Des théorèmes mécaniques (trad. Reinach)

Archimède

LU AVEC LIREGRATUITEMENT.COM

Livre libre de droits, lisible gratuitement en ligne et en quinze minutes par jour.

Préambule

ARCHIMÈDE

Archimède à Ératosthène, salut.

Je t'ai envoyé précédemment les énoncés de quelques-uns des théorèmes que j'avais découverts, et dont je t'invitais à trouver les démonstrations, que je ne te donnais pas pour le moment. Voici quels étaient ces énoncés :

1 Si, dans un prisme droit à bases carrées, on inscrit un cylindre — ayant les bases inscrites dans celles du prisme et la surface latérale tangente à ses faces latérales — et qu'on mène un plan par le centre d'une des bases et un côté du carré opposé, ce plan détachera du cylindre un segment, limité par le plan sécant, le plan de base et une portion de la surface cylindrique, dont le volume sera le sixième de celui du prisme entier ;

2 Si l'on inscrit dans un cube un premier cylindre, ayant les bases inscrites dans deux faces opposées du cube et la surface latérale tangente aux quatre autres faces ; puis un second cylindre, ayant les bases inscrites dans deux autres faces opposées et la surface latérale-tangente aux quatre restantes ; le volume formé par l'intersection des deux surfaces cylindriques et commun aux deux cylindres vaudra les deux tiers du cube entier.

On voit que ces théorèmes sont d'une toute autre espèce que ceux que je t'avais précédemment communiqués. Dans ceux-là, en effet, je comparais, au point de vue du volume, des figures d'ellipsoïdes ou de paraboloïdes de révolution et des segments de figures ce genre à des cônes et à des cylindres ; mais jamais je ne trouvai qu'une figure pareille fût équivalente à un solide délimité par des plans. Au contraire, dans le cas actuel, j'ai trouvé que chacun des deux volumes considérés — compris entre deux plans et des surfaces cylindriques — est équivalent à un solide compris entre des plans.

J'ai rédigé dans le présent livre et je t'envoie les démonstrations de ces deux théorèmes. Mais te voyant, comme j'ai coutume de le dire, savant zélé, philosophe distingué et grand admirateur des [recherches mathématiques], j'ai cru devoir y consigner également et te communiquer les particularités d'une certaine méthode dont, une fois maître, tu pourras prendre thème pour découvrir, par le moyen de la Mécanique, certaines vérités mathématiques. Je me persuade, d'ailleurs, que cette méthode n'est pas moins utile pour la démonstration même des théorèmes. Souvent, en effet, j'ai découvert par la Mécanique des propositions que j'ai ensuite démontrées par la Géométrie — la méthode en question ne constituant pas une démonstration véritable. Car il est plus facile, une fois que par cette méthode on a acquis une certaine connaissance des questions, d'en imaginer ensuite la démonstration, que si l'on recherchait celle-ci sans aucune notion préalable. Par la même raison, les théorèmes dont Eudoxe a le premier découvert la démonstration, — à savoir que le cône est le tiers du cylindre, la pyramide le tiers du prisme qui ont même base et même hauteur, — il faut en rapporter une bonne

part de mérite à Démocrite, qui le premier a énoncé, sans démonstration, les propositions relatives à ces figures.

En ce qui concerne aussi ces théorèmes, que je publie aujourd'hui, j'en ai fait la découverte d'abord [par la méthode mécanique. Aussi crois-je] devoir nécessairement t'exposer cette méthode, et cela pour deux raisons : d'abord, puisque j'y ai fait allusion ailleurs, je ne voudrais pas être accusé par quelques-uns d'avoir parlé en l'air ; ensuite, je suis convaincu que cette publication ne servira pas médiocrement notre science. Car, assurément, des savants actuels où futurs, par le moyen de cette méthode que je vais exposer, seront mis à même de découvrir d'autres théorèmes que je n'ai pas encore rencontrés sur mon chemin.

Je t'exposerai donc, en premier lieu, la première proposition que j'ai découverte par la Mécanique : « Tout segment de parabole vaut une fois et un tiers le triangle ayant même base et même hauteur », ensuite toutes les autres propositions découvertes par la même méthode. À la fin du livre j'inscrirai les [démonstrations] géométriques....

Lemmes

I. Si l'on [retranche une grandeur a d'une autre grandeur A n'ayant pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur restante b sera situé sur la droite qui joint les deux autres centres, prolongée dans le sens du centre de A ; et l'on obtiendra la distance du centre de b au centre de A] en prenant une longueur qui soit par rapport à la distance des centres de A et de a, comme le poids de a est au poids de b.

II. Si les centres de gravité d'un nombre quelconque de grandeurs sont situés sur une même droite, le centre de gravité du système total sera également situé sur cette droite.

III. Toute droite a pour centre de gravité le point qui la divise en deux parties égales.

IV. Tout triangle a pour centre de gravité le point de rencontre de ses médianes.

V. Tout parallélogramme a pour centre de gravité le point de rencontre de ses diagonales.

VI. Le cercle a pour centre de gravité son centre de figure.

VII. Tout cylindre a pour centre de gravité le point milieu de son axe.

VIII. Tout cône a pour centre de gravité [un point situé sur la droite menée du sommet au centre de la base et qui la divise en deux segments dont celui qui part du sommet est] triple [de l'autre]. [Les propositions] ci-dessus [ont été précédemment] démontrées ; [on y joindra la suivante dont la démonstration est facile] :

IX. [Étant données deux séries de grandeurs $AA_1A_2A_3$..., $BB_1B_2B_3$... en même nombre et telles que le rapport de deux grandeurs de même rang soit constant $A/B = A_1/B_1 = A_2/B_2$...], si tout ou partie des grandeurs A sont dans des rapports quelconques avec des grandeurs CC_1C_2... et si les grandeurs B de rang correspondant sont respectivement dans les mêmes

rapports avec d'autres grandeurs DD1D2..., la somme des grandeurs A sera à la somme des grandeurs C considérées, comme la somme des grandeurs B à celle des grandeurs D correspondantes :

$$[\Sigma A/\Sigma C = \Sigma B/\Sigma D].$$

$$Z\Gamma/\Gamma E = \text{POIDS } A\Delta/\text{POIDS } \Delta B.$$

Puisque C/A = D/B, ou C/D = A/B = m, et de même C1/D1 = A1/B1 = m, etc., on a évidemment : ΣC/ΣD = ΣA/ΣB, d'où ΣA/ΣC = ΣB/ΣD.

Notre lemme peut être appliqué (et l'était sans doute dans le texte intégral des derniers théorèmes) pour passer de la constatation de l'équilibre des sections AA1A2... CC1C2... déterminées par des plans équidistants dans un volume V et dans un volume auxiliaire W, à l'équilibre de ces volumes eux-mêmes. Considérons, en effet, les sections A comme les bases de prismes élémentaires BB1B2... dont la somme enveloppe le volume V ; et de même les sections C comme les bases de prismes élémentaires DD1D2... dont la somme

$$B/D = \text{M}A/\text{M}C = A/C,\ B1/D1 = A1/C1,\ \text{ETC.}\ ;\ \text{DONC} : \Sigma B/\Sigma D = \Sigma A/\Sigma C.$$

Reste à passer des corps enveloppants (ΣB, ΣD) aux volumes V, W eux-mêmes : c'est ce que fait Archimède en s'appuyant sur le postulat d'Eudoxe cité plus haut, p. 915, note 5. [Le contenu de la note qu'on vient de lire m'a été suggéré par M. R. Prévost.]

Théorème I

Étant donné un segment de parabole ABΓ (fig. 2), si par le milieu Δ de la corde on mène le diamètre ΔE qui coupe l'arc en B et qu'on joigne BA, BΓ, la surface du segment ABΓ vaut les 4/3 du triangle ABΓ.

Menons AZ parallèle au diamètre, et la tangente ΓZ à la courbe. Prolongeons ΓB jusqu'à sa rencontre K avec AZ, et, au delà, d'une longueur KΘ = KΓ. Imaginons que ΓΘ soit un levier ayant pour point fixe son milieu K. Soit enfin MΞ une parallèle quelconque à ΔE.

Puisque ΓZ est une tangente à la parabole et ΓA
Fig. 2. une corde conjuguée (du diamètre BΔ), on a EB = BΔ, car ceci est démontré dans les Éléments. On a, dès lors, — à cause des parallèles ZA, MΞ, EΔ : — MN = NΞ, ZK = KA.

D'autre part, on a :

car ceci a été démontré dans un lemme.

Comme ΓA/AΞ = ΓK/KN, on peut donc écrire aussi :

$$\Gamma K/KN = M\Xi/\Xi O,$$

et, puisqu'on a pris KΘ = ΓK :

Transportons ΞO en TH, avec Θ pour milieu c'est-à-dire pour centre de gravité [Lemme III]. De même N sera le centre de gravité de la droite MΞ restée en place. Comme K est le point fixe du levier, on voit que, à cause de l'égalité (2), les droites TH (= ΞO) et MΞ se feront équilibre par rapport à ce point fixe, puisque les distances de leurs centres à ce point sont inversement proportionnelles à leurs longueurs (c'est-à-dire à leurs poids). K sera donc le centre de gravité de leurs poids composés.

Il en sera de même pour toutes les parallèles menées au diamètre à l'intérieur du triangle ZAΓ : la parallèle, restant en place, fera équilibre à sa portion comprise dans le segment, supposée transportée en Θ, et le centre de gravité du couple sera toujours le point K.

La somme des parallèles en question, c'est l'aire du triangle ΓAZ ; la somme de leurs portions semblables à OΞ, interceptées par le segment, c'est le segment parabolique BAΓ. Donc au total le triangle ZAΓ, restant en place, fera équilibre au segment entier transporté en Θ, et le centre de gravité de leur système sera K.

