

Le Nombre entier

Gottlob Frege

LU AVEC LIREGRATUITEMENT.COM

Livre libre de droits, lisible gratuitement en ligne et en quinze minutes par jour.

DISCUSSIONS · LE NOMBRE ENTIER

J'ai vu que cette revue tâche de rapprocher les mathématiques de la philosophie, ce qui me semble très utile. En effet, ces sciences ne peuvent que gagner à un échange d'idées. C'est ce qui m'engage à entrer dans la discussion. Les vues exposées par M. Ballue dans le numéro de mai sont sans doute celles de la plupart des mathématiciens. Pourtant elles contiennent des difficultés logiques, qui me semblent assez graves pour être mises en évidence, d'autant plus qu'elles peuvent répandre une certaine obscurité sur ces questions et empêcher les philosophes de s'occuper des principes de l'arithmétique. D'abord il me semble bon de signaler une faute souvent commise par les mathématiciens, c'est de confondre les symboles avec les objets de la recherche. En effet les symboles ne sont que des moyens très utiles et même indispensables de la recherche, mais ils n'en sont pas les objets mêmes. Ceux-ci sont représentés par des symboles. La forme des signes et leurs propriétés physiques et chimiques peuvent convenir plus ou moins, mais elles ne sont pas essentielles. Il n'y a pas de symbole qui ne puisse être remplacé par un autre de forme et de qualités différentes, la connexion entre les choses et les symboles étant purement conventionnelle. Il en est de même de tous les systèmes de signes et de toutes les langues. La langue est sans doute un instrument puissant de l'intelligence humaine ; mais une langue peut être aussi utile qu'une autre. Il ne faut donc pas exagérer l'importance des mots et des symboles en leur attribuant une puissance quasi magique sur les choses ou en les prenant pour les choses mêmes, qu'ils ne peuvent que représenter

plus ou moins exactement. Il ne semble presque pas être la peine d'insister sur ce point ; mais l'article de M. Ballue n'est peut-être pas exempt de la faute signalée. Le sujet en est le nombre entier. Qu'est-ce que cela ? M. Ballue dit : « Les pluralités sont représentées par des symboles qu'on appelle des nombres entiers ». Ainsi d'après lui les nombres entiers sont des symboles, et c'est des symboles qu'il veut parler. Mais des symboles ne sont pas et ne peuvent pas être le fondement de l'analyse mathématique. Si j'écris 1 + 2 = 3, j'avance une proposition qui traite des nombres 1, 2 et 3 ; mais ce ne sont pas ces symboles dont je parle. Je pourrais leur substituer A, B, Γ, je pourrais écrire p au lieu de + et é au lieu de =. Ainsi par ApBéΓ j'exprimerais la même pensée qu'auparavant, mais au moyen de symboles différents. Les théorèmes de l'arithmétique ne traitent donc jamais des symboles mais des choses représentées. Ces objets, il est vrai, ne sont ni palpables, ni visibles, ni même réels, si l'on nomme réel ce qui peut exercer et subir une influence. Les nombres ne changent pas ; car les théorèmes de l'arithmétique enferment des vérités éternelles. Ainsi l'on peut dire que ces objets sont hors du temps, ce qui fait voir qu'ils ne sont pas des perceptions ou des idées subjectives, parce que celles-ci changent toujours conformément aux lois psychologiques. En effet les lois de l'arithmétique n'appartiennent pas à la psychologie. Tout ne se passe pas comme si chaque homme avait un nombre, nommé Un, à lui, qui fasse partie de son âme ou de sa conscience ; mais il n'y a qu'un seul nombre qui porte ce nom, le même pour tout le monde et objectif. Ce sont donc des objets assez curieux que les nombres, réunissant en eux des qualités qui semblent opposées d'être objectif et de ne pas être réel. Mais en y songeant plus profondément on remarquera qu'il n'y a pas là de contradiction. Les nombres négatifs, fraction-

