplie les deux membres de l'équation précédente par (a−x)m; on en tirera

ou, ce qui revient au même,

Cette dernière formule devant subsister toutes les fois que le module de la variable x est inférieur au module de la constante a, par conséquent toutes les fois que l'on attribue à x une valeur réelle peu différente de zéro, on en conclura, par des raisonnements semblables à ceux que nous avons employés pour démontrer le théorème VI du Chapitre VI (§ IV),

et généralement

Il est essentiel de remarquer que l'équation (9) a lieu seulement pour des valeurs entières de n égales ou supérieures à m, et qu'elle doit être remplacée, lorsqu'on suppose n<m, par l'une des formules (8). De plus, comme l'équation (9), étant linéaire par rapport aux constantes

$$A_N, A_{N-1}, A_{N-2}, \ldots, A_{N-m},$$

donnera pour la première de ces constantes une fonction linéaire de toutes les autres, il en résulte que, dans la série

considérée à partir du terme amxm, le coefficient d'une puissance quelconque de x s'exprimera en fonction linéaire des coefficients des puissances inférieures pris consécutivement et en nombre égal à m. Cette série sera donc l'une de celles que nous avons nommées récurrentes.

Parmi les diverses formules particulières qu'on peut déduire de l'équation (3), il est bon de remarquer celles qui correspondent aux deux suppositions m=1, m=2. On trouve, dans la première hypothèse.

et, dans la seconde,

Les deux formules précédentes, dont la première détermine la somme d'une progression géométrique, subsistent, ainsi que l'équation (3), toutes les fois que le module de x est inférieur au module de a.

Lorsque dans l'équation (12) on fait en même temps

$$A=1, A=1,$$

on obtient la suivante

qui a pour second membre la somme de la série (2) (§ 1), et suppose le module de x inférieur à l'unité.

Considérons maintenant une fraction rationnelle quelconque

f(x),F(x) étant deux fonctions entières de la variable x. Représentons par a,b,c,... les diverses racines de l'équation

par m′ le nombre des racines égales à a, par m″ le nombre des racines égales à b, par m‴ le nombre des racines égales à c,..., et par k le coefficient de la plus haute puissance de x dans le polynôme F(x), en sorte qu'on ait

La méthode exposée dans le Chapitre précédent fournira, pour la décomposition de la fraction rationnelle f(x)F(x) en fractions simples, une équation de la forme

A,A1,...,B,B1,...,C,C1,..., etc., désignant des constantes déterminées, et R une fonction entière de x qui s'évanouira lorsque le degré du polynôme f(x) sera inférieur à celui du polynôme F(x). Cela posé, concevons que le module de la variable x soit inférieur aux modules des diverses racines a,b,c,..., et par conséquent au plus petit de ces modules. On pourra développer chacune des fractions simples que renferme le second membre de l'équation (17) en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x; puis, en ajoutant les développements ainsi formés au polynôme R, on obtiendra une nouvelle série convergente toujours ordonnée suivant les

puissances ascendantes de x, et dont la somme sera équivalente à la fraction rationnelle f(x)F(x). Soit

la nouvelle série dont il est ici question. La formule

subsistera toutes les fois que cette nouvelle série sera convergente, c'est-à-dire toutes les fois que le module de la variable x sera inférieur au plus petit des nombres qui servent de modules aux racines de l'équation (15). J'ajoute que la série (18) sera toujours une série récurrente. C'est ce que l'on prouvera aisément ainsi qu'il suit.

Désignons par m la somme des nombres entiers m′,m″,m‴,..., ou, ce qui revient au même, le degré du polynôme F(x), et faisons, en conséquence,

k,l,ldots,p,q représentant des constantes réelles ou imaginaires. L'équation (19) deviendra

Après l'avoir mise sous la forme

on en tirera, en développant le second membre comme on l'a fait pour l'équation (6),

Cette dernière formule devant subsister tant que le module de la variable x est inférieur aux modules des constantes a,b,c,..., on démontrera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage pour établir le théorème VI du Chapitre VI (§ IV), que les coefficients des puissances semblables de x dans les deux membres sont nécessairement égaux entre eux. Il en résulte : 1 que les coefficients des diverses puissances de x dans les différents termes du polynôme f(x) sont respectivement égaux aux coefficients des mêmes puissances dans la série dont la somme constitue le second membre de l'équation (23) ; 2 que dans cette série les coefficients des puissances dont l'exposant surpasse le degré du polynôme f(x) se réduisent à zéro. D'ailleurs, si l'on considère un terme de la série dans lequel l'exposant n de la variable x surpasse le degré du polynôme f(x), et soit en même temps égal ou supérieur à m, ce terme sera de la forme

$$(qa_{n+p}a_{n-1}+\ldots+la_{n-m+1}+ka_{n-m})x^n,$$

Donc, toutes les fois que la valeur de n, étant supérieure au degré du polynôme f(x), sera de plus égale ou supérieure au degré m du polynôme F(x), les coefficients

$$a_n,a_{n-1},\ldots,a_{n-m+1},a_{n-m}$$

se trouveront assujettis à l'équation linéaire

et par suite, pour une semblable valeur de n, le coefficient an de la puissance xn s'exprimera en fonction linéaire de ceux des puissances inférieures prises consécutivement au nombre de m. La série (18) sera donc l'une de celles que l'on nomme récurrentes. Son échelle de relation se composera des constantes

$$k,l,\ldots,p,q,$$

respectivement égales aux coefficients des diverses puissances de x dans le polynôme F(x).