Prenons sur ΓK le point X tel que ΓK = 3 KX : Ce point (étant au tiers de la médiane ΓK et par conséquent au point de rencontre des 3 médianes) sera le centre de gravité du triangle ΓAZ, comme cela a été démontré dans les Équilibres. Comme le triangle fait équilibre par rapport à K au segment, transporté au centre Θ (les distances de leurs centres de gravité au point fixe sont inversement proportionnelles à leurs aires) :

$$\text{TR. AZΓ}/\text{SEGM. ABΓ} = \Theta K/KX = 3.$$

D'autre part, le triangle ΓAZ est quadruple du triangle ABΓ à cause de ZK = KA, AΔ = ΔΓ ; donc finalement :

$$\text{SEGM. ABΓ}/\text{TR. ABΓ} = 4/3.$$

Ce qui précède ne constitue pas une démonstration (complète), mais suffit à donner à la conclusion une apparence de vérité. Voilà pourquoi, voyant d'une part que le théorème n'était pas (complètement) démontré, supposant d'autre part la conclusion exacte, j'ai trouvé une démonstration géométrique que j'ai publiée précédemment et que j'ajouterai plus bas en appendice (?)

On a $AZ/\Gamma Z^2 = OM/\Gamma M^2$, ou (1) $AZ/OM = \Gamma Z^2/\Gamma M^2$; or : (2) $AZ/\Xi M = \Gamma Z/\Gamma M$; divisons membre à membre (1) et (2) : il vient (3) $\Xi M/OM = \Gamma Z/\Gamma M = \Gamma A/\Gamma\Xi$, c'est-à-dire : O partage MΞ comme Ξ partage AΓ.

En particulier, Δ étant milieu de la corde AΓ, le sommet B du diamètre conjugué sera le milieu de ΔE (démonstration de la proposition EB = BΔ, plus simple que celle d'Apollonius). [Démonstration communiquée par R. Prévost.]

Archimède, dans la Quadrature de la parabole (§ 4 et 5), obtient cette relation ($A\Gamma/A\Xi = M\Xi/O\Xi$) par un calcul un peu plus long. Il écrit le rapport du carré des ordonnées aux abscisses en les rapportant à la tangente en B et au diamètre conjugué. Soit Oπρ la parallèle à la base du segment : $B\Delta/B\pi = A\Delta^2/O\pi^2 = \Delta\Gamma^2/\Xi\Delta^2$; en remplaçant $B\Delta/B\pi$ par $B\Gamma/B\rho$, et $\Delta\Gamma/$

ΞΔ par ΒΓ/ΒΝ, il vient : ΒΓ/Βρ = ΒΓ²/ΒΝ², ou ΒΓ/ΒΝ = ΒΝ/Βρ = ΒΓ + ΒΝ/ΒΝ + Βρ = ΓΝ/Νρ.

Remplaçons de nouveau ΒΓ/ΒΝ par ΔΓ/ΔΞ et ΓΝ/Νρ par ΝΞ/ΝΟ ; il vient : ΔΓ/ΞΔ = ΝΞ/ΝΟ ou : 2ΔΓ/ΔΓ − ΞΔ = 2ΝΞ/ΝΞ − ΝΟ, c'est-à-dire ΑΓ/ΑΞ = ΜΞ/ΟΞ.

1 + 1/4 + 1/4² + 1/4³ ..., SÉRIE DONT LA SOMME EST 4/3.

Théorème II

1 Toute sphère est quadruple du cône qui a une base égale à un grand cercle et une hauteur égale au rayon de la sphère ;

2 Le cylindre ayant une base égale à un grand cercle et une hauteur égale à un diamètre de la sphère équivaut aux 3/2 du volume de celle-ci.

Soit ΑΒΓΔ (fig. 3) un grand cercle de la sphère, ΑΓ, ΒΔ deux diamètres perpendiculaires ; par ΒΔ on mène un grand cercle de plan perpendiculaire à
Fig. 3. ΑΒΓΔ et on prend ce cercle pour base d'un cône ayant son sommet en A.

Prolongeons maintenant la nappe du cône jusqu'à sa rencontre avec le plan mené par Γ parallèlement à sa base : l'intersection sera un cercle de diamètre EZ, perpendiculaire à ΑΓ. Sur ce cercle, avec l'axe ΑΓ, construisons le cylindre ΕΛΗΖ. Enfin prolongeons ΑΓ d'une longueur ΑΘ = ΑΓ et considérons ΓΘ comme un levier ayant pour milieu fixe A.

Menons une parallèle quelconque ΜΝ à ΒΔ, qui coupe le cercle ΑΒΓΔ en Ξ, Ο, le diamètre ΑΓ en Ζ, les droites ΑΕ, ΑΖ en Π, Ρ. Si, par cette droite ΜΝ, on mène un plan perpendiculaire à ΑΓ, il coupera le grand cylindre suivant le cercle ΜΝ, la sphère suivant le cercle ΞΟ, le grand cône ΑΕΖ suivant le cercle ΠΡ. On a (par identité) :

$$\Gamma A \times A\Sigma = M\Sigma \times \Sigma\Pi,$$

puisque ΓΑ = ΜΣ et ΑΣ = ΣΠ. Mais (dans le triangle rectangle ΑΞΓ) on a :

$$A\Xi^2 = \Gamma A \times A\Sigma.$$

Donc aussi :

$$M\Sigma \times \Sigma\Pi = A\Xi^2 \,[= \Xi\Sigma^2 + A\Sigma^2] = \Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2.$$

D'autre part, on a (toujours par identité) :

$$\Gamma A/A\Sigma = M\Sigma/\Sigma\Pi.$$

Remplaçant ΓΑ par son égal ΑΘ et multipliant les deux termes du second membre par ΜΖ, on a :

$$A\Theta/A\Sigma = M\Sigma^2/M\Sigma \times \Sigma\Pi,$$

ou, en substituant la valeur de MΣ × ΣΠ trouvée ci-dessus :

$$A\Theta/A\Sigma = M\Sigma^2/\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2 = MN^2/\Xi O^2 + \Pi P^2.$$

(Les aires des cercles étant proportionnelles aux carrés de leurs rayons ou diamètres, cette égalité peut s'écrire :)

$$\text{cercle } MN/\text{cercle } O\Xi + \text{cercle } \Pi P = A\Theta/A\Sigma.$$

Donc, si l'on suspend au centre de gravité Θ les deux cercles OΞ, ΠP déterminés par le plan parallèle dans la sphère et le cône, ils feront équilibre, par rapport au point fixe A, au cercle MN déterminé dans le grand cylindre et resté en place (puisque les aires pesantes sont inversement proportionnelles aux distances des centres de gravité au point fixe).

On démontrerait de même que, pour toute autre parallèle à EZ menée à l'intérieur du rectangle ΛZ, et par laquelle on mène un plan perpendiculaire à AΓ, le cercle déterminé dans le cylindre équilibre, par rapport au point A, les cercles déterminés dans le cône AEZ et dans la sphère, supposés transportés au centre de gravité commun Θ.

La somme des cercles déterminés représente les volumes respectifs du cylindre, du cône AEZ et de la sphère qu'ils remplissent entièrement. Donc le cylindre, resté en place, équilibre, par rapport à A, les deux autres solides transportés au centre de gravité commun Θ. Le cylindre a pour centre de gravité K (milieu de l'axe et centre de la sphère) ; la relation d'équilibre donne :

$$\text{cylindre } \Lambda Z/\text{cône } AEZ + \text{sphère} = A\Theta/AK = 2.$$

En d'autres termes :

$$\text{cylindre } \Lambda Z = 2\ (\text{cône } AEZ + \text{sphère}).$$

Mais le cylindre ΛZ vaut trois fois le cône AEZ, donc :

$$3 \text{ cônes } AEZ = 2 \text{ cônes } AEZ + 2 \text{ sphères}.$$

ou :

$$\text{cône } AEZ = 2 \text{ sphères } K.$$

Comme le cône AEZ à rayon et hauteur doubles de ceux du cône ABΔ, il vaut 8 fois ce dernier cône ; on peut donc écrire

c'est-à-dire :

$$\text{sphère } K = 4 \text{ cônes } AB\Delta.$$

Menons maintenant dans le rectangle ΛZ les parallèles ΦBX, ΨΔΩ à AΓ et considérons les cylindres ΦΨΩX, ΦΨΔB. Le cylindre ΦΩ vaut 2 fois le cylindre ΦΔ, et ce dernier cylindre vaut 3 fois le cône ABΔ, comme on l'a vu dans les Éléments. Donc :

$$\text{cylindre } \Phi\Omega = 6 \text{ cônes } AB\Delta.$$

Rapprochant cette égalité de la précédente, il vient :

CYLINDRE ΦΩ/SPHÈRE K = 6 CÔNES ABΔ/4 CÔNES ABΔ = 3/2. C. Q. F. D.

Remarque. [De] ce théorème, par lequel on a établi que toute sphère vaut 4 fois le cône qui a pour base un grand cercle et pour hauteur un rayon de la sphère, [m'est venue] l'idée que la surface d'une sphère vaut quatre grands cercles. C'est en effet une hypothèse vraisemblable que, de même que tout cercle équivaut à un triangle ayant pour base la circonférence et pour hauteur le rayon, ainsi toute sphère équivaut (en volume) à un cône ayant pour base la surface de la sphère et pour hauteur le rayon.

D'après l'hypothèse, V = S × R/3. Substituant dans (1), il vient :

$$S \times R/3 = 4 \times C.R/3,$$

c'est-à-dire S = 4 C.