naires, etc., sont de la même nature ; et c'est là peut-être le motif pour lequel on fait souvent trop de cas des symboles en arithmétique. Parce qu'on éprouvait des difficultés à reconnaître des objets qui ne sont ni perceptibles aux sens ni psychologiques, on leur a substitué des objets visibles. Mais on a oublié que ces symboles ne sont pas ce qu'on veut étudier. Ainsi l'on attribue une double nature aux nombres : on les appelle symboles, et pourtant on les représente eux-mêmes, on leur accorde des noms. M. Ballue écrit : « Comme tous les symboles, le nombre entier admet une double représentation : le son qu'il produit à l'oreille, l'impression que son nom écrit produit sur la vue… Le nombre entier possède en outre une représentation écrite particulière, exigeant l'emploi des caractères spéciaux appelés chiffres. La numération a pour but d'étudier les moyens de représenter tous les nombres entiers avec un petit nombre de mots et de chiffres. » Qu'est-ce donc que le chiffre 2 désigne ? Un nombre, c'est-à-dire un symbole d'après M. Ballue. Est-ce le mot deux ? Alors nous autres Allemands aurions d'autres nombres que les Français et notre arithmétique serait une autre science que celle des Français, ayant des objets de recherche différents. Peut-être l'opinion de M. Ballue est-elle que le mot deux représente le même nombre que le chiffre 2. Mais quel que soit ce nombre, il représente une pluralité, il est représenté lui-même par le chiffre 2. Pourquoi a-t-on donc besoin de cet intermédiaire un peu mystique ? Pourquoi ne fait-on pas désigner directement la pluralité au chiffre ?

On pourrait penser qu'il n'y a ici qu'une faute d'expression de la part de M. Ballue, qu'on pourrait facilement corriger en substituant dans le titre de son article la pluralité au nombre entier ; car ce sont les pluralités dont les nombres entiers sont les représentants symboliques d'après M. Ballue. Mais par là nous ne

sommes pas à l'abri de toutes les difficultés. Qu'est-ce qu'une pluralité ? M. Ballue répond :

« La réunion de plusieurs objets distincts, considérés en tant que distincts, sans se préoccuper de la nature ou de la forme de ces objets, s'appelle une pluralité. On voit qu'une pluralité est une réunion d'unités. »

Cette définition n'est pas si claire que l'auteur semble le penser. On pourrait trouver le sens du mot pluralité contenu dans le mot plusieurs et dans la forme plurielle, mais M. Ballue ajoute des restrictions en disant : « distincts, considérés en tant que distincts », sans se préoccuper de la nature ou de la forme de ces objets. Ce qu'il nomme ici distinct, il vient de le nommer isolé en disant : « Un objet isolé, considéré en tant qu'isolé, abstraction faite de sa nature ou de forme, prend le nom d'unité ». On objectera peut-être que, si les objets étaient absolument isolés, il n'y en aurait pas de réunion. D'ailleurs on doutera qu'il y ait un objet absolument isolé, chaque particule matérielle étant en rapport avec chaque autre par la gravitation. Il faudrait donc préciser le degré d'isolement nécessaire. Je ne m'appesantis pas sur ce point, mais je vais examiner de plus près ce que M. Ballue veut dire par les mots : « considérés en tant que distincts », sans se préoccuper de la nature ou de la forme de ces objets et par les mots : « considéré en tant qu'isolé », abstraction faite de sa nature ou de sa forme. Ce qui me frappe ici c'est que la manière de considérer un objet et que les abstractions faites dans l'âme d'un sujet semblent être prises pour des qualités de l'objet. Je demande : est-ce que l'objet après être considéré en tant qu'isolé est le même qu'auparavant ? ou a-t-on créé un objet nouveau en le considérant ? Au premier cas rien ne serait changé d'essentiel.

En effet, si je considère la planète de Jupiter en tant que distincte ou isolée, elle n'en reste pas moins liée à d'autres corps par la gravitation, et si je fais abstraction de sa masse et de sa forme sphéroïdale, Jupiter ne perd ni sa masse ni sa forme. À quoi sert-il donc de faire cette abstraction ? Il y aurait là en outre une difficulté psychologique. Tant que je considère un objet, je suis sûr qu'il est considéré, mais en procédant dans une démonstration il faut fixer mon attention successivement sur d'autres objets ; je ne suis même pas capable de considérer à la fois chaque objet d'une centaine. C'est d'autant plus difficile que je ne dois pas me préoccuper de la nature ou de la forme des objets sans les confondre. Je perdrais ainsi l'assurance que ces objets seraient en effet tous des unités. Sûrement ils ne le seraient pas relativement à moi ; ils le seraient peut-être relativement à d'autres personnes, mais probablement je n'en saurais rien et, si je le savais, cela ne serait d'aucune utilité pour ma démonstration : car je n'en tirerais aucune conclusion.