Parmi les séries qui représentent les développements des fractions renfermées dans le second membre de la formule (17), et qui sont toutes convergentes dans le cas où le module de la variable x reste inférieur aux modules des diverses racines de l'équation (15), l'une au moins deviendrait divergente si le module de la variable venait à surpasser celui de quelque racine. Par suite, la série

(18), toujours convergente dans le premier cas, sera divergente dans le second. D'autre part, si l'on fait croître indéfiniment le nombre entier n, et si l'on désigne par ρn le module du coefficient an dans la série (18), cette série sera convergente ou divergente (voir le § I) suivant que le module de x sera inférieur ou supérieur à la plus petite des limites de (ρn)−1n. Comme les deux règles de convergence que nous venons d'énoncer doivent nécessairement s'accorder entre elles, on peut conclure que le plus petit des modules qui correspondent aux racines de l'équation (15) est précisément égal à la plus petite des limites de l'expression (ρn)−1n.

Lorsque les deux fonctions f(x),F(x) sont réelles, le coefficient an l'est aussi, et son module ρn ne diffère pas de sa valeur numérique. Si dans la même hypothèse l'équation F(x)=0 n'a que des racines réelles, la racine qui aura la plus petite valeur numérique sera, d'après ce qu'on vient de dire, égale (au signe près) à la plus petite des limites de (ρn)−1n. Enfin, si le rapport ρnρn+1 converge vers une limite fixe, on pourra la substituer (Chap. II, § III, théorème II) à la limite cherchée de l'expression (ρ)−1n. Cette remarque conduit à la règle qu'a donnée Daniel Bernoulli pour déterminer numériquement la plus petite (abstraction faite du signe) de toutes les quantités qui représentent les racines supposées réelles d'une équation algébrique.

§ III. — Sommation des séries récurrentes, et fixation de leurs termes généraux.

Lorsqu'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x est à la fois convergente et récurrente, elle a toujours pour somme une fraction rationnelle. En effet, soit

une semblable série, et supposons que, pour des valeurs de n supérieures à une certaine limite, le coefficient an de la puissance xn soit déterminé, en fonction linéaire des coefficients des puissances inférieures pris en nombre égal à n, par une équation de la forme

en sorte que les constantes

$$K, L, \ldots, P, Q$$

forment l'échelle de relation de la série. Si l'on multiplie la somme de cette série, savoir

$$A0+A1X+A2X2+\ldots$$

par le polynome

$$KXM+LXM-1+\ldots+PX+Q,$$

le produit obtenu sera la somme d'une nouvelle série dans laquelle le coefficient de xn, calculé comme dans le Chapitre VI (§ IV, théorème V), s'évanouira pour des valeurs de n supérieures à la limite assignée. En d'autres termes, le produit dont il est question sera un nouveau polynôme d'un degré marqué par cette limite. Si l'on désigne ce nouveau polynome par f(x), on aura

et, par suite,

Donc toute série qui, ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x, est à la fois convergente et récurrente, a pour somme une fraction rationnelle, dont le dénominateur est un polynome dans lequel les puissances successives de x ont pour coefficients les différents termes de l'échelle de relation de la série.

Lorsque pour faire connaître une série récurrente on donne seulement ses premiers termes et l'échelle de relation qui sert à déduire des premiers termes tous ceux qui les suivent, on détermine sans peine, à l'aide de la méthode que nous venons d'indiquer, la fraction rationnelle qui représente la somme de la série dans le cas où elle demeure convergente. Cette fraction rationnelle étant calculée, on pourra lui substituer une somme de fractions simples augmentée, s'il y a lieu, d'une fonction entière de la variable x; et, si l'on cherche ensuite les séries récurrentes qui, pour des valeurs de x convenablement choisies, expriment les développements des fractions simples dont il s'agit, on obtiendra, en ajoutant les termes généraux de ces mêmes séries, le terme général de la série proposée.

Sources et licence

Texte : https://fr.wikisource.org/wiki/Cours_d%E2%80%99analyse_de_l%E2%80%99%C3%A9cole_royale_polytechnique. Domaine public ; transcription Wikisource CC BY-SA 4.0. Mise en forme : liregratuitement.com. Tout ce que nous ajoutons reste libre.