Il faut ajouter que le texte est incertain et qu'on pourrait traduire inversement : « L'idée de ce théorème… est née de ce que la surface d'une sphère vaut 4 grands cercles ». En effet, dans le Traité De la sphère et du cylindre I, Archimède commence par établir longuement que l'aire de la sphère vaut 4 grands cercles (§ 33 = I, p. 137, Heib.), et de là il déduit (§ 34) le théorème que le volume de la sphère vaut 4 fois le cône ABΔ. Pourtant Heiberg croit et je crois avec lui que la pensée d'Archimède a bien suivi l'ordre indiqué au texte.

Théorème III

1 Le cylindre ayant une base égale au plus grand cercle d'un ellipsoïde de révolution et une hauteur égale à l'axe de ce solide vaut les 3/2 de l'ellipsoïde.

2 Quand on coupe un ellipsoïde par un plan passant par son centre et perpendiculaire à son axe, le demi-ellipsoïde ainsi déterminé est double du cône ayant même base et même axe.

Soit l'ellipsoïde K (fig. 4) coupé par un plan
Fig. 4. passant par son axe suivant l'ellipse ABΓΔ, les diamètres AΓ, BΔ, le centre K ; soit encore le grand cercle de diamètre BΔ perpendiculaire à AΓ.

Considérons le cône ayant pour base le cercle BΔ, pour sommet A, et prolongeons la surface latérale jusqu'à son intersection, suivant le cercle EZ, avec le plan mené par Γ parallèlement à la base ; construisons aussi le cylindre ayant pour base le cercle EZ, pour axe AΓ ; enfin prolongeons AΓ d'une longueur égale AΘ, et considérons ΘΓ comme un levier ayant A pour milieu fixe.

Dans le rectangle ΛZ, menons à EZ une parallèle quelconque MN, et par MN un plan perpendiculaire à l'axe AΓ. Ce plan coupera le cylindre suivant un cercle de diamètre MN, l'ellipsoïde suivant un cercle de diamètre ΞO, le cône suivant un cercle de diamètre ΠP.

On a :

donc aussi :

Je dis maintenant que $M\Sigma \times \Sigma\Pi = \Sigma\Pi^2 + \Sigma\Xi^2$. En effet, on a :

car l'un et l'autre rapport égale celui du grand axe au paramètre.

Dès lors (puisque AK = KΓ) :

$$A\Sigma \times \Sigma\Gamma/\Sigma\Xi^2 = AK^2/KB^2 = A\Sigma^2/\Sigma\Pi^2 ;$$

intervertissant :

$$A\Sigma^2/A\Sigma.\Sigma\Gamma = \Sigma\Pi^2/\Sigma\Xi^2.$$

Mais (à cause de $A\Sigma/\Sigma\Gamma = \Sigma\Pi/\Pi M$) :

$$A\Sigma^2/A\Sigma.\Sigma\Gamma = \Sigma\Pi^2/\Sigma\Pi.\Pi M.$$

Donc :

$$\Sigma\Pi^2/\Sigma\Xi^2 = \Sigma\Pi^2/\Sigma\Pi.\Pi M,$$

c'est-à-dire :

$$\Sigma\Xi^2 = \Sigma\Pi.\Pi M.$$

Ajoutant de part et d'autre $\Sigma\Pi^2$, il vient :

$$\Sigma\Xi^2 + \Sigma\Pi^2 = \Sigma\Pi^2 + \Sigma\Pi.\Pi M = \Sigma\Pi\,(\Sigma\Pi + \Pi M) = \Sigma\Pi \times M\Sigma,$$

comme nous l'avions annoncé.

Remplaçons maintenant, dans l'égalité (2), $M\Sigma \times \Sigma\Pi$ par sa valeur ; il vient :

$$A\Theta/A\Sigma = M\Sigma^2/\Sigma\Xi^2 + \Sigma\Pi^2 = \text{cercle } MN/\text{cercle } O\Xi + \text{cercle } \Pi P.$$

En d'autres termes, par rapport au point fixe A, le cercle MN, restant en place, équilibrera la somme des cercles OΞ et ΠP suspendus au centre de gravité commun Θ, car les distances des centres de gravité au point fixe sont inversement proportionnelles aux poids considérés.

Semblablement, pour toute parallèle à EZ menée à l'intérieur du rectangle AZ et par laquelle on mène un plan perpendiculaire à AΓ, le cercle intercepté dans le grand cylindre, restant en place, équilibrera par rapport à A les deux cercles interceptés dans l'ellipsoïde et dans le cône, transférés en Θ, comme centre de gravité commun.

Remplissons complètement ces trois corps de cercles semblables. Au total, le cylindre restant en place équilibrera l'ellipsoïde et le cône AEZ transportés en Θ. Le cylindre a pour centre de gravité K, on doit donc avoir :

$$\Theta A/AK = \text{cylindre } AZ/\text{ellipsoïde} + \text{cône } AEZ.$$

Mais $\Theta A = 2AK$, donc :

cylindre AZ = 2 fois (ellipsoïde + cône AEZ).

Mais le cylindre ΛZ vaut trois fois le cône AEZ qui a même base et même hauteur ; donc :

3 cônes AEZ = 2 ellipsoïdes + 2 cônes AEZ.

ou

cône AEZ = 2 ellipsoïdes.

Le cône AEZ vaut huit fois le cône ABΔ dont le rayon de base et l'axe sont moitié des siens, donc :

ellipsoïde = 4 cônes ABΔ

et

1/2 ellipsoïde = 2 cônes ABΔ.

Menons maintenant dans le rectangle ΛZ les parallèles XΦ, ΩΨ à l'axe par les points B, Δ et considérons le cylindre ΦΨΩX. Il est évidemment double du cylindre ΦΨΔB, qui a base égale et axe moitié moindre ; ce dernier vaut trois fois le cône ABΔ, donc :

cylindre ΦΨΔB = 6 cônes ABΔ,

et comme le cône vaut le quart de l'ellipsoïde :

cylindre ΦΨΔB = 6/4 ou 3/2 ellipsoïde. C. q. f. d.

$$E\Theta/E\Delta = BK.K\Gamma/AK^2.$$

EΘ sera le paramètre (ὀρθία). Apollonius démontre (I, 21 ; p. 75, Heib.) que, pour un point Ξ quelconque de l'ellipse, on a :

$$\Xi\Sigma^2/A\Sigma \times \Sigma\Gamma = \text{paramètre/grand axe}.$$

Heiberg croit que les mots soulignés au texte ont été interpolés
Fig. 5. ou du moins substitués à une phrase autrement rédigée, parce que les termes ὀρθία et πλαγία sont de la création d'Apollonius.

L'égalité (3) peut d'ailleurs être démontrée assez simplement en considérant l'ellipse comme la projection orthogonale d'un cercle (théorème de Stevin). Soient 2a, 2b

On peut aussi déduire cette relation de l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, d'où $y^2 = (a^2 - x^2)\, b^2/a^2$. Or, $A\Sigma.\Sigma\Gamma/y^2 = (a + x)(a - x)/y^2 = a^2 - x^2/y^2 = a^2/b^2$ = constante.

Théorème IV

Tout segment d'un paraboloïde de révolution, déterminé par un plan perpendiculaire à l'axe, vaut les 3/2 du cône ayant même base et même axe.

Fig. 6.

Soit un paraboloïde coupé par un plan passant par son axe, qui détermine la parabole BAΓ (fig. 6). Coupons le paraboloïde par un second plan, perpendiculaire à l'axe. Soient BΓ l'intersection des deux plans, ΔA l'axe du segment, que nous prolongeons d'une longueur AΘ = ΔA, et considérons ΔΘ comme un levier dont le milieu fixe est A.

La base du segment est le cercle BΓ, perpendiculaire à AΔ. Imaginons un cône ayant pour base ce cercle et pour sommet le point A, et un cylindre ayant pour base ce même cercle et pour axe AΔ. Dans le rectangle EZΓB, menons une parallèle quelconque MN à BΓ, et par MN un plan perpendiculaire à AΔ, qui coupera le cylindre suivant le cercle MN, et le segment de paraboloïde suivant le cercle ΞO.

BAΓ étant un arc de parabole, AΔ l'axe de la parabole, ΞΣ, BΔ des ordonnées, on a :

et comme ΔA = ΘA, (BΔ = MΣ), il vient :

Mais cette dernière expression représente aussi le rapport du cercle MN au cercle ΞO. On a donc :

Par conséquent le cercle MN, déterminé dans le cylindre, équilibre par rapport au point A le cercle ΞO déterminé dans le paraboloïde, suspendu au centre de gravité Θ : car le cercle MN a pour centre de gravité son centre Σ, le cercle ΞO transporté a pour centre de gravité Θ, et les distances des deux centres au point fixe A sont inversement proportionnelles aux cercles correspondants.

On démontrera de même, pour toute parallèle menée à BΓ dans le rectangle BΓZE, par laquelle on mène un plan perpendiculaire à AΔ, que le cercle déterminé dans le cylindre, restant en place, équilibrera le cercle déterminé dans le paraboloïde, transporté au point Θ du levier comme centre de gravité.

Remplissons de cercles pareils le cylindre et le segment de paraboloïde. Au total, le cylindre, restant en place, équilibrera, par rapport au point A, le segment de paraboloïde transporté en Θ comme centre de gravité. Dès lors, les distances de leurs centres de gravité au point A devront être inversement proportionnelles à leurs volumes, ou, puisque le cylindre a pour centre de gravité le milieu K de son axe :

Mais AK est la moitié de AΘ, le cylindre vaut donc 2 fois le segment de paraboloïde. Et, comme le cylindre vaut 3 fois le cône ABΓ qui a même base et même axe, on voit finalement que le segment vaut les 3/2 du cône.