Orion est une réunion d'étoiles. S'il est possible en général de considérer des objets en tant que distincts, sans se préoccuper de la nature ou de la forme de ces objets, cela le sera aussi dans ce cas. En prenant les paroles de M. Ballue à la lettre, on dira, après avoir fait cette considération, que la constellation est une pluralité, et, puisque le nom d'Orion est un symbole de cette pluralité, on prendra ce mot pour un nombre. À la vérité il ne dit rien de cela que les étoiles sont considérées en tant que distinctes, etc., mais cela ne fait rien. Posé que la constellation est une pluralité, le nom de la constellation est un symbole d'une pluralité.

Examinons l'autre conception que l'objet considéré est différent de l'objet original ! Le soleil par exemple comme corps maté-

riel, lumineux, ayant une forme, occupant un lieu, serait différent du soleil considéré en tant que distinct, abstraction faite de sa nature ou de sa forme. On dirait que celui-ci est créé par l'acte de le considérer et, puisqu'un objet extérieur ne peut être créé ainsi, il faudrait que ce fût une idée subjective ou quelque chose de semblable dans l'âme de la personne faisant cette considération et cette abstraction. Chacun, en considérant ainsi le soleil, se ferait une telle idée à lui, distincte de celle d'une autre personne. Alors les pluralités seraient subjectives aussi. Cela ne s'accorderait pas avec le fait que les naturalistes donnent une information objective, quand ils précisent le nombre des pistils dans une fleur.

Quel peut être l'effet de l'abstraction faite de la nature ou de la forme de l'objet ? Est-ce que celui-ci perd par cela sa nature et sa forme ? Il paraît que c'est l'effet voulu par M. Ballue ; mais il est évident qu'un objet extérieur ne peut être changé de cette manière. Quant à l'idée que quelqu'un se fait d'un objet, il n'est pas nécessaire qu'il y ait abstraction, pour qu'elle n'ait pas les qualités de l'objet même. Une idée du soleil n'est pas un corps matériel, lumineux. Une telle idée a pourtant des qualités différentes en général de celle que la même personne se fait de la lune. L'abstraction dont parle M. Ballue peut effacer la différence de ces idées ; mais où reste alors la pluralité ?

Une autre difficulté est liée étroitement à celle-ci. M. Ballue dit : « La pluralité la plus simple est formée par une unité adjointe à une autre unité ». S'il y a plus de deux unités, il y a plusieurs pluralités formées par une unité adjointe à une autre unité ; l'article défini au singulier employé par M. Ballue n'est donc pas exact. Il faudrait dire : Les pluralités les plus simples sont formées, etc. Mais le nombre Deux n'est ni une pluralité

particulière de cette sorte ni le symbole d'une telle pluralité. Peut-être on se rapprocherait plus de la vérité en disant que c'est l'espèce ou la classe des pluralités formées d'une unité adjointe à une autre unité. Mais pour que cela fût exact, il faudrait avoir une bonne définition des termes unité et pluralité. Les lecteurs de cette revue peuvent facilement constater que le premier n'est pas employé uniformément par les écrivains. En rapprochant la thèse de M. Ballue : « La pluralité la plus simple est formée par une unité adjointe à une autre unité » de ce que disent MM. Le Roy et Vincent dans leur article, paru dans le numéro de septembre, p. 519 : « La possibilité pour l'esprit de former indéfiniment des nombres entiers en ajoutant l'unité à elle-même », nous voyons que ceux-ci emploient ce terme comme nom propre, tandis que M. Ballue l'emploie comme nom commun appellatif en supposant l'existence de plusieurs unités. On voit en même temps que les mots réunion et adjointe dont se sert M. Ballue ont besoin d'être expliqués. MM. Le Roy et Vincent emploient le mot ajouter, et cet acte semble se faire dans l'esprit d'une personne. Cependant il est difficile de concevoir comment une chose peut être ajoutée à elle-même. De quelle nature sont donc les rapports qui font ces réunions ? Sont-ce des rapports physiques, historiques, géométriques ou psychologiques, ou est-ce que ce sont des relations purement logiques ?

Ce ne sont que des négations et des questions que je viens de proposer, ce qui paraîtra peu satisfaisant aux lecteurs. Mais comme j'en ai donné des solutions positives dans mes écrits cités ci-dessous, je peux me borner ici à faire voir qu'il y a là des questions assez épineuses et que le problème est plus compliqué qu'il ne semble d'abord.

D G. Frege,
Professeur à l'université de Jéna.

Sources et licence

Texte : https://fr.wikisource.org/wiki/Le_Nombre_entier. Domaine public ; transcription Wikisource CC BY-SA 4.0. Mise en forme : liregratuitement.com. Tout ce que nous ajoutons reste libre.