Théorème V

Tout segment de paraboloïde de révolution, déterminé par un plan perpendiculaire à l'axe, a son
Fig. 7. centre de gravité situé sur la droite qui forme l'axe du segment, en un point tel que sa distance au sommet soit double de sa distance à la base.

Soit un segment de paraboloïde déterminé par un plan perpendiculaire à l'axe (fig. 7). Coupons-le par un autre plan passant par l'axe, qui détermine la parabole ΒΑΓ. Soit ΒΓ l'intersection des deux plans, ΑΔ l'axe du segment et de la courbe.

Prolongeons ΑΔ d'une longueur égale ΑΘ, considérons ΔΘ comme un levier dont le milieu fixe est Α, et inscrivons dans le segment de paraboloïde un cône ΑΒΓ. Enfin menons à l'intérieur de la parabole une parallèle quelconque ΞΟ à ΒΓ, qui coupera la parabole en Ξ, Ο, et les arêtes du cône en Π, Ρ.

Dans la parabole, ΞΣ, ΒΔ sont des perpendiculaires à l'axe. On a donc :

D'autre part (à cause des triangles semblables), on a :

Par conséquent, en combinant (1) et (2):

$$\text{ΒΔ}^2/\text{ΞΣ}^2 = \text{ΒΔ}^2/\text{ΒΔ.ΠΣ},$$

d'où résulte que :

$$\text{ΞΣ}^2 = \text{ΒΔ.ΠΣ}.$$

ΞΣ est donc moyen proportionnel entre ΒΔ et ΠΣ, et l'on a (en divisant les deux membres par ΠΣ^2) :

$$\text{ΒΔ}/\text{ΠΣ} = \text{ΞΣ}^2/\text{ΠΣ}^2.$$

Mais nous avons vu (2) que ΒΔ/ΠΣ = ΔΑ/ΑΣ = ΘΑ/ΑΣ, donc :

$$\text{ΘΑ}/\text{ΑΣ} = \text{ΞΣ}^2/\text{ΣΠ}^2.$$

Menons par ΞΟ un plan perpendiculaire à ΑΔ : il coupera le segment de paraboloïde suivant le cercle ΞΟ, le cône suivant le cercle ΠΡ.

Le rapport $\text{ΞΣ}^2/\text{ΣΠ}^2$ est aussi celui du cercle ΞΟ au cercle ΠΡ. On a donc :

$$\text{ΘΑ}/\text{ΑΣ} = \text{cercle ΞΟ}/\text{cercle ΠΡ}.$$

Ainsi le cercle ΞΟ restant en place équilibrera, par rapport au point Α, le cercle ΠΡ transporté au point Θ, car ils ont pour centres de gravité les points Σ et Θ, dont les distances au point fixe Α sont inversement proportionnelles aux surfaces des cercles considérés.

On démontrera de même que, pour toute autre parallèle à ΒΓ menée dans la parabole, et par laquelle on mène un plan perpendiculaire à ΑΔ, le cercle déterminé dans le segment de

paraboloïde, restant en place, équilibrera, par rapport au point A, le cercle déterminé dans le cône, transporté au centre de gravité Θ.

Remplissons de cercles pareils le segment et le cône. Au total, la somme des cercles du segment, c'est-à-dire le segment, restant en place, équilibrera, par rapport au point A, la somme des cercles du cône, c'est-à-dire le cône, transporté au point Θ du levier comme centre de gravité. Le centre de gravité du système total est A, le centre de gravité du cône transporté est Θ ; dès lors (lemme I) le centre de gravité de la différence, c'est-à-dire du segment de paraboloïde, sera situé sur la droite AΘ prolongée dans la direction de A, en un point K tel que

$$A\Theta/AK = \text{segment}/\text{cône}.$$

Mais on sait (Théorème IV) que le segment vaut les 3/2 du cône ; donc aussi AΘ = 3/2 AK, et par conséquent le centre de gravité du segment de paraboloïde est bien situé en un point de l'axe tel que sa distance au sommet soit double de sa distance à la base.

Théorème VI

Tout hémisphère a pour centre de gravité un point situé sur son axe et dont les distances au sommet et à la base sont dans le rapport de 5 à 3.

Soit une sphère et un plan passant par son centre qui la coupe suivant le cercle ABΓΔ (fig. 8). Traçons dans le cercle deux diamètres rectangulaires AΓ, BΔ. Par BΔ menons un plan perpendiculaire à AΓ, et considérons le cône ayant pour base le cercle de diamètre BΔ (dans un plan perpendiculaire à AΓ), pour sommet A, pour côtés AB, AΔ. Prolongeons AΓ d'une longueur AΘ = AΓ et considérons ΘΓ comme un levier ayant pour milieu fixe A.

Dans le demi-cercle BAΔ, menons une parallèle
Fig. 8. quelconque ΞO à BΔ. Elle coupera la circonférence du demi-cercle en Ξ, O, le cône en Π, P, l'axe AΓ en E. Par ΞO faisons passer un plan perpendiculaire AΓ. Il coupera l'hémisphère suivant le cercle ΞO, le cône suivant le cercle ΠP. On a :

Mais $A\Xi^2 = AE^2 + E\Xi^2$, $AE^2 = E\Pi^2$. Substituant, il vient :

et, comme AΓ = AΘ,

Les cercles ΞO et ΠP ont pour centre de gravité E. Si donc on suppose ces deux cercles en place, et le cercle ΠP seul transporté en Θ comme centre de gravité, les distances AΘ, AE des centres au point fixe étant inversement proportionnelles aux surfaces représentées, il en résulte que les deux cercles feront équilibre, par rapport au point A, au cercle ΠP transporté en Θ.

[Le même raisonnement s'appliquant à toutes les autres positions de la parallèle, en additionnant tous les cercles pareils, on voit que le cône et l'hémisphère restant en place équilibreront, par rapport au point A, le cône seul transporté en Θ.

Considérons maintenant, suspendu en Θ, un cylindre MN équivalent au cône ABΔ et divisons-le par un plan horizontal en deux cylindres partiels dont l'un M équilibre le cône par rapport à A : alors l'autre cylindre partiel N équilibrera l'hémisphère. Soit maintenant sur AH le point Φ tel que AΦ = 3 ΦH : Φ sera le centre de gravité du cône (lemme VIII). Je prends sur AH le point X tel que AX/XH = 5/3, ou, ce qui revient au même, AH/AX = 8/5 : je dis que X est le centre de gravité de l'hémisphère.

En effet, puisque le cylindre M (centre de gravité Θ) équilibre par rapport à A le cône ABΔ (centre de gravité Φ), on a :

$$\text{cyl. M/cône ABΔ} = \Phi A/\Theta A = 3/4\,AH/2\,AH = 3/8.$$

Comme : vol. cône ABΔ = vol. cyl. MN, on a :

$$\text{cyl. M/cyl. MN} = 3/8, \text{ d'où cyl. M/cyl. MN} - \text{cyl. M} = 3/5, \text{ cyl. MN/cyl. N} = 8/5,$$

ou encore :

D'autre part, on a (Théorème II) :

Multipliant membre à membre (1) et (2), il vient :

$$\text{hémisphère/cylindre N} = A\Theta/AX.$$

Mais le cylindre N a pour centre de gravité Θ ; il équilibre d'ailleurs — on l'a vu plus haut — l'hémisphère par rapport au point A : donc nécessairement X est le centre de gravité de l'hémisphère.]

$$\text{hémisph. + cône/cône} = A\Theta/A\Omega,$$

et, comme hémisph. = 2 cônes, il en résulte AΘ = 3 AΩ : le point Ω est donc au tiers du diamètre (ou aux 2/3 du rayon) à partir de A. Le centre de gravité du cône (lemme VIII) est en Φ, aux 3/4 de AH. Donc le centre de gravité de l'hémisphère seul — différence du système et du cône — est (d'après lemme I), sur ΦΩ prolongé dans le sens de Ω, en un point X tel que :

$$X\Omega/\Omega\Phi = \text{cône/hémisph.} = 1/2,$$

en d'autres termes, à une distance de Ω moitié moindre (et de sens contraire) que celle de Φ. Calculons AX. On a ΩΦ = AΦ − AΩ = 3/4 AH − 2/3 AH = 1/12 AH ; donc XΩ = 1/24 AH et AX = AΩ − XΩ = 2/3 AH − 1/24 AH = 15/24 AH = 5/8 AH. C. q. f. d.

Théorème VII

Tout segment de sphère (à une base) est au cône [de même base et de même hauteur comme le rayon de la sphère plus la hauteur du segment supplémentaire sont à cette dernière hauteur seule].

[Coupons la sphère (fig. 9) par un plan passant par le centre qui détermine le grand cercle ΑΛΓΛ′ et coupe le segment donné suivant l'arc ΔΛΑΛ′Β. Traçons le diamètre ΑΓ passant par le sommet du segment et qui coupe la base ΔΒ en Η ; menons le
Fig. 9. diamètre perpendiculaire ΛΛ′. Tirons ΑΛ, ΑΛ′ et prolongeons-les jusqu'à leurs rencontres Ε, Ζ avec ΔΒ prolongée et Ψ, Ω avec la tangente en Γ. Imaginons enfin les cônes ayant pour sommet Α, pour bases respectives les cercles de diamètre ΔΒ, ΕΖ, ΨΩ, et le cylindre ayant pour base le cercle ΨΩ et pour axe ΑΓ, cylindre que le plan de base du segment coupe selon le cercle FY. Enfin prolongeons ΑΓ d'une longueur ΑΘ = ΑΓ et soit ΓΘ un levier ayant pour milieu fixe Α].

Àl'intérieur du rectangle TY, je mène une parallèle quelconque MN à ΔΒ et fais passer par MN un plan perpendiculaire à ΑΓ. Il coupe le cylindre suivant le cercle de diamètre MN, le segment sphérique suivant le cercle ΞΟ, le cône AEZ suivant le cercle ΠΡ.

On démontrera, comme précédemment, que le cercle MN restant en place équilibrera par rapport au point A la somme des cercles ΞΟ, ΠΡ transportés en Θ comme centre de gravité. (Il en sera de même pour toute autre position de la parallèle MN et de son plan sécant.)

Si donc l'on remplit entièrement le cylindre TY, le cône AEZ et le segment ΑΔΒ de cercles pareils, au total, TY restant en place équilibrera par rapport au point A la somme du cône AEZ et du segment ΑΔΒ transportés en Θ.

Prenons maintenant sur ΑΓ le point X tel que AX = XH, et le point Φ tel que ΑΦ = 3 ΦΗ. Le point X, étant le milieu de l'axe AH, est le centre de gravité du cylindre TY ; de même (lemme VIII), Φ est le centre de gravité du cône AEZ.

La relation d'équilibre trouvée peut s'écrire :

[c'est-à-dire :

$$\text{cyl. TY}/\text{cône AEZ} + \text{seg. A}\Delta\text{B} = 2\,\text{R}/\text{H}/2 = 4\,\text{R}/\text{H}.$$

Mais

$$\text{cyl. TY}/\text{cyl. EZ} = 4\,\text{R}^2/\text{H}^2\ ;$$

donc :

$$\text{cyl. TY}/\text{cône AEZ} = 12\,\text{R}^2/\text{H}^2.$$

Or,

$$\text{cône AEZ}/\text{cône A}\Delta\text{B} = \text{H}^2/\text{HH}' = \text{H}/\text{H}'\ ;$$

donc :

$$\text{cyl. TY}/\text{cône A}\Delta\text{B} = 12\,\text{R}^2/\text{HH}'.$$

Substituant dans (1) ces valeurs de cône AEZ et cylindre TY en fonction de cône ΑΔΒ, il vient :

$$\text{cône } A\Delta B\ 12\,R^2/HH'/\text{cône } A\Delta B\ H/H' + \text{seg.} = 4\,H/R\ ;$$

d'où :

$$\text{seg.}\ 4\,R/H = \text{cône}\ (12\,R^2/HH' - 4\,R/H') = \text{cône}\ 4\,R/H'(3\,R/H - 1)$$

donc

$$\text{seg.}/\text{cône} = H/H'(3\,R/H - 1) = R + H'/H'.]$$

Si l'on appelle R le rayon de la sphère, h la hauteur du segment, h′ celle du segment supplémentaire, l'énoncé

Comme $\Delta H^2/h' = h$ et que $R + h' = 3R - h$, on voit que cette valeur revient à l'expression connue : $V = \tilde{\omega} h^2 (R - h/3)$.

Théorème VIII-IX

[Tout segment sphérique plus grand qu'un hémisphère (?) a son centre de gravité situé sur son axe en un point tel que sa distance au sommet est à sa distance à la base comme la hauteur du segment plus quatre fois la hauteur du segment supplémentaire est à la hauteur plus deux fois la hauteur du segment supplémentaire :

$$XA/XH = HA + 4\,H\Gamma/HA + 2\,H\Gamma.]$$

[Soit BAΔ (fig. 10) un segment sphérique, plus grand que l'hémisphère. Je prends sur sa hauteur AH le point X tel que $XA/XH = HA + 4\,H\Gamma/HA + 2\,H\Gamma$: je dis que X est le centre de gravité du segment.]

Prolongeons AΓ de AΘ = AΓ, et, dans l'autre sens, de ΓΞ égal au rayon de la sphère, et considérons ΓΘ comme un levier ayant pour milieu fixe A. Dans le plan de base du segment, de H comme centre, traçons un cercle avec un rayon égal à AH. Imaginons le cône qui a ce cercle pour base, A pour sommet, AE, AZ pour génératrices. Enfin, menons une parallèle quelconque KΛ à EZ qui coupe la circonférence en K, Λ, les génératrices du cône en P, O, la hauteur en Π.

Fig. 10.

On a d'abord :

Mais $AK^2 = A\Pi^2 + \Pi K^2$, $A\Pi^2 = \Pi O^2$ — puisque $AH^2 = EH^2$ — ; donc :

et, comme AΓ = AΘ :

Si donc on suppose le cercle PO déterminé dans le cône par le plan parallèle à la base du segment, transporté en Θ comme centre de gravité, puisque KΛ, PO ont pour centre de gravité Π, le cercle transporté fera équilibre par rapport au point A à la somme des deux cercles KΛ, PO — déterminés dans le segment et dans le cône — laissés en place.

Il en sera de même pour tous les cercles de même genre déterminés par les plans parallèles à la base du segment : toujours le cercle déterminé dans le cône AEZ, transporté en Θ, équilibrera par rapport à A ce même cercle et le cercle déterminé dans le segment sphérique, laissés en place. Au total donc, le segment et le cône, laissés en place, équilibreront par rapport à A le cône transporté en Θ comme centre de gravité.

Considérons maintenant un cylindre MN équivalent au cône AEZ et prenons sur AH le point Φ tel que AH = 4 ΦH : Φ sera, comme on l'a vu (lemme VIII), le centre de gravité du cône AEZ. Coupons le cylindre par un plan perpendiculaire à ses génératrices, qui le divise en deux cylindres tels que l'un d'eux M fasse équilibre au cône AEZ. Puisque le cylindre total équivaut au cône AEZ, qui, en Θ, équilibre le cône et le segment en place, si le cylindre partiel M équilibre le cône AEZ, le reste, c'est-à-dire le cylindre partiel N, équilibrera le segment. On a vu (Théorème VII) que :

D'autre part :

(Comparant (4) et (5) il vient :)

Nous avons par construction :

$$AX/XH = HA + 4\,H\Gamma/HA + 2\,H\Gamma, \text{ ou inversement } XH/AX = 2\,H\Gamma + HA/4\,H\Gamma + HA.$$

Si l'on combine ces deux expressions (en additionnant aux numérateurs de la seconde ceux de la première), il vient :

$$AX + XH/AX = (HA + 4\,H\Gamma) + (2\,H\Gamma + HA)/HA + 4\,H\Gamma,$$

c'est-à-dire :

Mais on a évidemment :

Par conséquent :

En portant cette valeur de HΞ/AH dans l'équation (6), on a :

Le cylindre M équilibre par rapport à A le cône EAZ. Ce cylindre a pour centre de gravité Θ, le cône a pour centre Φ. On doit donc avoir :

(d'où en soustrayant les numérateurs des dénominateurs) :

(ou en ajoutant les dénominateurs aux numérateurs) :

$$\text{cyl. } MN/\text{cyl. } N = A\Gamma/\Gamma\Phi,$$

ou encore, puisque le cylindre MN équivaut au cône EAZ :

Combinant (12) et (9), il vient :

Mais on a vu que le segment équilibre par rapport à A le cylindre N : le cylindre ayant pour centre de gravité Θ, cette égalité ne peut être vraie que si X est le centre de gravité du segment. C. q. f. d..

Tout segment sphérique a son centre de gravité sur son axe en un point tel que sa distance au sommet soit à sa distance à la base, comme la hauteur du segment plus quatre fois la hauteur du segment supplémentaire est à la hauteur du segment plus deux fois la hauteur du segment supplémentaire.

Ce théorème se démontre de la même manière que le précédent.

or, $H\Xi = H\Gamma + \Gamma\Xi = (2R - h) + R = 3R - h$, c'est-à-dire le quart de l'expression ci-dessus.

$$\text{De même : } 4H\Gamma + HA = 4(2R - h) + 4h = 8R - 3h ;$$

or, $\Gamma\Phi = \Gamma H + \Phi H = 2R - h + h/4 = 2R - 3h/4$, c'est-à-dire encore le quart de l'expression ci-dessus.

On a vu, dans la première partie de la démonstration, que : (segm. ABΔ + cône AEZ) restant en place équilibrent (par rapport à A) le cône AEZ au c.g. Θ. Appelons Ω le c.g. du système (segm. ABΔ + cône AEZ). Cette relation d'équilibre implique l'égalité :

Calculons segm. ABΔ en fonction du cône AEZ. On a vu (Th. VII) que :

Mais :

d'où :

Remplaçant segm. ABΔ par cette valeur dans (1), il vient :

d'où :

Ainsi le c.g. Ω du système (segm. ABΔ + cône AEZ) est situé aux 2/3 de AH à partir de A. Le cône seul (lemme VIII) a son c.g. en Φ aux 3/4 de AH à partir de A. Si donc on appelle X le c.g. cherché du segment seul, on a (d'après lemme I) :

Comme $\Omega\Phi = A\Phi - A\Omega = 3/4\,h - 2/2\,h = h/12$ il vient donc :

$$AX = A\Omega - X\Omega = 2h/3 - h^2/12(R + h') = h/3\,[2 - h/4(R + h')] ;$$

$$XH = \Omega H + X\Omega = h/3 + h^2/12(R + h') = h/3\,[1 + h/4(R + h')],$$

et par conséquent :

$$AX/XH = 8R + 8h' - h/4R + 4h' + h = 12h' + 3h/6h' + 3h = 4h' + h/2h' + h,$$

ce qui est l'expression cherchée.

$$AX/h - AX = h + 4(2R - h)/h + 2(2R - h) = 8R - 3h/4R - h,$$

d'où, en additionnant chaque dénominateur au numérateur :

$$h/h - AX = 12R - 4h/4R - h ; h(4R - h) = (12R - 4h)h - AX(12R - 4h)$$

donc la distance XΣ (c'est-à-dire D) $= R - h(8R - 3h)/12R - 4h = 12R^2 - 4hR - 8hR + 3h^2/12R - 4h = 12R^2 - 12hR + 3h^2/12R - 4h = 3(4R^2 - 4hR + h^2)/4(3R - h) = 3(2R -$

h)²/4(3 R – h). C. q. f. d.

Théorème X

[Tout segment d'hyperboloïde de révolution, déterminé par un plan perpendiculaire à l'axe, est au cône de même base et de même hauteur comme une ligne égale à l'axe du segment plus trois fois la distance du sommet au sommet du cône circonscrit est à une ligne égale à l'axe du segment plus deux fois cette distance (fig. 11) :

$$\text{segm. } \Gamma BA/\text{cône } \Gamma BA = BE + 3\,BT/BE + 2\,BT.]$$

On démontrera de même beaucoup d'autres propositions,
Fig. 11. que je laisse de côté, maintenant que la méthode est bien mise en lumière par les exemples précédents, pour aborder la démonstration des deux théorèmes énoncés au début de ce Traité.

Théorème XI-XIV

Si, dans un prisme droit à bases carrées, on inscrit un cylindre ayant ses bases inscrites dans les carrés opposés et sa surface latérale tangente aux plans des 4 faces latérales du prisme, un plan passant par le centre du cercle de base et l'un des côtés du carré opposé détachera du cylindre un volume qui sera le sixième du volume total.

Nous allons d'abord établir cette proposition par la méthode susdite [XI, XII, XIII], puis procéder à la démonstration géométrique proprement dite [XIV].

Soit donc un cylindre inscrit dans un prisme à bases carrées. Coupons le prisme par un plan passant par son axe et perpendiculaire au plan ΓαB (fig. 12) qui a détaché le sabot de cylindre. Ce plan coupera le prisme circonscrit (fig. 13) suivant le rectangle AB et le plan sécant suivant la droite BΓ. Soit ΓΔ l'axe commun du prisme et du cylindre, EZ une droite qui lui soit perpendiculaire en son milieu (Θ) ; par EZ menons un plan (horizontal) perpendiculaire à ΓΔ.

Sa section dans le prisme sera un carré MN (fig. 14), et dans le cylindre un cercle ΞΟΠΡ, tangent
Fig. 12. aux côtés du carré aux points Ξ, Ο, Π, Ρ. Le plan sécant et le plan horizontal mené par EZ se
Fig. 13. coupent suivant la droite ΚΛ, que le diamètre ΠΘΞ coupe en son milieu. Dans le demi-cercle ΟΠΡ, menons une droite quelconque ΣΤ perpendiculaire à ce diamètre et à une distance ΠΧ de Π ; par cette droite, faisons passer un plan (vertical) perpendiculaire au diamètre ΠΞ et prolongeons-le de part et d'autre du plan (horizontal) ΞΟΠΡ. Ce plan (vertical) déterminera : 1 dans le demi-cylindre
Fig. 14. — qui a pour base le demi-cercle ΟΠΡ et pour hauteur l'axe du prisme — une section

en forme de rectangle dont un côté (horizontal) = ΣT, et l'autre côté (vertical) = l'axe du cylindre ; 2 dans le sabot de cylindre, un autre rectangle dont un côté (horizontal) = ΣT, l'autre (vertical) = NY, NY étant une parallèle à BΩ, menée dans le rectangle AB (fig. 13), à une distance IE (de BΩ) égale à XΠ.

Puisque EΓ est un rectangle et NI, ΘΓ des parallèles coupées par EΘ, BΓ, on a :

$$E\Theta/\Theta I = \Omega\Gamma/\Gamma N = \Omega B/YN.$$

Or, le rectangle déterminé dans le demi-cylindre est au rectangle déterminé dans le sabot comme ΩB est à YN : car leurs deux autres côtés sont égaux à ΣT. On a donc :

$$\text{RECT. DU 1/2 CYL./RECT. DU SABOT} = \Omega B/YN = E\Theta/\Theta I = \Theta\Xi/\Theta X.$$

Supposons donc le rectangle du sabot suspendu en Ξ, ce point étant son centre de gravité, et ΠΞ un levier dont le milieu fixe est Θ. Le rectangle du demi-cylindre ayant (lemme V) pour centre de gravité X, l'égalité susdite signifie que les distances des deux centres au point fixe sont inversement proportionnelles aux aires des rectangles, et par conséquent que les deux rectangles s'équilibrent par rapport à Θ. On démontrerait de même, pour toute autre position de la perpendiculaire à ΠΘ menée dans le demi-cercle OΠP et par laquelle on mène un plan perpendiculaire à ΠΘ, prolongé dans les deux sens, que le rectangle déterminé dans le demi-cylindre, restant en place, équilibrera par rapport à Θ le rectangle déterminé dans le sabot, transporté au centre de gravité Ξ. Au total, la somme des rectangles du demi-cylindre — c'est-à-dire le demi-cylindre restant en place — équilibrera par rapport à Θ la somme des rectangles de sabot, c'est-à-dire le sabot lui-même, transporté en Ξ.

Considérons maintenant séparément (fig. 15) le carré MHNΨ perpendiculaire à l'axe, [le cercle ΞOΠP, les diamètres rectangulaires PO, ΞH. Tirons] ΘM, ΘH et, par ces droites, menons des plans (verticaux) perpendiculaires au plan du demi-cercle OΠP
Fig. 15. et prolongeons-les au-dessus et au-dessous de ce plan. Nous formerons ainsi un prisme triangulaire ayant pour base un triangle égal à ΘMH, et une hauteur égale à l'axe du cylindre : ce prisme est (évidemment) le quart du prisme total circonscrit au cylindre.

Dans le carré MN, tirons deux droites KΛ, TY, équidistantes de ΠΞ (et parallèles à ce diamètre) : elles coupent la demi-circonférence OΠP aux points K, T, le diamètre OP en Σ, Z, les obliques ΘH, ΘM en X, Φ. Par ces droites, menons des plans perpendiculaires à OP et prolongeons-les au-dessus et au-dessous du plan OΞΠP. Chacun de ces plans produira : 1 dans le demi-cylindre qui a une base égale à OΠP et une hauteur égale à l'axe une section en forme de rectangle, dont un côté égale KΣ (ou TZ) et l'autre égale l'axe ; 2 dans le prisme triangulaire ΘHM une autre section rectangulaire, dont un côté égale ΛX (ou YΦ) et l'autre égale l'axe.

[Considérons la paire de rectangles égaux ΛX, YΦ du prisme, d'une part, et les rectangles correspondants ΣK, ZT du demi-cylindre, d'autre part. Tous ces rectangles ayant même hauteur, leurs aires — égales deux à deux — sont proportionnelles à leurs seconds côtés. On a donc :

$$\text{RECT. } \Sigma K + \text{RECT. } ZT/\text{RECT. } \Lambda X + \text{RECT. } Y\Phi = 2 \text{ RECT. } \Sigma K/2 \text{ RECT. } \Lambda X = \Sigma K/\Lambda X.$$

Les rectangles ΣK, ZT ont respectivement leurs centres de gravité au point de rencontre de leurs diagonales (lemme V) et par conséquent aux milieux des droites ΣK, ZT. Le centre de gravité de leur système sera donc situé sur la droite qui joint ces milieux (lemme II) et, par raison de symétrie, au milieu de cette droite, c'est-à-dire à sa rencontre β avec ΞΠ.

Semblablement le centre de gravité du système des rectangles ΛX, YΦ sera situé à la rencontre α de ΞΠ avec la droite qui joint les milieux de ΛX, YΦ.

Le triangle rectangle HΛX semblable à HΞΘ étant isocèle, on a ΛX = HΛ = ΣP. On a donc successivement :

$$\text{RECT. } \Sigma K + \text{RECT. } ZT/\text{RECT. } \Lambda X + \text{RECT. } Y\Phi = \Sigma K/\Sigma P = \Sigma K^2/\Sigma P.\Sigma K = \Sigma P.\Sigma O/\Sigma P.\Sigma K = \Sigma O/\Sigma K = \Sigma P + 2\,\Sigma\Theta/\Sigma K = \Lambda X + 2\,X\Sigma/\Sigma K = 1/2\,\Lambda X + X\Sigma/1/2\,\Sigma K.$$

Or $1/2\,\Sigma K = \beta\Theta$; $1/2\,\Lambda X + X\Sigma = \alpha\Theta$. Si donc on considère ΞM comme un levier dont Θ est le milieu fixe, les systèmes (ΣK + ZT), (ΛX + YΦ) se font équilibre par rapport à Θ. Il en est de même pour toutes les autres positions des parallèles conjuguées ΛK, YT. Donc, au total, la somme des rectangles interceptés dans le prisme HΘM — c'est-à-dire le prisme HΘM — équilibrera par rapport à Θ la somme des rectangles du demi-cylindre — c'est-à-dire le demi-cylindre OΠP.

On a vu plus haut que le demi-cylindre équilibre, par rapport au même point fixe, le sabot transporté en Ξ : il en résulte, par symétrie, que le sabot transporté en Π équilibrera le prisme HΘM restant en place. Le prisme peut être considéré comme la somme des triangles égaux à HΘM empilés sur une hauteur BΩ. Chacun de ces triangles a son centre de gravité au point de rencontre de ses médianes (lemme IV), c'est-à-dire aux deux tiers de la médiane partant du sommet situé sur l'axe. Tous ces centres de gravité sont d'ailleurs évidemment en ligne droite ; dès lors, le centre de gravité du prisme lui-même est sur cette droite (lemme II) et, par raison de symétrie, au milieu de cette droite, c'est-à-dire aux 2/3, en γ, de la médiane du triangle HΘM intercepté par le plan équidistant des bases. L'équilibre du sabot et du prisme triangulaire par rapport à Θ exige donc qu'on ait :

$$\text{SABOT/PRISME } H\Theta M = \Gamma\Theta/\Pi\Theta = 2/3,$$

et comme le prisme HΘM est le quart du prisme total, il vient bien :

$$\text{SABOT/PRISME } AB = 2/12 = 1/6. \text{ C. Q. F. D.}]$$

Soit un prisme droit à bases carrées, ABΓΔ une de ses bases (fig. 16), un cylindre inscrit dans ce prisme, ayant pour base le cercle K tangent en E, Z, Π, Θ aux 4 côtés du carré ABΓΔ. Par le centre K de ce cercle et le côté (Γ′Δ′) de la base opposée du prisme qui correspond à ΓΔ, je mène un plan. Il détache du prisme total un prisme partiel qui en est le quart et qui est compris entre trois rectangles (HEΔ′Γ′, HEΔΓ, ΓΔΓ′Δ′) et deux triangles (rectangles) opposés (EΔΔ′, HΓΓ′). Dans le demi-cercle EZH, inscrivons un segment de parabole, ayant pour base HE et pour axe KZ (fig. 17). Dans le rectangle ΔH, menons une parallèle quelconque MN

Fig. 16. à KZ : elle coupera la circonférence du demi-cercle en Ξ, la parabole en Λ. On a évidemment :

et par conséquent

Par MN menons un plan (vertical) perpendiculaire à EH (fig. 16). Il interceptera : 1 dans le prisme partiel un triangle rectangle (MNN′), ayant pour côtés de l'angle droit MN et une perpendiculaire (NN′) à ΓΔ en N dans le plan ΓΔ (Δ′Γ′), et l'hypoténuse dans le plan sécant ; 2 dans le sabot cylindrique, détaché par le plan sécant, pareillement un triangle rectangle (MΞΞ′) ayant pour côtés
Fig. 17. de l'angle droit MΞ et une perpendiculaire (ΞΞ′) au plan KN menée le long de la surface du cylindre, [et l'hypoténuse dans le plan sécant.

Les triangles MNN′, MΞΞ′ étant semblables, on a :

Mais $M\Xi^2 = MH.ME = (HK - MK)(HK + MK) = HK^2 - MK^2$. Donc :

$$\text{TR. } MNN'/\text{TR. } M\Xi\Xi' = HK^2/HK^2 - MK^2.$$

Or l'égalité (2) donne :

$$MN/MN - N\Lambda = HK^2/HK^2 - MK^2,$$

donc :

c'est-à-dire : le triangle intercepté dans le prisme partiel est au triangle intercepté dans le sabot comme la parallèle MN menée dans le rectangle HΓΔE est à la partie de cette parallèle comprise entre EH et la parabole. Cette relation étant vraie pour n'importe quelle position de la parallèle, au total] la somme des triangles du prisme partiel est à la somme des triangles du sabot comme la somme des parallèles MN est à la somme de leurs sections comprises entre HE et la courbe. La première somme n'est autre que le prisme partiel, [la seconde le sabot], la troisième le rectangle HΓΔE, la quatrième le segment parabolique HZE, donc :

[Le rectangle HΓΔE vaut deux fois le triangle HZE ; le segment parabolique HZE vaut les 4/3 de ce triangle] car ceci a été montré précédemment ; donc :

$$\text{PRISME PARTIEL}/\text{SABOT} = 2/4/3 = 3/2.$$

Si donc le sabot vaut 2, le prisme partiel vaut 3, et le prisme total qui en est le quadruple vaut 12 : donc le sabot est bien le 6 du prisme. C. q. f. d.

Soit un prisme droit à bases carrées, ABΓΔ une de ses bases… [un cylindre EZHΘ inscrit dans le prisme. Un plan mené par le centre K du cercle de base EZH et un des côtés (Γ′Δ′) de la base opposée du prisme coupe le cercle de base suivant le diamètre EH (parallèle à Δ′Γ′)…] Il détache du prisme total un prisme partiel (HΓΓ′EΔΔ′) et du cylindre total un sabot cylindrique : il s'agit de montrer que ce sabot vaut le sixième du prisme total.

1 Je vais montrer d'abord qu'on peut inscrire dans le sabot cylindrique et lui circonscrire deux solides composés chacun d'une série de prismes qui ont même hauteur et pour bases des

triangles semblables, solides tels qu'on peut ramener leur différence à être plus petite que toute grandeur donnée.

[Divisons (fig. 18) le diamètre HE en un nombre quelconque de parties égales ; par chacun des points de division, menons des parallèles MN, M1N1... à KZ et par ces droites des plans perpendiculaires au plan de base K. Ces plans divisent le prisme partiel HΓ′EΔΔ′ en une série de prismes élémentaires ayant même hauteur = MM1 et pour bases des triangles rectangles égaux = MNN′ (voir fig. 16). Ils déterminent aussi dans le sabot une série de sections en forme de triangles rectangles inégaux MΞΞ′, M1Ξ1Ξ′1... Considérons deux sections voisines et soit M1Ξ1 > MΞ. Projetons Ξ sur M1N1 en ξ1 et Ξ1 sur MN en ξ, et formons dans les plans verticaux les triangles Mξξ′ = M1Ξ1Ξ′1, M1ξ1ξ′1 = MΞΞ′. Le prisme élémentaire déterminé par les deux triangles égaux MΞΞ′M1ξ1ξ′1 est évidemment contenu tout entier dans la section du sabot qui a pour base le trapèze curviligne MΞΞ1M1. Au contraire le prisme élémentaire déterminé par les triangles égaux Mξξ′M1Ξ1Ξ′1 contient tout entière cette même section. En opérant de même pour la section suivante, on formera de même un prisme élémentaire M1Ξ1Ξ′1M2ξ2ξ′2 inscrit dans le sabot et un prisme élémentaire M1ψψ′M2Ξ2Ξ′2 circonscrit et ainsi de suite. Si l'on compare les deux séries ainsi formées, on verra que chaque prisme élémentaire de la série circonscrite a pour équivalent un prisme de la série inscrite : ainsi le prisme circonscrit MξM1Ξ1 équivaut au prisme inscrit M1Ξ1M2ξ2 de la section suivante. Seul le dernier prisme circonscrit M5Ξ5ZK n'a pas d'équivalent dans la série inscrite. La différence des deux séries se réduit donc à ce seul prisme deux fois répété (dans chacun des deux quarts de cercle). Or, ce prisme peut être rendu aussi petit que l'on veut en multipliant le nombre des divisions du diamètre HE et des plans verticaux ; donc aussi la différence
Fig. 18.
Fig. 19. des deux séries de prismes élémentaires, c'est-à-dire des deux volumes considérés, peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée. À plus forte raison peut-on rendre plus petite que toute grandeur donnée la différence de chacun de ces volumes et du sabot qui est compris entre eux.

2 Je vais montrer de même (fig. 19) que si l'on trace l'arc de parabole HZE inscrit dans le demi-cercle HZE, on peut inscrire et circonscrire au segment parabolique HZE deux séries de rectangles élémentaires (correspondant aux prismes élémentaires des volumes du sabot) dont la différence peut devenir plus petite que toute grandeur donnée.

Chacun des plans sécants verticaux de tout à l'heure détermine dans le segment parabolique une trace MΛ, M1Λ1, etc. Ces traces sont équidistantes et de grandeur croissante depuis H jusqu'à Z. Si donc nous projetons Λ en λ1 sur M1N1, Λ1 en λ2, sur M2N2... et de même Λ1 en λ′ sur MN, Λ2 en λ′1 sur M1N1..., nous formons deux séries de rectangles : l'une enveloppante Hλ0ΛM, Mλ′Λ1M1,... l'autre enveloppée MΛλ1M1, M1Λ1λ2M2..., et chaque rectangle de la série enveloppante équivaut au rectangle enveloppé de la section suivante (Hλ0ΛM = MΛλ1M1). Seul, le dernier rectangle enveloppant M5N5ZK reste sans équivalent. La différence des deux séries se réduit donc à ce rectangle élémentaire (deux fois répété), et comme, si le nombre des divisions du diamètre est suffisamment grand, on peut rendre ce rectangle aussi petit qu'on veut, la différence des deux séries elle-même (et a fortiori la diffé-

rence de chacune d'elles à l'aire du segment parabolique qu'elles comprennent entre elles) peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée.

3 Le prisme partiel est au solide inscrit (ou circonscrit) au sabot cylindrique comme le rectangle ΗΓΔΕ est à la somme des rectangles élémentaires inscrits (ou circonscrits) au segment parabolique.

Considérons d'abord le solide circonscrit (fig. 19). À chacun des prismes élémentaires déterminés dans le prisme partiel par deux plans sécants consécutifs correspond un prisme élémentaire du solide circonscrit. Comparons deux de ces prismes élémentaires correspondants HN, ΗΞ. Ayant même hauteur, ils sont proportionnels à leurs bases, c'est-à-dire aux triangles rectangles MNN′, ΜΞΞ′.

Or, on a vu (n XIII) que :

$$\text{TR. MNN}'/\text{TR. M}\Xi\Xi' = \text{MN}/\text{M}\Lambda\ ;$$

donc aussi :

et aussi :

(cf. lemme IX).

Pour le solide inscrit, la démonstration serait la même, puisque les triangles et les rectangles sont les mêmes deux à deux dans les deux séries. Toutefois, il faut observer que, tandis qu'à chaque élément du prisme partiel correspond un élément prismatique du solide circonscrit, en ce qui concerne le solide inscrit le premier élément de chaque demi-cercle (prisme HN) n'a pas de correspondant dans le solide, et de même pour les rectangles. On devra donc écrire en toute rigueur :

Mais comme :

$$\text{ÉL. PRISME}/\text{ÉL. SOLIDE INSCRIT} = \text{RECT. HN}/\text{RECT. M}\Lambda 1,$$

on ne change pas l'exactitude de l'égalité (3) en ajoutant au numérateur du premier membre deux éléments prismatiques et à celui du second deux rectangles HN, et l'on retombe alors sur l'égalité (2).

Ces préliminaires posés, supposons d'abord que le sabot soit plus grand que 1/6 du prisme total, c'est-à-dire que le prisme partiel soit moindre que 3/2 du sabot. Si petite que soit la différence, il en résulterait que le prisme partiel est aussi moindre que 3/2 du solide inscrit dans le sabot, car la différence de ce solide au sabot peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée. Or] le prisme partiel est à ce solide inscrit (3) comme le rectangle ΗΓΔΕ est à la somme des rectangles élémentaires inscrits dans le segment parabolique. Si donc l'hypothèse était vraie, on aurait :

$$\text{RECT. ΗΓΔΕ}/\Sigma\ \text{RECT. M}\Lambda_1\text{M}1 < 3/2.$$

Mais on a vu (Théorème I) que le rectangle ΗΓΔΕ vaut exactement les 3/2 du segment de parabole, lequel enveloppe la somme des rectangles ΜΛι1Μ1 : il est donc impossible que ce rectangle vaille moins que les 3/2 de cette somme ; [l'hypothèse est donc fausse et le sabot ne saurait être plus grand que 1/6 du prisme total.

Supposons maintenant que le sabot soit plus petit que 1/6 du prisme total, c'est-à-dire que le prisme partiel soit plus grand que 3/2 du sabot. Si petite que soit la différence, on montrerait de même qu'il en résulte que le prisme partiel est aussi plus grand que 3/2 du solide enveloppant le sabot.] Mais le prisme partiel est à ce solide enveloppant (3) comme le rectangle ΗΓΔΕ est à la somme des rectangles élémentaires circonscrits au segment parabolique. On aurait donc :

$$\text{RECT. } \Η\Gamma\Delta\Ε/\Sigma \text{ RECT. } \Η\Lambda\text{o}\Lambda\Μ > 3/2.$$

Or (Théorème I), le rectangle vaut exactement les 3/2 du segment parabolique qui est plus petit que la somme des rectangles enveloppants ; il ne saurait donc valoir plus que les 3/2 de cette somme : [donc l'hypothèse est fausse.

Puisque le sabot ne saurait être ni plus grand ni plus petit que le sixième du prisme total, il vaut donc exactement le sixième de ce prisme. C. q. f. d.]

$$R^2/Y^2 = R/X \text{ ET } R^2/R^2 - Y^2 = R/R - X.$$

Dès lors on a tr. MNN′/tr. MΞΞ′ = MN²/MΞ² = R²/R² – y² = R/R – x = MN/MΛ.

Théorème XV

[Si l'on inscrit dans un cube deux cylindres ayant chacun ses bases inscrites dans deux faces opposées du cube et sa surface latérale tangente aux quatre autres faces, le volume formé par l'intersection des deux cylindres équivaut aux deux tiers du cube.

Supposons (fig. 20) que nos deux cylindres aient des axes horizontaux. Menons un plan vertical perpendiculaire à l'un de ces axes (α) et passant par le centre K du cube, et que ce soit le plan de la
Fig. 20. figure. Il coupera le cylindre (α) selon le cercle ΑΒΓΔ, le cube et le cylindre (β) selon le carré ΦΨΩΧ. Prolongeons AB, AΔ jusqu'à leurs intersections E, Z avec ΧΩ et complétons le rectangle ΕΖΗΛ : ce sera une section verticale d'un prisme rectangulaire, qui a même hauteur que le cube et pour base un carré de côté double. Le triangle AEZ est la section verticale d'une pyramide à base carrée, ayant même base et même hauteur que ce prisme.

Prolongeons ΑΓ de ΑΘ = ΑΓ et considérons ΓΘ comme un levier ayant A pour milieu fixe. Menons un plan horizontal MN : il coupe les deux cylindres selon deux rectangles égaux qui ont eux-mêmes pour partie commune un carré de côté ΞΟ qui coupe le cercle ΑΒΓΔ selon la corde ΞΟ. Ce même plan coupe le prisme selon un carré de côté MN, la pyramide selon un carré de côté ΠΡ.

On a (cf. le théorème II) :

$$A\Theta/A\Sigma = A\Gamma/A\Sigma = M\Sigma/\Sigma\Pi = M\Sigma^2/M\Sigma.\Sigma\Pi.$$

Mais :

$$M\Sigma.\Sigma\Pi\ (= \Gamma A.A\Sigma = A\Xi^2 = \Xi\Sigma^2 + A\Sigma^2) = \Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2\ ;$$

donc :

$$A\Theta/A\Sigma = M\Sigma^2/\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2 = MN^2/\Xi O^2 + \Pi P^2 = \text{carré } MN/\text{carré } \Xi O + \text{carré } \Pi P,$$

c'est-à-dire que le carré MN, restant en place, équilibre par rapport à A les carrés ΞO, ΠP transportés en Θ comme centre de gravité. Cette proposition reste vraie pour n'importe quelle position du plan MN et, par conséquent, pour les sommes des trois espèces de carrés interceptés par chacun de ces plans. Donc, en totalisant, le prisme (somme des carrés MN) restant en place équilibre la pyramide (somme des carrés ΠP) et le volume commun aux deux cylindres (somme des carrés ΞO) transportés Θ comme centre de gravité commun. Le prisme ayant évidemment pour centre de gravité K, on doit donc avoir :

$$\text{prisme}/\text{pyramide} + \text{volume commun} = \Theta A/KA = 2.$$

La pyramide vaut 1/3 du prisme, donc :

$$\text{prisme} = 2\ \text{prismes}/3 + 2\ \text{vol. comm.},$$

d'où :

$$\text{vol. comm.} = 1/6\ \text{prisme}\ ;$$

et comme le prisme vaut quatre fois le cube :

$$\text{vol. comm.} = 2/3\ \text{cube. C. q. f. d.}$$

Soit, comme précédemment, une section verticale.
Fig. 21. Menons (fig. 21) le triangle ΦKΨ : ce sera la section verticale d'une pyramide ayant son sommet en K et pour base un des carrés du cube. Un plan horizontal ΛP coupera le cube selon un carré de côté ΛP, la pyramide selon un carré de côté NO, le volume commun selon un carré de côté MΠ. On a :

$$\Xi K^2 + \Xi\Pi^2 = (K\Pi^2 = K\Delta^2 =)\ \Xi P^2\ ;$$

et, comme ΞK = ΞN, on a :

$$\Xi N^2 + \Xi\Pi^2 = \Xi P^2.$$

C'est-à-dire :

$$\text{carré } (NO) + \text{carré } (M\Pi) = \text{carré } (\Lambda P).$$

Cette égalité étant vraie pour n'importe quelle position de la parallèle ΛP, on a, en sommant :

$$\Sigma \text{ carrés } NO + \Sigma \text{ carrés } M\Pi = \Sigma \text{ carrés } \Lambda P,$$

c'est-à-dire :

$$2 \text{ pyramides } \Phi K\Psi + \text{volume commun} = \text{cube } \Phi\Psi X\Omega.$$

Et comme la pyramide est le 6 du cube :

$$\text{volume comm.} = \text{cube} - 2/6 \text{ cube} = 2/3 \text{ cube}. \text{ C. q. f. d.}$$

Considérons toujours les deux cylindres horizontaux (fig. 22 et 23). On a vu (1 démonstration) qu'une série de plans horizontaux les coupent selon deux rectangles qui ont pour partie commune un carré. Ces carrés vont en croissant depuis le point N (fig. 22) — auquel se réduit l'intersection des génératrices dans le plan AΓ — jusqu'au carré εζηθ correspondant à la section médiane, puis en diminuant de nouveau jusqu'au point N′, centre de la base EZHΘ. Le solide commun est formé par la

Fig. 22. superposition de tous ces carrés. Les sommets de tous ces carrés, c'est-à-dire les arêtes du solide commun, sont (fig. 22) dans les plans BΔΘZ et AΓHE. Ces deux plans décomposent le solide commun en quatre portions de cylindre. Si nous les coupons par les deux plans verticaux médians du cube, αβγδ, λκμν, chacune de ces portions de cylindre se décompose en deux sabots ou onglets, pareils à ceux du théorème XI, égaux et adossés deux à deux par leur base : tel est, par exemple ηNN′Λ (fig. 23), (où l'on peut remarquer que NηN′ est une demi ellipse inclinée à 45° sur le plan NΛN′.) Chacun de ces sabots, en vertu du théorème XI, est égal au 1/6 d'un parallélépipède ayant même base que le cube et demi-hauteur, c'est-à-dire moitié du cube. Chaque sabot vaut donc 1/12 du cube, et comme le

Fig. 23. solide se décompose symétriquement en huit sabots pareils, le volume total représente les 8/12, c'est-à-dire les 2/3 du cube.]

Sources et licence

Texte : https://fr.wikisource.org/wiki/Des_th%C3%A9or%C3%A8mes_m%C3%A9caniques_%28trad._Reinach%29. Domaine public ; transcription Wikisource CC BY-SA 4.0. Mise en forme : liregratuitement.com. Tout ce que nous ajoutons reste libre.